CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG
FAKULTÄT II
DEPARTMENT FÜR INFORMATIK

Natürliches Schließen für den Shape Calculus

Sven Linker

23. April 2007

Erstprüfer: Prof. Dr. E.-R. Olderog
Zweitprüfer: Dr. A. Schäfer

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Informationenverarbeitende Systeme finden eine immer stärkere Verbreitung, vor allem im Bereich der sicherheitskritischen Anwendung, d.h. dass bei einem Ausfall eines solchen Systems kurz oder langfristig Menschenleben gefährdet werden können. Beispiele hierfür sind die Bestrebungen der Automobilindustrie, die Steuerung zukünftiger Fahrzeuge mittels elektronischer Übersetzung zu realisieren (*steer-by-wire*), oder das European Train Controlling System (ETCS) [ECS99], in der semi-intelligente Computersysteme, die direkt in den Zügen integriert sind, die die Zuordnung und Zuweisung der Streckensegmente zu den Zügen steuern. Eine Fehlfunktion eines dieser Systeme kann zum Beispiel zu Auffahrunfällen oder Zusammenstößen führen.

Um solches Verhalten möglichst auszuschließen, kommen verstärkt formale Methoden bei der Entwicklung solcher Anwendung zum tragen. Ein vielverwendeter Formalismus im Bereich der Realzeitsysteme, d.h. Systeme, die innerhalb eines festgelegten Zeitintervalls reagieren müssen, ist der Duration Calculus (DC) [ZHR91]. Dieser ermöglicht es, Realzeiteigenschaften solcher Realzeitsysteme zu verifizieren.

In den oben genannten Beispielen spielen aber auch räumliche Eigenschaften, z.B. die Bewegungsfreiheit, eines Systems eine wichtige Rolle. Solche Bedingungen lassen sich mit dem Shape Calculus (SC) [Sch06] verifizieren. Der SC ist eine multidimensionale Erweiterung des DC zur Beschreibung räumlicher Eigenschaften, so dass sich die Erfahrungen des DC weitestgehend auf den Shape Calculus übertragen lassen.

Da die zu betrachtenden Systeme meistens eine hohe Komplexität aufweisen, werden Beweise über die Semantik der Logik, innerhalb der das System modelliert wurde, häufig sehr aufwendig und die Ansätze ähneln sich selten. Unterstützung bieten hierbei automatische Theorembeweiser, die ein syntaktisches Beweissystem (Kalkül) mit festdefinierten Regeln ausnutzen. Beispiele hierfür sind Isabelle [NPW02] und KeY [BHS07]. Ein prominentes Beispiel für ein Beweissystem ist das "natürliche Schließen" [Gen35, Pra65], das den Anspruch erhebt, die Schlussfolgerungen eines Mathematikers nachzuahmen und sozusagen sichtbar zu machen.

Dass ein Kalkül des "natürlichen Schließens" nicht nur für die klassischen Logiken wie Aussagenlogik und Prädikatenlogik erster Stufe, sondern auch für Modallogiken wie S4 möglich ist, wurde zum Beispiel in [Pra65] gezeigt, jedoch waren hierzu Bedingungen für die Menge an Annahmen notwendig. Basin, Matthews und Viganò haben in [BMV96] ein Beweissystem vorgestellt, was ohne diese Einschränkungen auskommt. Hierzu werden die betrachteten Formeln mit semantischen Einheiten, den Welten einer Modallogik, beschriftet. Ein solches Kalkül bildet dann ein Labelled Deductive System (LDS) wie in [Gab96] dargestellt. Im Speziellen hat Rasmussen in [Ras02] ein Kalkül des "natürlichen Schließens" für den Duration Calculus beziehungsweise für eine Intervalllogik SIL (*signed interval logic*), innerhalb derer sich der Duration Calculus einbetten lässt, vorgestellt.

In der vorliegenden Arbeit wird aufbauend auf [Ras02] eine Logik MPL (*Mehrdimensionale Polyeder-Logik*) vorgestellt, die eine Abstraktion des Shape Calculus darstellt. Für diese Logik wird daraufhin ein Beweissystem nach [BMV96] definiert, welches auch die Eigenschaften der Modelle wie in [Ras02] beschreibt. Daraufhin wird MPL um die Eigenheiten des Shape Calculus ergänzt, und auch das Beweissystem passend erweitert. Um die Anwendbarkeit des Systems zu belegen, werden zwei Theoreme mit dem Kalkül bewiesen.

2 Grundlagen

2.1 Aussagenlogik und Prädikatenlogik

Die klassische Aussagenlogik verknüpft sogenannte *Aussagen* über die Booleschen Operatoren miteinander, so dass aus diesen Aussagen neue Aussagen folgen. Aussagensymbole werden mit $P, Q, ... \in \mathrm{PL}_{Sym}$, die falsche Aussage (*falsum*) mit $\bot$ bezeichnet. PL_{Sym} ist die Menge aller Aussagensymbole und wird als unendlich vorausgesetzt, d.h. es ist immer möglich, ein neues, in einer beliebig großen Menge von Formeln noch nicht benutzes Symbol zu wählen. Aussagenlogische Formeln werden dann durch die folgende Syntax beschrieben:

$$F ::= P \mid \bot \mid \neg F_1 \mid F_1 \wedge F_2 \mid F_1 \vee F_2 \mid F_1 \to F_2 \mid F_1 \leftrightarrow F_2.$$

Eine Menge $M \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ heißt logisch vollständig, wenn sich die anderen Operatoren nur mithilfe der Elemente von M darstellen lassen. Die Menge $\{\neg, \wedge\}$ ist logisch vollständig, weshalb nur für diese Operatoren die Semantik angegeben wird. Für die Definition der Semantik einer Formel, wird eine *Interpretation* $\mathcal{I}$ benötigt, die den Aussagevariablen Wahrheitswerte zuordnet, d.h. $\mathcal{I}$ ist vom Typ $\mathrm{PL}_{Sym} \to \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$. Für $\bot$ gilt immer $\mathcal{I}(\bot) = \mathrm{false}$. Die Interpretation wird wie folgt auf aussagenlogische Formeln erweitert:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}[\![P]\!] & = & \mathcal{I}(P) \\ \mathcal{I}[\![\neg F]\!] & = & \mathrm{true} \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{I}[\![F]\!] = \mathrm{false} \\ \mathcal{I}[\![F \wedge G]\!] & = & \mathrm{true} \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{I}[\![F]\!] = \mathrm{true} \quad \text{und} \quad \mathcal{I}[\![G]\!] = \mathrm{true} \end{array}$$

Klassische Prädikatenlogik erster Stufe, im Folgenden nur als Prädikatenlogik bezeichnet, ist eine Erweiterung der Aussagenlogik. Die kleinste Einheit in dieser Logik bilden wiederum Variablen $x, y, z, \ldots$, die aber nun mithilfe von Funktionen $f^k, g^l, \ldots$ verschiedener Stelligkeiten $k, l \geq 0$ miteinander zu Termen verbunden werden. Über diese Terme werden nun durch Prädikate $p^k, q^l, \ldots$, die wiederum Stelligkeiten $k, l \geq 0$ besitzen, Aussagen getroffen. Die Variablen werden in der Menge VAR, Funktionen in FUNK und Prädikate in der Menge PRÄD zusammengefasst. Die Syntax von Termen θ ergibt sich zu

$$\theta ::= x \mid f^k(\theta_1, \ldots, \theta_n),$$

die von Formeln ϕ zu

$$\phi ::= p^k(\theta_1, \ldots, \theta_n) \mid \bot \mid \neg\phi_1 \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \forall x \colon \phi_1.$$

Da sich der Existenzquantor durch die Negation und den Allquantor ausdrücken lässt, ist hiermit die Syntax vollständig definiert.Die Prädikatenlogik wird auf Modellen $\mathfrak{m}$ interpretiert.

Definition 2.1.1 (Modell) *Ein Modell der Prädikatenlogik ist ein Tupel* $\mathfrak{m} = (D, \mathcal{I})$. *Hierbei ist* D *eine nicht-leere Menge, die als* Domäne *von* $\mathfrak{m}$ *bezeichnet wird.* $\mathcal{I}$ *ist eine Abbildung, die einem Funktionssymbol* f^k *eine* k*-stellige Abbildung*

$$\mathcal{I}(f^k) = \hat{f}^k \in D^k \to D,$$

zuordnet und einem Prädikat p^k *wiederum eine* k*-stellige Abbildung, die jedoch als Wertebereich die Menge* $\{true, false\}$ *besitzt.*

$$\mathcal{I}(p^k) = \hat{p}^k \in D^k \to \{true, false\}$$

0*-stellige Funktionssymbole stellen Konstanten dar,* 0*-stelligen Prädikaten wird direkt ein Wahrheitswert zugeordnet.*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}(f^0) & \in & D \\ \mathcal{I}(p^0) & \in & \{true, false\} \end{array}$$

Um eine prädikatenlogische Formel einem Wahrheitswert zuordnen zu können, müssen noch den Variablen Werte zugewiesen werden. Hierzu dienen Belegungen $\mathcal{V}$.

Definition 2.1.2 (Belegung) *Sei* $\mathfrak{m} = (D, \mathcal{I})$ *ein Modell. Eine Belegung* $\mathcal{V}$ *ist eine Abbildung*

$$\mathcal{V} \in \textsc{Var} \to D.$$

Die Modifikation einer Belegung $\mathcal{V}$ *ist für* $x \in Var$ *und* $d \in D$ *als*

$$\mathcal{V}[x \to d](y) = \begin{cases} d & falls \quad x = y \\ \mathcal{V}(y) & sonst \end{cases}$$

definiert. Das bedeutet, dass der Variablen x *der Wert* d *zugewiesen wird, während die Belegung aller anderen Variablen beibehalten wird.*

Nun lässt sich die Semantik $\mathcal{I}$ von Termen und Formeln definieren, wobei mit x_i Variablen, mit θ_i Terme und mit ϕ_i Formeln bezeichnet werden.

Definition 2.1.3 (Semantik von Termen) *Sei* $\mathfrak{m} = (D, \mathcal{I})$ *ein Modell. Die Semantik eines Terms soll ein Wert der Domäne* D *sein und wird wie folgt induktiv definiert.*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}[\![x]\!](\mathcal{V}) & = & \mathcal{V}(x) \\ \mathcal{I}[\![f^k(\theta_1, \ldots, \theta_k)]\!](\mathcal{V}) & = & \hat{f}^k(\mathcal{I}[\![\theta_1]\!](\mathcal{V}), \ldots, \mathcal{I}[\![\theta_k]\!](\mathcal{V})) \end{array}$$

Definition 2.1.4 (Semantik von Formeln) *Sei wiederum* $\mathfrak{m} = (D, \mathcal{I})$ *ein Modell. Die Semantik einer Formel ist dann ein Wert aus der Menge* $\{true, false\}$ *und ist ähnlich wie die Semantik der Terme induktiv definiert.*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}[\![\bot]\!](\mathcal{V}) & = & false \\ \mathcal{I}[\![p^k(\theta_1, \ldots, \theta_k)]\!](\mathcal{V}) & = & \hat{p}^k(\mathcal{I}[\![\theta_1]\!](\mathcal{V}), \ldots, \mathcal{I}[\![\theta_k]\!](\mathcal{V})) \\ \mathcal{I}[\![\neg\phi]\!](\mathcal{V}) = true & gdw. & \mathcal{I}[\![\phi]\!](\mathcal{V}) = false \\ \mathcal{I}[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!](\mathcal{V}) = true & gdw. & \mathcal{I}[\![\phi_1]\!](\mathcal{V}) = true \quad und \quad \mathcal{I}[\![\phi_2]\!](\mathcal{V}) = true \\ \mathcal{I}[\![\forall x\colon \phi]\!](\mathcal{V}) = true & gdw. & für\ alle\ x \in D\ gilt\ \mathcal{I}[\![\phi]\!](\mathcal{V}[x \to d]) = true \end{array}$$

2.2 Intervall-Logik

Die hier vorgestellte Version der temporalen Intervall-Logik erster Stufe (ITL) wurde aus [Dut95] übernommen, und wird im Folgenden nur als Intervall-Logik oder ITL bezeichnet. Die Sprache der Intervall-Logik besteht wie die Sprache der Prädikatenlogik aus k-stelligen Funktions- und Prädikatssymbolen, wobei 0-stellige Funktionen als Konstanten und 0-stellige Prädikate als Aussagen bezeichnet werden. Im Gegensatz zur Prädikatenlogik, bei der die Gültigkeit einer Formel nur vom betrachteten Modell abhängt, werden die Formeln der ITL innerhalb eines Modells auf verschiedenen Welten, den Intervallen, interpretiert. Das bedeutet, dass ein Modell wie in der Modallogik mehrere solcher Welten zur Verfügung stellt, die miteinander über eine Relation in Verbindung stehen.

Hierdurch ist es möglich, zwischen flexiblen und starren Funktions- und Prädikatssymbolen zu unterscheiden. Die Interpretation starrer Symbole ist auf allen Welten eines Modells gleich, wogegen der Wert eines flexiblen Symbols von der gerade betrachteten Welt abhängt. Ein typisches starres Prädikatssymbol ist $=$, welches wie üblich als die Gleichheitsrelation interpretiert wird. Mindestens ein flexibles Funktionssymbol ist immer in der Sprache von ITL vorhanden, das ℓ, das die Länge des gerade betrachteten Intervalls bezeichnet.

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi;\psi}$$

Abbildung 2.1: Semantik von $\phi;\psi$

Eine weitere Besonderheit der Intervall-Logik ist die 2-stellige sogenannte *Chop*-Modalität, die mit ";" bezeichnet wird. Eine Formel der Form $\phi;\psi$ gilt, wenn sich das betrachtete Intervall so aufteilen (*to chop*) lässt, dass auf dem vorderen Teil ϕ und auf dem hinteren Teil ψ gilt (siehe Abbildung 2.1). Konkret werden Terme der ITL durch die folgende Syntax beschrieben:

$$\theta ::= x \mid f^k(\theta_1, \ldots, \theta_k) \mid \ell,$$

wobei x eine globale Variable, f^k ein k-Funktionssymbol und ℓ die erwähnte flexible Konstante für die Länge des betrachteten Intervalls ist. Die Syntax von Formeln ϕ ist analog zur Prädikatenlogik mit dem Chop-Operator als Zusatz definiert:

$$\phi ::= p^k(\theta_1, \ldots, \theta_k) \mid \bot \mid \neg\phi_1 \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \forall x\colon \phi_1 \mid \phi_1;\phi_2$$

In ITL werden Formeln wie in der Prädikatenlogik auf Modellen interpretiert. Diese unterscheiden sich jedoch insofern, als dass sie noch eine Menge an Welten W und eine ternäre Erreichbarkeitsrelation R enthalten. Solche Modelle werden in der Modallogik als *mögliche-Welten-Semantik* bezeichnet.

Definition 2.2.1 (Modell der ITL) *Sei T eine nicht-leere Menge, die durch die Relation $\leq$ vollständig geordnet wird. Ein Modell der Intervall-Logik über T ist ein Tupel $\mathfrak{m} = (W, R, D, \mathcal{I})$, wobei*

- $W = \{[b, e] \mid b, e \in T, b \leq e\}$ *eine Menge von Intervallen,*
- $R = \{([b, m], [m, e], [b, e]) \mid [b, m], [m, e], [b, e] \in W\}$ *die Erreichbarkeitsrelation,*
- D *eine nicht-leere Menge ist*
- *und* $\mathcal{I}$ *eine Abbildung ist, die in Abhängigkeit von einem Intervall* $[b, e]$ *einem Funktionssymbol* f^k *eine* k*-stellige Abbildung*

  $$\mathcal{I}(f^k)([b, e]) = \hat{f}^k \in D^k \to D$$

  und einem k*-stelligem Prädikat* p^k *eine Abbildung*

  $$\mathcal{I}(p^k)([b, e]) = \hat{p}^k \in D^k \to \{true, false\}$$

  zuordnet. Weiterhin muss $\mathcal{I}$ *starre Symbole auf jedem Intervall auf die selbe Funktion abbilden. Als letzte Bedingung muss die* eindeutige Zerlegung *erfüllt sein, d.h. wenn* $([b, m], [m, e], [b, e]) \in R$ *und* $([b, m'], [m', e], [b, e]) \in R$ *und*

  - *wenn* $\mathcal{I}(\ell)([b, m]) = \mathcal{I}(\ell)([b, m'])$ *dann* $m = m'$
  - *wenn* $\mathcal{I}(\ell)([m, e]) = \mathcal{I}(\ell)([m', e])$ *dann* $m = m'$

Belegungen sind wie in der Prädikatenlogik definiert (2.1.2), das heißt im Besonderen, dass Variablen auf jeder Welt gleich belegt werden.

Definition 2.2.2 (Semantik von Termen der ITL) *Sei* $\mathfrak{m} = (W, R, D, \mathcal{I})$ *ein Modell der ITL. Die Semantik eines Terms ist dann analog zur Prädikatenlogik induktiv definiert, mit dem Zusatz*

$$\mathcal{I}[\![\ell]\!](\mathcal{V}, [b, e]) \quad = \quad \mathcal{I}(\ell)([b, e]).$$

Definition 2.2.3 (Semantik von Formeln der ITL) *Sei* $\mathfrak{m} = (W, R, D, \mathcal{I})$ *ein Modell der ITL. Die Semantik einer Formel ist wie in der Prädikatenlogik definiert, mit der zusätzlichen Definition der Semantik des Chop-Operators:*

$\mathcal{I}[\![\phi; \psi]\!](\mathcal{V}, [b, e]) = true$ *gdw. es gibt ein* $m \in T$, *so dass* $([b, m], [m, e], [b, e]) \in R$ *und*
$\mathcal{I}[\![\phi]\!](\mathcal{V}, [b, m]) = true$ *und* $\mathcal{I}[\![\psi]\!](\mathcal{V}, [m, e]) = true$

2.3 Duration Calculus

Der Duration Calculus [ZHR91, ZH04] ist eine Intervall-Logik, die auch Aussagen darüber erlaubt, wie lange ein System in einem gewissen Zustand verharrt. Dadurch lassen z.B. Maximaldauern für kritische Zustände definieren. Formal ist der Duration Calculus eine Erweiterung der ITL um flexible Konstanten der Form $\int\pi$, wobei π ein sogenannter Zustandsausdruck ist. Zustandsausdrücke basieren auf Zustandsvariablen $P, Q, \ldots$ und lassen sich mit der folgenden Syntax beschreiben:

$$\pi ::= 0 \mid 1 \mid P \mid \neg\pi \mid \pi_1 \vee \pi_2.$$

Formeln des DC werden auf Modellen $\mathfrak{m}$ der ITL über $\mathbb{R}$ interpretiert (der diskrete Fall des Duration Calculus wird hier nicht weiter betrachtet), deren Interpretation nur für den Fall der Konstanten der Form $\int\pi$ angepasst werden muss. Hierzu wird zuerst eine Interpretation J der Zustandvariablen P benötigt.

$$J(P) \in \mathbb{R} \to \{0, 1\}$$

Für die Existenz des Integrals über J wird gefordert, dass J endliche Variabilität besitzt, d.h. auf einem geschlossenen Intervall nur endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt. Diese Interpretation lässt sich nun auf Zustandsausdrücke erweitern:

$$\begin{aligned} J(0)(t) &= 0, \\ J(1)(t) &= 1, \\ J(\neg\pi) &= 1 - J(\pi)(t), \\ J(\pi_1 \vee \pi_2)(t) &= \max(J(\pi_1)(t), J(\pi_2)(t)). \end{aligned}$$

Ein Tupel $\mathfrak{m} = (W, R, D, \mathcal{I}_J)$ ist ein DC-Modell, wobei W, R und D wie für ein Modell der ITL definiert sind und die zugehörige Interpretation $\mathcal{I}$ der Interpretation eines ITL-Modells entspricht. Diese Interpretation muss nun noch für Konstanten der Form $\int\pi$ wie folgt erweitert werden:

$$\mathcal{I}(\textstyle\int\pi)([b, e]) = \int_b^e J(\pi)(t)dt.$$

Zu Bemerken ist hierbei, dass die einzigen flexiblen Funktionssymbole des DC die Länge des Intervalls ℓ und die Integrale über Zustandsausdrücke $\int\pi$ sind.

2.4 Shape Calculus

Der Shape Calculus [Sch06] ist eine Erweiterung des Duration Calculus um mehrere Dimensionen. Hierdurch wird es ermöglicht, nicht nur Aussagen über Realzeiteigenschaften, sondern auch über räumliche Eigenschaften eines Systems zu treffen. Die Anzahl der Dimensionen ist nicht beschränkt und wird im Folgenden mit n bezeichnet. Die Sprache des SC besteht wiederum aus k-stelligen Funktions- und Prädikatssymbolen, im Falle $k = 0$ wird von Konstanten und Aussagen gesprochen.

Der Shape Calculus wird wie der DC auf den Welten eines Modells interpretiert, jedoch bilden die Welten im Falle des SC keine eindimensionalen Intervalle, sondern mehrdimensionale Polyeder. Um pathologische und unrealistische Grenzfälle auszuschließen, werden außerdem nur *geschlossene* und *konvexe* Polyeder betrachtet.

Solche Polyeder können wieder mit einem Chop-Operator aufgeteilt werden, eine ebenso einfache Definition wie in ITL ist jedoch nicht möglich. So ist es wichtig, in welche Richtung ein Polyeder aufgeteilt wird. Deshalb wird der Chop-Operator mit einem Vektor $\vec{d}$ parametrisiert, so dass der Operator die Form $\langle\vec{d}\rangle$ besitzt. Die Bedeutung einer Formel $\phi\,\langle\vec{d}\rangle\,\psi$ ist in Abbildung 2.2 für ein zweidimensionales Polyeder dargestellt. Der Punkt $\vec{m}$ und der Vektor $\vec{d}$ definieren zusammen eindeutig eine Gerade (im mehrdimensionalen Fall entsprechend eine Hyperebene), die das Polyeder $\mathcal{M}$ so

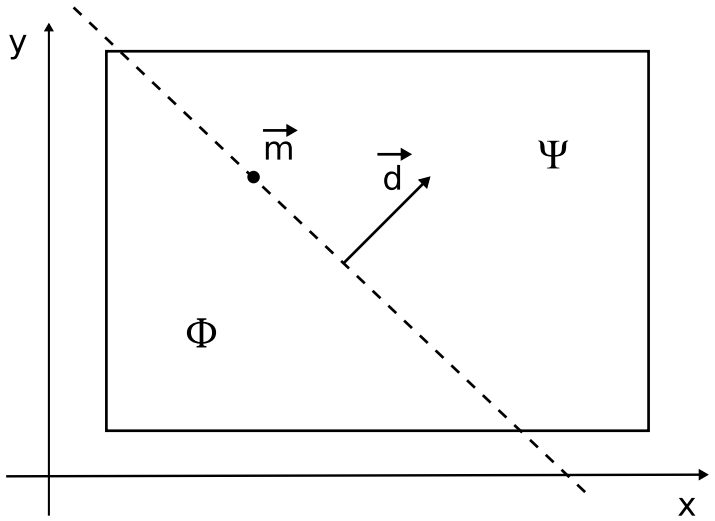

Abbildung 2.2: Semantik von $\phi \langle \vec{d} \rangle \psi$ auf dem Polyeder $\mathcal{M}$

aufteilt, dass auf dem Teilpolyeder "unter" der Geraden ϕ und auf dem anderen ψ gilt. Die Polyeder werden dabei mit $\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}$ für das "untere" Polyeder, $\mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}}$ für das "obere" Polyeder bezeichnet und sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} &= \{\vec{x} \in \mathcal{M} \mid \langle \vec{x} - \vec{m}, \vec{d} \rangle \leq 0\} \\ \mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} &= \{\vec{x} \in \mathcal{M} \mid \langle \vec{x} - \vec{m}, \vec{d} \rangle \geq 0\}. \end{aligned}$$

Der Operator $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet hierbei das Standardskalarprodukt des Vektorraums $\mathbb{R}^n$.

Als Erweiterung des Duration Calculus ist auch im SC die Integration über Zustandsausdrücke definiert. Damit lassen sich analog zum DC sowohl Aussagen über die Dauer, als auch über die räumliche Ausdehnung eines Zustandes treffen und auch die Veränderung der räumlichen Ausdehnung eines Zustands über den zeitlichen Verlauf, d.h. eine Bewegung, beschreiben. Auch die Länge eines Polyeders in eine Raumrichtung lässt sich durch ein weiteres flexibles Funktionssymbol $\ell_{\vec{d}}$ angeben.

Die Syntax der Zustandsausdrücke π entspricht der des DC, die der Terme θ wird um $\ell_{\vec{d}}$ ergänzt, und bei der Syntax der Formeln ϕ wird der Chop-Operator ersetzt.

$$\pi ::= 0 \mid 1 \mid P \mid \neg\pi \mid \pi_1 \vee \pi_2$$

$$\theta ::= x \mid f^k(\theta_1, \ldots, \theta_k) \mid \ell \mid \ell_{\vec{d}} \mid \int \pi$$

$$\phi ::= p^k(\theta_1, \ldots, \theta_k) \mid \bot \mid \neg\phi_1 \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \forall x \colon \phi_1 \mid \phi_1 \langle \vec{d} \rangle \phi_2$$

Zu beachten ist, dass der Term θ_s starr sein muss. Die weiteren Operatoren und der Existenzquantor lassen sich als Abkürzungen auffassen.

Analog zu ITL wird nun das Konzept eines Modells definiert. Diese Modelle basieren wieder auf Welten W. Die Erreichbarkeitsrelation aus der Intervall-Logik reicht nun jedoch nicht mehr aus, da für jedes Polyeder mehrere Relationen $R_{\vec{d}}$ definiert werden müssen, die jeweils die Erreichbarkeit in einer Raumrichtung $\vec{d}$ ausdrücken.

Definition 2.4.1 (Modell des Shape Calculus) *Sei $\mathbb{P}^n$ die Menge der geschlossenen, konvexen Polyeder über $\mathbb{R}$ und $\mathcal{M} \in \mathbb{P}^n$. Dann ist ein Modell des Shape Calculus $\mathfrak{m} = (W, R, D, \mathcal{I})$, wobei W als die Menge der Welten, R als Familie der Erreichbarkeitsrelationen $R_{\vec{d}}$, D als Domäne und $\mathcal{I}$ als Interpretation bezeichnet wird. Für diese gilt*

- $W = \mathbb{P}^n$,
- $R = \{R_{\vec{d}} \mid \vec{d} \in \mathbb{R}^n\}$,
- $R_{\vec{d}} = \{(\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}, \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}}, \mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \in \mathbb{P}^n, \vec{m} \in \mathcal{M}\}$ *und*
- $D = \mathbb{R}$.

Die Interpretation $\mathcal{I}$ ist eine Abbildung, die jedem Funktionssymbol f^k eine entsprechende Abbildung

$$\mathcal{I}(f^k)(\mathcal{M}) = \hat{f}^k \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

und jedem Prädikatssymbol p^k eine Abbildung

$$\mathcal{I}(p^k)(\mathcal{M}) = \hat{p}^k \in \mathbb{R}^k \to \{true, false\}$$

zuordnet. Weiterhin ordnet die Interpretation jeder Zustandsvariable P an einem Punkt $\vec{x}$ einen Wert aus $\{0, 1\}$ zu.

$$\mathcal{I}(P)(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$$

Die Interpretation lässt sich nun wie in den vorherigen Fällen auf Zustandsausdrücke, Terme und Formeln erweitern. Zustandsausdrücke werden für jeden Punkt $\vec{x}$ auf einen der Werte aus $\{0, 1\}$ wie folgt abgebildet.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[\![P]\!](\vec{x}) &= \mathcal{I}(P)(\vec{x}) \\ \mathcal{I}[\![\neg\pi]\!](\vec{x}) &= 1 - \mathcal{I}[\![\pi]\!](\vec{x}) \\ \mathcal{I}[\![\pi_1 \vee \pi_2]\!](\vec{x}) &= \max(\mathcal{I}[\![\pi_1]\!](\vec{x}), \mathcal{I}[\![\pi_2]\!](\vec{x})) \end{aligned}$$

Terme und Formeln werden auf Polyedern, unter Beachtung einer Belegung interpretiert. Die Definition einer Belegung ist dabei analog zur Prädikatenlogik, d.h. den Variablen wird unabhängig vom betrachteten Polyeder ein Wert zugeordnet. Auch die Interpretation der Booleschen Operatoren ist wie in der Prädikatenlogik und damit wie im Duration Calculus definiert, Aufmerksamkeit verlangen hingegen die Integration über Zustandsausdrücke und der Chop-Operator.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[\![\textstyle\int\pi]\!](\mathcal{V}, \mathcal{M}) &= \displaystyle\int_{\mathcal{M}} \mathcal{I}[\![\pi]\!](\vec{x}) d\vec{x} \\ \mathcal{I}[\![\phi \langle\vec{d}\rangle \psi]\!](\mathcal{V}, \mathcal{M}) &= \text{true} \\ &\quad \text{gdw.es gibt ein } \vec{m} \in \mathcal{M}, \text{ so dass} \\ &\quad \mathcal{I}[\![\phi]\!](\mathcal{V}, \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}) = \text{true und} \\ &\quad \mathcal{I}[\![\psi]\!](\mathcal{V}, \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}}) = \text{true} \end{aligned}$$

2.5 Natürliches Schließen

Das natürliche Schließen, wie in [vD04] beschrieben, ist ein Beweissystem, welches entwickelt wurde, um dem Denken und logischen Schließen eines menschlichen Mathematikers möglichst nahe zu kommen. In einem Kalkül des natürlichen Schließens sind nur Schlussregeln der Form

$$\frac{A_1 \dots A_n}{B}$$

vorhanden, wobei alle A_i und B Formeln der betrachteten Logik sind. Auch die notwendigen Axiome werden als Beweisregeln ohne Prämissen, d.h. in der Form

$$\frac{}{B}$$

angegeben. Innerhalb des natürlichen Schließens ist für jeden Operator eine Introduktionsregel und eine Eliminationsregel vorhanden, um den entsprechenden Operator in eine Formel einzufügen, beziehungsweise um ihn zu entfernen. Das Ziel des Verfahrens ist, aus einer Menge von Annahmen, die getroffen werden, d.h. Formeln, deren Gültigkeit vorausgesetzt wird, eine wiederum gültige Formel abzuleiten. Durch Anwendung mancher Regeln können Annahmen aus dieser Menge entfernt werden, was in einer Regel durch Einklammerung dieser Annahmen kenntlich gemacht wird. Die im Anschluss vorgestellte und erläuterte Implikations-Introduktion ist eine solche Regel.

Aussagenlogik

Die Beweisregeln des Kalküls für Aussagenlogik sind strukturell einfach.

$$\wedge\mathrm{I}\,\frac{F \quad G}{F \wedge G} \qquad \wedge\mathrm{E}\,\frac{F \wedge G}{F} \qquad \wedge\mathrm{E}\,\frac{F \wedge G}{G}$$

$$\neg\mathrm{I}\,\frac{\begin{array}{c}[F]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg F} \qquad \frac{F \quad \neg F}{\bot}\,\neg\mathrm{E}$$

$$\rightarrow\mathrm{I}\,\frac{\begin{array}{c}[F]\\ \vdots \\ G\end{array}}{F \rightarrow G} \qquad \frac{F \quad F \rightarrow G}{G}\,\rightarrow\mathrm{E}$$

$$\vee\mathrm{I}\,\frac{F}{F \vee G} \qquad \vee\mathrm{I}\,\frac{G}{F \vee G} \qquad \frac{F \vee G \quad \begin{array}{c}[F]\\ \vdots \\ H\end{array} \quad \begin{array}{c}[G]\\ \vdots \\ H\end{array}}{H}\,\vee\mathrm{E}$$

$$\frac{\begin{array}{cc}[F] & [G] \\ \vdots & \vdots \\ G & F\end{array}}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow \mathrm{I} \qquad \frac{F \qquad F \leftrightarrow G}{G} \leftrightarrow \mathrm{E} \qquad \frac{G \qquad F \leftrightarrow G}{F} \leftrightarrow \mathrm{E}$$

$$\frac{\bot}{F} \bot \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg F] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{F} \mathrm{RAA}$$

Die meisten Regeln des Systems sind intuitiv verständlich. So ist es einleuchtend, dass, falls $F \wedge G$ gilt, auch F gelten muss ($\wedge$E). Etwas Erklärung benötigen Regeln wie die Implikations-Introduktion. Ist es möglich, aus der Gültigkeit der Formel F über beliebig viele Ableitungschritte die Gültigkeit der Formel G herzuleiten, dann ist natürlich auch $F \rightarrow G$ gültig, ohne dass die Annahme, dass F gilt weiterhin notwendig ist. Im Falle der Oder-Elimination $\vee$E wird angenommen, dass eine Formel H sowohl aus einer Formel F, als auch aus G abgeleitet werden kann. Dann ist es einsichtig, dass die Annahmen F und G entfernt und durch die Annahme von $F \vee G$ ersetzt werden können. Die ähnlichen Regeln $\neg$I, $\leftrightarrow$ I und RAA sind analog zu erklären.

Zu beachten ist, dass nur die Regeln für die Operatoren einer logisch vollständigen Operatormenge, sowie RAA für ein vollständiges Kalkül des natürlichen Schließens für die Aussagenlogik notwendig sind.

Prädikatenlogik

Da die Prädikatenlogik eine Erweiterung der Aussagenlogik ist, ist auch das Kalkül des natürlichen Schließens für Prädikatenlogik eine Erweiterung des Kalküls für Aussagenlogik. Es enthält alle im vorherigen Abschnitt dargestellten Regeln und zusätzlich die folgenden.

$$\frac{\phi}{(\forall x)\phi} \forall \mathrm{I} \qquad \frac{(\forall x)\phi}{\phi[x \rightarrow s]} \forall \mathrm{E}$$

$$\frac{\phi[x \rightarrow s]}{(\exists x)\phi} \exists \mathrm{I} \qquad \frac{(\exists x)\phi \qquad \begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\psi} \exists \mathrm{E}$$

Hierbei besitzt die Regel $\forall$I die Nebenbedingung, dass x in keiner Annahme, von der ϕ abhängt, frei vorkommen darf. Die Anwendungsbedingung der Regel $\exists$E ist, dass x weder in ψ, noch in einer Annahme, von der ψ abhängt, vorkommen darf.

2.6 Natürliches Schließen für nicht-klassische Logiken

Das Prinzip des natürlichen Schließens für klassische Logiken ist sehr gut erforscht. In [BMV96] wurde jedoch dargestellt, das sich dieses Beweisverfahren schlecht auf nicht-

klassiche Logiken wie Modallogiken und damit auch Intervall-Logik anwenden lässt. Die Lösung, die in [BMV96] gefunden wurde, ist eine Kombination des natürlichen Schließens mit dem von Gabbay vorgestellten Prinzip der *Labelled Deductive Systems* (LDS) [Gab96].

Das Prinzip der LDS ist als allgemeines System konzipiert um verschiedenste Arten von Logiken zu beschreiben. Im Gegensatz zum klassischen Ansatz sind die Grundelemente eines LDS keine Formeln F, sondern *beschriftete Formeln* $t\colon F$. Die Besonderheit dieses Ansatzes ist, dass die Formel F und ihre Beschriftung t aus unterschiedlichen Sprachen stammen, und damit verschiedenen semantischen Regeln folgen. Die Sprache der Formel F ist die Logik, die betrachtet werden soll, die Sprache, aus der t stammt, fügt den Formeln beliebige Informationen hinzu und wird als *Beschriftungssprache* bezeichnet [Gab96].

Der Ansatz, der in [BMV96] und auch in der vorliegenden Arbeit verfolgt wird, wählt als Beschriftungen der Formeln die Welten, auf denen diese interpretiert werden sollen. Das bedeutet, dass die Form der Beschriftungssprache durch die Erreichbarkeitsrelation R zwischen den Welten bestimmt wird, die Sprache der Formeln ist damit die Syntax des Shape Calculus.

Der Vorteil dieses Ansatzes ist, dass ein Großteil der bekannten Regeln des natürlichen Schließens für Aussagen- und Prädikatenlogik übernommen und mit Beschriftungen versehen werden kann. Bei der Und-Introduktion $\wedge$I zum Beispiel werden alle Formeln mit derselben Beschriftung versehen, ansonsten wird die Regel nicht verändert.

$$\frac{\mathcal{M}\colon \phi \qquad \mathcal{M}\colon \psi}{\mathcal{M}\colon \phi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{I}'$$

Probleme können sich bei den Regeln ergeben, die $\bot$ betreffen, bzw. beinhalten. So ist es notwendig zu betrachten, ob ein Widerspruch nur lokal auf einer Welt existiert, oder ob er sich auf alle erreichbaren Welten verbreitet. Im Falle des Shape Calculus wird die letztere Möglichkeit gewählt, da die von einem Polyeder $\mathcal{M}$ aus erreichbaren Welten wiederum Teilpolyeder von $\mathcal{M}$ darstellen. Die Regel RAA wird dann wie folgt angegeben.

$$\frac{\begin{array}{c}[\mathcal{M}\colon \neg\phi] \\ \vdots \\ \mathcal{M}'\colon \bot\end{array}}{\mathcal{M}\colon \phi}\,\mathrm{RAA}'$$

Weiterhin können sich für die Anwendung einer Regel zusätzliche Nebenbedingungen für die Beschriftungen ergeben. Für ein Beispiel sei hier auf Abschnitt 4 verwiesen.

3 Eine mehrdimensionale Polyeder-Logik (MPL)

Die im Folgenden vorgestellte mehrdimensionale Polyeder-Logik (MPL) ist im Wesentlichen eine Modal-Logik, die den Chop-Operator als einzige Modalität, starre Variablen, deren Werte durch Belegungen definiert werden, Quantoren und die Gleichheitsrelation enthält. Weiterhin wird auch zwischen *starren* (engl. rigid) und *flexiblen* (engl. flexible) Prädikats- und Funktionssymbolen unterschieden. Die Interpretation eines starren Symbols ist, im Gegensatz zur Interpretation flexibler Symbole, unabhängig von der gerade betrachteten Welt. Das Prädikat $=$ ist genauso wie die Funktionssymbole $0, +, -$ starr, die Funktionssymbole ℓ und $\ell_{\vec{d}}$ hingegen sind flexibel.

3.1 Syntax

Die Syntax von Termen ist analog zu SIL [Ras02] als

$$\theta ::= x \mid f(\theta_1, ..., \theta_k) \mid \ell \mid \ell_{\vec{d}}$$

definiert, die von Formeln als

$$F ::= p(\theta_1, ..., \theta_k) \mid \neg F_1 \mid F_1 \wedge F_2 \mid \exists x : F_1 \mid F_1 \langle \vec{d} \rangle F_2,$$

wobei x eine starre Variable ist. Die weiteren Booleschen Konnektoren wie z.B. $\rightarrow$ lassen sich wie üblich als Abkürzungen definieren.

3.2 Semantik

Um die Semantik von MPL anzugeben, müssen erst einige Begriffe definiert werden. Die Modelle, auf denen MPL interpretiert werden soll, werden von Mengen von Polyedern gebildet. Diese Polyeder sind mit einer Erreichbarkeitsrelation verbunden, die das Aufteilen der Polyeder mit dem Chop-Operator nachbildet.

Definition 3.2.1 (Polyeder-Rahmen) *Sei $(T, +, \cdot, \leq)$ ein total geordneter Körper, so dass T^n einen Vektorraum bildet, auf dem mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt definiert ist. Weiterhin sei T topologisch dicht in sich, d.h. für beliebige $s < t$ $(s, t \in T)$ gibt es ein $u \in T$, so dass $s < u < t$. Dann ist ein Polyeder-Rahmen ein Tupel (W, R), das aus einer Menge von Welten W und einer Familie R dreistelliger Erreichbarkeitsrelationen $R_{\vec{d}}$ gebildet wird, so dass*

- $W = \mathbb{P}^n$,

- $R = \{R_{\vec{d}} \mid \vec{d} \in T^n\}$,
- $R_{\vec{d}} = \{(\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}, \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}}, \mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \in \mathbb{P}^n, \vec{m} \in T^n\}$,

mit $\mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} = \{\vec{x} \in \mathcal{M} \mid \langle \vec{x} - \vec{m}, \vec{d}\rangle \geq 0\}$ *und* $\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} = \{\vec{x} \in \mathcal{M} \mid \langle \vec{x} - \vec{m}, \vec{d}\rangle \leq 0\}$ *[Sch06], wobei* $\mathbb{P}^n$ *die Menge aller begrenzten, geschlossenen und konvexen Polyedern in* T^n *bezeichnet.*

Die totale Ordnung auf dem Körper T ist notwendig, da ein Polyeder normalerweise durch eine Menge von Ungleichungen der Form $\langle \vec{x} - \vec{m}, \vec{d}\rangle \leq 0$ definiert wird. Ohne eine solche Ordnung wäre nicht zu bestimmen, welche Punkte des Raumes innerhalb eines Polyeders liegen.

In MPL soll es möglich sein, Aussagen über das Volumen und auch die Länge eines Polyeders zu treffen. Hierzu muss es möglich sein, ein mehrdimensionales Polyeder auf eine Dimension zu reduzieren.

Definition 3.2.2 (Projektion eines Polyeders auf eine Gerade) *Sei* $\mathcal{M} \in \mathbb{P}^n$ *ein geschlossenes, konvexes Polyeder und* $\vec{d} \in T^n$ *ein Vektor, dann wird*

$$\mathcal{M} \times \vec{d}^T = \{\vec{x} \times \vec{d}^T \mid \vec{x} \in \mathcal{M}\}$$

als die Projektion des Polyeders auf eine Gerade parallel zum Vektor $\vec{d}$ *bezeichnet. Als Abkürzung wird im Folgenden auch* Projektion des Polyeders auf $\vec{d}$ *genutzt.*

Zu beachten ist, dass diese Projektion ein Intervall ergibt, d.h. es gilt $\mathcal{M} \times \vec{d}^T \subseteq T \times T$, da die betrachteten Polyeder geschlossen und konvex sind.

Nun lässt sich angeben, wie ein Maß für das Volumen und die Länge eines Polyders definiert werden kann, beziehungsweise, welche Eigenschaften solche Maße erfüllen müssen.

Definition 3.2.3 (Raummaß) *Sei ein Polyeder-Rahmen* (W, R) *über* T *gegeben, dann muss ein einfaches Maß auf* $T \times T$ *die folgenden Eigenschaften erfüllen* $(i, j, k, i_n, j_n \in T)$*:*

$$M1: \quad \begin{array}{c} \text{Wenn } m(i, j_1) = m(i, j_2), \text{ dann } j_1 = j_2 \\ \text{Wenn } m(i_1, j) = m(i_2, j), \text{ dann } i_1 = i_2 \end{array} \tag{3.1}$$

$$M2: \quad m(i, i) = 0 \tag{3.2}$$

$$M3: \quad m(i, k) + m(k, j) = m(i, j) \tag{3.3}$$

$$M4: \quad m(i, j) = a + b \quad \text{gdw.} \quad m(i, k) = a \text{ und } m(k, j) = b \text{ für ein } k \in [i, j] \tag{3.4}$$

Da die Eigenschaften dieses einfachen Maßes aus [Ras02] übernommen wurden, wird es im Folgenden als m_{SIL} *bezeichnet. Dann ist das gerichtete Längenmaß* m_r *wie folgt definiert:*

$$m_r: \begin{cases} W \times T^n \to D \\ m_r(\mathcal{M}, \vec{d}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathcal{M} = \emptyset \\ m_{SIL}(\min(\mathcal{M} \times \vec{d}^T), \max(\mathcal{M} \times \vec{d}^T)) & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

Nun lässt sich definieren, welche Eigenschaften ein Maß für den gesamten Raum erfüllen muss.

$$
\begin{array}{ll}
\textit{RM1:} & m(\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}_1}) = m(\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}_2}) \Rightarrow \langle \vec{m}_1 - \vec{m}_2, \vec{d} \rangle = 0 \\
 & m(\mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}_1}) = m(\mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}_2}) \Rightarrow \langle \vec{m}_1 - \vec{m}_2, \vec{d} \rangle = 0 \\
\textit{RM2:} & \exists \vec{d} : m_r(\mathcal{M}, \vec{d}) = 0 \Rightarrow m(\mathcal{M}) = 0, \ \textit{wobei } \vec{d} \in T^n \textit{ und } \vec{d} \neq \vec{0} \\
\textit{RM3:} & m(\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}) + m(\mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}}) = m(\mathcal{M}) \\
\textit{RM4:} & m(\mathcal{M}) = a + b \textit{ gdw. für ein beliebigies } \vec{d} \in T^n \textit{ gilt:} \\
 & m(\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}) = a \textit{ und } m(\mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}}) = b \\
\textit{RM5:} & m(\mathcal{M}\lceil_{-\vec{d})}^{\vec{m}}) = m(\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}) \\
 & m(\mathcal{M}\lfloor_{-\vec{d}}^{\vec{m}}) = m(\mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}})
\end{array}
$$

RM1 beschreibt, dass ein Polyeder eindeutig zerteilt wird, d.h. wenn das Maß auf einem der Teilpolyeder bei zwei Zerlegungen gleich ist, dann teilen beide Zerlegungen das Gesamtpolyeder gleich auf. RM2 sagt aus, dass ein Polyeder, dass in eine Raumrichtung keine Ausdehnung besitzt, auch kein Volumen umschließt. Die Additivität der Maße auf den Teilpolyedern eines Gesamtpolyeders wird durch RM3 und RM4 definiert. Letztlich wird durch RM5 festgelegt, dass ein Vektor und sein Inverses mit einem bestimmten Punkt $\vec{m}$ dieselbe Hyperebene definieren, und damit das Polyeder auf die selbe Weise teilen.

Die drei Maße m_{SIL}, m_r und m unterscheiden sich sowohl in ihrem Auftreten innerhalb von Formeln, sowie in ihrem Definitionsbereich. Das einfache Maß m_{SIL} ist auf Intervallen aus $T \times T$ definiert, und wird innerhalb von Formeln nicht auftauchen, da es nur zur Definition des gerichteten Längenmaßes m_r benötigt wird. Dieses $m_r(\mathcal{M}, \vec{d})$ hingegen entspricht dem Term $\ell_{\vec{d}}$ des Shape Calculus, da es genau die Länge des untersuchten Polyeders in Richtung $\vec{d}$ angibt. Ebenso entspricht das Raummaß m dem Volumen des Polyeders, im Shape Calculus ausgedrückt durch den Term ℓ. Damit ist die Definition eines Modells für MPL, und damit für die Semantik von MPL möglich.

Definition 3.2.4 (Polyeder-Modell) *Ein Polyeder-Modell ist ein Modell $(W, R, D, \mathcal{I})$, dass auf einem Polyeder-Rahmen basiert, dessen Domäne D ein total geordneter Körper $(D, +, \cdot, -, 0, \leq)$ ist. Die Interpretation $\mathcal{I}$ ist eine Abbildung, die jedem k-stelligen Funktionssymbol f^k eine Abbildung*

$$\mathcal{I}(f^k)(\mathcal{M}) = \hat{f}^k \in D^k \to D$$

und jedem Prädikatssymbol p^k eine entsprechende Abbildung

$$\mathcal{I}(p^k)(\mathcal{M}) = \hat{p}^k \in D^k \to \{true, false\}$$

zuordnet.

Im Folgenden wird für jedes Modell, das betrachtet wird, angenommen, dass es ein Polyeder-Modell ist. Es gibt Modelle, deren spatio-temporale Domäne T die oben genannten Eigenschaften besitzt. Z.B. für Modelle, die auf den reellen Zahlen basieren, d.h. $T = \mathbb{R}$ gilt dies, da die reellen Zahlen mit der Addition und der Multiplikation einen Körper bilden. Der diskrete Fall wird hier nicht weiter betrachetet. Ein geeignetes Raummaß wird in Abschnitt 5 dargestellt.

Semantik von Termen

Variablen der Logik werden durch Belegungen $\mathcal{V}$: Var $\to D$ (Var bezeichnet die Menge aller Variablen) auf Werte der Domäne abgebildet. Die Interpretation $\mathcal{I}$ eines Terms ist damit eine Funktion des Typs Val $\times \mathbb{P}^n \to D$, die induktiv über die Syntax der Terme definiert wird, wobei Val die Menge aller Belegungen bezeichnet.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}[\![x]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) &= \mathcal{V}(x)\\
\mathcal{I}[\![f(\theta_1,\ldots,\theta_k)]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) &= \hat{f}\left(\mathcal{I}[\![\theta_1]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}),\ldots,\mathcal{I}[\![\theta_k]\!](\mathcal{V},\mathcal{M})\right)\\
\mathcal{I}[\![\ell]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) &= m(\mathcal{M})\\
\mathcal{I}[\![\ell_{\vec{d}}]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) &= m_r(\mathcal{M},\vec{d})\\
\mathcal{I}[\![0]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) &= 0\\
\mathcal{I}[\![\theta_1+\theta_2]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) &= \mathcal{I}[\![\theta_1]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) \;+\; \mathcal{I}[\![\theta_2]\!](\mathcal{V},\mathcal{M})\\
\mathcal{I}[\![\theta_1\cdot\theta_2]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) &= \mathcal{I}[\![\theta_1]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) \;\cdot\; \mathcal{I}[\![\theta_2]\!](\mathcal{V},\mathcal{M})\\
\mathcal{I}[\![-\theta]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) &= -\,\mathcal{I}[\![\theta]\!](\mathcal{V},\mathcal{M})
\end{aligned}$$

mit $\mathcal{M} \in \mathbb{P}^n$, $\mathcal{V} \in$ Val. Weiterhin bildet die Interpretation die Symbole $\ell, \ell_{\vec{d}}, +, \cdot, -, 0$ wie in Definition 3.2.4 angegeben ab.

Semantik von Formeln

Die Semantik der Formeln der MPL lässt sich analog zur Semantik der Formeln des DC wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}[\![p(\theta_1,\ldots,\theta_k)]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) &= \hat{p}(\mathcal{I}[\![\theta_1]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}),\ldots,\mathcal{I}[\![\theta_k]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}))\\
\mathcal{I}[\![\neg F_1]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) &= \textit{true} \text{ gdw. } \mathcal{I}[\![F_1]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) = \textit{false}\\
\mathcal{I}[\![F_1 \wedge F_2]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) &= \textit{true} \text{ gdw. } \mathcal{I}[\![F_1]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) = \textit{true} \text{ und } \mathcal{I}[\![F_2]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) = \textit{true}\\
\mathcal{I}[\![F_1 \langle\vec{d}\rangle F_2]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) &= \textit{true} \text{ gdw. es gibt ein } \vec{m} \in T^n, \text{ so dass}\\
&\quad \mathcal{I}[\![F_1]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}\downarrow_{\vec{d}}^{\vec{m}}) = \textit{true} \text{ und}\\
&\quad \mathcal{I}[\![F_2]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}\uparrow_{\vec{d}}^{\vec{m}}) = \textit{true}\\
\mathcal{I}[\![\theta_1 \le \theta_2]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) &= \mathcal{I}[\![\theta_1]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) \;\le\; \mathcal{I}[\![\theta_2]\!](\mathcal{V},\mathcal{M})
\end{aligned}$$

Weiterhin wird $\le$ wie üblich als die "kleiner-gleich"-Relation interpretiert.

Definition 3.2.5 (Erfüllbarkeitsrelation) *Eine Interpretation $\mathcal{I}$, eine Belegung $\mathcal{V}$ und ein Polyeder $\mathcal{M}$* erfüllen *eine Formel F, geschrieben*

$$\mathcal{I},\mathcal{V},\mathcal{M} \models F$$

genau dann, wenn $\mathcal{I}[\![F]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) = \textit{true}$. Auch für Mengen von Formeln $\mathcal{A}$ lässt sich definieren, ob sie von $\mathcal{I}$, $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ erfüllt wird.

$$\mathcal{I},\mathcal{V},\mathcal{M} \models \mathcal{A} \quad \textit{gdw.} \quad \mathcal{I}[\![F]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) = \textit{true für alle } F \in \mathcal{A}$$

Beschriftete Formeln

Um das Natürliche Schließen auf eine Modal-Logik wie MPL anwenden zu können, ist es notwendig, die einzelnen Formeln mit Informationen über die gerade betrachtete Welt zu erweitern [BMV96]. Dies wird durch eine Beschriftung mit einem Polyeder erreicht, auf welchem die Formel interpretiert wird. Das Polyeder wird von der Formel durch einen Doppelpunkt abgetrennt, so dass beschriftete Formeln die Form $\mathcal{M}\colon F$ besitzen. Ein Problem, das sich bei dieser Beschriftung ergibt, tritt bei abgetrennten Teilpolyedern wie $\mathcal{M}\restriction_{\vec{d}}^{\vec{m}}$ auf. Die bis jetzt definierten Belegungen weisen dem Punkt $\vec{m}$ keine Werte zu, da solche Punkte nicht innerhalb der Syntax von MPL angegeben werden können. Für einen Punkt $\vec{m}$ gilt damit $\vec{m} \notin \mathrm{Var}$. Man kann diese Punkte als Metainformationen über die Polyeder ansehen, weshalb deren Menge mit $\mathrm{Var}_{\mathcal{M}}$ bezeichnet wird.

In beschrifteten Formeln hingegen werden diese Punkte explizit aufgeführt, weshalb es notwendig ist, eine weitere Art der Belegung zu definieren, die im Folgenden als *Umgebungsbelegung* η (environment valuation) bezeichnet wird. Die Belegung η ist vom Typ $\mathrm{Var}_{\mathcal{M}} \to T^{p\times q}$. Aus praktischen Gründen wird η noch wie folgt auf Polyeder erweitert

$$\eta(\mathcal{M}) = \begin{cases} \mathcal{M}\restriction_{\vec{d}}^{\eta(\vec{m})} & \text{, falls } \mathcal{M} \text{ die Form } \mathcal{M}\restriction_{\vec{d}}^{\vec{m}} \text{ besitzt.} \\ \mathcal{M}\restriction_{\vec{d}}^{\eta(\vec{m})} & \text{, falls } \mathcal{M} \text{ die Form } \mathcal{M}\restriction_{\vec{d}}^{\vec{m}} \text{ besitzt.} \\ \mathcal{M} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 3.2.6 (Erfüllbarkeitsrelation für beschriftete Formeln) *Eine Interpretation $\mathcal{I}$, eine Belegung $\mathcal{V}$ und eine Umgebungsbelegung η erfüllen eine beschriftete Formel $\mathcal{M}\colon F$, genau dann, wenn $\mathcal{I}$ und $\mathcal{V}$ mit dem Polyeder $\eta(\mathcal{M})$ die Formel F erfüllen, geschrieben*

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\colon F \quad \textit{gdw.} \quad \mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta(\mathcal{M}) \models F.$$

Eine Definition für Mengen von beschrifteten Formeln $\mathcal{A}_l$ ergibt sich wie im Falle nichtbeschrifteter Formeln:

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{A}_l \quad \textit{gdw.} \quad \mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\colon F \textit{ für alle } \mathcal{M}\colon F \in \mathcal{A}_l.$$

Mit diesen Definitionen lassen sich Begriffe wie *Erfüllbarkeit* und *Allgemeingültigkeit* wie folgt angeben.

Definition 3.2.7 (Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit) *Eine Formel F heißt* erfüllbar*, wenn es eine Interpretation $\mathcal{I}$, eine Belegung $\mathcal{V}$ und ein Polyeder $\mathcal{M}$ gibt, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \mathcal{M} \models F$.*

Eine Formel heißt allgemeingültig*, wenn für alle Interpretationen $\mathcal{I}$, alle Belegungen $\mathcal{V}$ und alle Polyeder $\mathcal{M}$ gilt $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \mathcal{M} \models F$.*

Im Falle beschrifteter Formeln der Form $\mathcal{M}\colon F$ lassen sich die Begriffe analog definieren, wobei nur Aussagen über Interpretationen und Belegungen beachtet werden, da die speziellen Polyeder in den Formeln enthalten sind.

Definition 3.2.8 (logische Folgerung) *Eine Formel F wird als logische Folgerung aus einer Menge von Formeln $\mathcal{A}$ bezeichnet, falls für alle Interpretationen $\mathcal{I}$, Belegungen $\mathcal{V}$ und Polyeder $\mathcal{M}$ gilt, wenn $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \mathcal{M} \models G$ für alle $G \in \mathcal{A}$, dann auch $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \mathcal{M} \models F$, geschrieben als*

$$\mathcal{A} \models F$$

Im Falle beschrifteter Formeln wird der Begriff der logischen Folgerung für Interpretationen, Belegungen und Umgebungsbelegungen definiert, d.h. $\mathcal{M}\colon F$ ist logische Folgerung aus $\mathcal{A}_l$, wenn für alle Interpretationen $\mathcal{I}$, alle Belegungen $\mathcal{V}$ und alle Umgebungsbelegungen η gilt, wenn $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}'\colon G$ für alle $\mathcal{M}'\colon G \in \mathcal{A}_l$, dann auch $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\colon F$. Die Notation ist analog zum obigen Fall.

4 Natürliches Schließen für MPL

Das hier vorgestellte Beweissystem ist eine Instanz des natürlichen Schließens für Modallogiken, wie in [BMV96] vorgestellt. Es besteht aus modifizierten Regeln des natürlichen Schließens für Aussagenlogik, Prädikatenlogik erster Stufe mit der Gleichheitsrelation und Modallogik mit einer binären Modalität. Weiterhin sind in dem Kalkül Regeln für die Besonderheiten einer Intervalllogik [Ras02], beziehungsweise die entsprechend angepassten Regeln für eine raumbasierte Logik wie MPL enthalten.
Das Symbol $\vdash$ wird benutzt, um auszudrücken, dass eine syntaktische Ableitung der beschrifteten Formel $\mathcal{M}\colon F$ aus einer Menge beschrifteter Formeln $\mathcal{A}_l$ existiert, geschrieben

$$\mathcal{A}_l \vdash \mathcal{M}\colon F$$

Falls $\mathcal{A}_l = \emptyset$, notiert $\vdash \mathcal{M}\colon F$, wird $\mathcal{M}\colon F$ als *Theorem* bezeichnet.

Definition 4.0.9 (Korrektheit einer Regel) *Eine Regel des Beweissystems der Form*

$$\frac{\begin{array}{ccc}[\mathcal{B}_1] & & [\mathcal{B}_n] \\ \mathcal{M}_1\colon \phi_1 & \ldots & \mathcal{M}_n\colon \phi_n\end{array}}{\mathcal{M}'\colon \psi}$$

mit Nebenbedingung C wird als korrekt *bezeichnet, falls die Gültigkeit der Bedingung C und*

$$\mathcal{A}_1 \models \mathcal{M}_1\colon \phi_1 \qquad \ldots \qquad \mathcal{A}_n \models \mathcal{M}_n\colon \phi_n$$

immer impliziert, dass

$$\mathcal{A}_1 \backslash \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_n \backslash \mathcal{B}_n \models \mathcal{M}'\colon \psi.$$

Wenn die Regel keine Annahmen besitzt, d.h. $n = 0$, muss $\models \mathcal{M}'\colon \psi$ gelten.

Ein Beweissystem wird als korrekt bezeichnet, wenn gilt

$$\mathcal{A}_l \vdash \mathcal{M}\colon \phi \quad \text{impliziert} \quad \mathcal{A}_1 \models \mathcal{M}\colon \phi.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Regeln des Systems korrekt sind. Im Folgenden werden nur Schlussregeln für die logisch vollständige Menge der booleschen Operatoren $\{\neg, \wedge\}$ vorgestellt. Um auch Regeln für die anderen Operatoren, die sich als Abkürzungen auffassen lassen, benutzen zu können, werden sogenannte *abgeleitete Regeln* definiert.

Definition 4.0.10 (Abgeleitete Regeln) *Eine Regel der Form*

$$\frac{\begin{array}{ccc}[\mathcal{B}_1] & & [\mathcal{B}_n] \\ \mathcal{M}_1 : \phi_1 & \ldots & \mathcal{M}_n : \phi_n\end{array}}{\mathcal{M}' : \psi}$$

mit Nebenbedingung C heißt abgeleitete Regel*, wenn die Gültigkeit der Nebenbedingung C und*

$$\mathcal{A}_1 \vdash \mathcal{M}_1 : \phi_1 \qquad \ldots \qquad \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{M}_n : \phi_n$$

immer impliziert, dass

$$\mathcal{A}_1 \backslash \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_n \backslash \mathcal{B}_n \vdash \mathcal{M}' : \psi.$$

Für den Spezialfall $n = 0$ muss $\vdash \mathcal{M}' : \psi$ gelten.

Beispiele für abgeleitete Regeln werden in den Beispielen in Abschnitt 5.3 vorgestellt.

4.1 Starrheit und Chop-Freiheit

Die Semantik der modalen Logiken bezieht sich im Gegensatz zur klassischen Aussagen- und Prädikatenlogik auf Welten, die miteinander in Relation stehen. Hierdurch stellt sich die Frage, ob die normalen Regeln der klassischen Logik unverändert übernommen werden können, und wenn nicht, inwiefern diese Regeln angepasst werden müssen. Rasmussen hat in [Ras02] dargestellt, dass aus einer einfachen Übernahme mancher Regeln ein nicht korrektes Beweissystem resultieren würde, weshalb für diese Regeln weitere Nebenbedingungen gelten müssen.

Beispiel 4.1.1 (Allquantorelimination) *Die klassische Regel der Allquantorelemination ist wie folgt definiert:*

$$\frac{(\forall x)\phi}{\phi[x \to s]}\,\forall E$$

In einer Logik mit der Chop-Modalität wie MPL oder dem Shape Calculus ist zu beachten, dass alle Vorkommen von x durch den selben Wert ersetzt werden. Hierzu ist es notwendig, dass die Formel keinen Chop-Operator enthält (Chop-Freiheit, chop-freeness)*, oder dass s ein starrer* (rigid) *Term ist. Als konkretes Beispiel dient die Formel*

$$\forall x((\ell = x \langle \vec{d} \rangle \ell = x) \to \ell = 2x)$$

Ohne die oben genannten Bedingungen wäre es möglich, mit der Regel $\forall E$ die Variable x durch ℓ zu ersetzen, wodurch die offensichtlich falsche Formel

$$((\ell = \ell \langle \vec{d} \rangle \ell = \ell) \to \ell = 2\ell)$$

ableitbar wäre.

Um solche Nebenbedingungen explizit in die Regeln mit aufzunehmen, wurden in [Ras02] die beiden Aussagen $\mathrm{ri}(\phi)$ für *rigid* und $\mathrm{cf}(\phi)$ für *chop-free* über die Starrheit bzw. Chop-Freiheit einer Formel und entsprechende Regeln definiert, die im Folgenden mit den entsprechenden Nebenbedingungen dargestellt sind. Hierbei bezeichnet $\oplus$ einen der üblichen binären, Booleschen Operatoren ($\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$) und $\otimes$ einen binären Konnektor, d.h. $\otimes$ kann auch der Chop-Operator sein ($\otimes \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv, \langle \vec{d} \rangle\}$, für $\vec{d} \in T^n$).

Chop-Freiheit

$$\frac{\mathrm{cf}(\phi) \quad \mathrm{cf}(\psi)}{\mathrm{cf}(\phi \oplus \psi)}\,\mathrm{cf} \oplus \mathrm{I} \qquad \frac{\mathrm{cf}(\phi \oplus \psi)}{\mathrm{cf}(\phi)}\,\mathrm{cf} \oplus \mathrm{E} \qquad \frac{\mathrm{cf}(\phi \oplus \psi)}{\mathrm{cf}(\psi)}\,\mathrm{cf} \oplus \mathrm{E}$$

$$\frac{\mathrm{cf}(\phi)}{\mathrm{cf}(\neg\phi)}\,\mathrm{cf}\neg\mathrm{I} \qquad \frac{\mathrm{cf}(\neg\phi)}{\mathrm{cf}(\phi)}\,\mathrm{cf}\neg\mathrm{E} \qquad \frac{}{\mathrm{cf}(\phi)}\,\mathrm{cfA}$$

$$\frac{\mathrm{cf}(\phi)}{\mathrm{cf}((\forall x)\phi)}\,\mathrm{cf}\forall\mathrm{I} \qquad \frac{\mathrm{cf}((\forall x)\phi)}{\mathrm{cf}(\phi)}\,\mathrm{cf}\forall\mathrm{E} \qquad \frac{\mathrm{cf}(\phi)}{\mathrm{cf}((\exists x)\phi)}\,\mathrm{cf}\exists\mathrm{I} \qquad \frac{\mathrm{cf}((\exists x)\phi)}{\mathrm{cf}(\phi)}\,\mathrm{cf}\exists\mathrm{E}$$

Die Regel cfA besitzt dabei die Nebenbedingung, dass ϕ atomar, d.h. von der Form $\bot$ oder $p(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ sein muss.

Starrheit

$$\frac{\mathrm{ri}(\phi) \quad \mathrm{ri}(\psi)}{\mathrm{ri}(\phi \otimes \psi)}\,\mathrm{ri} \otimes \mathrm{I} \qquad \frac{\mathrm{ri}(\phi \otimes \psi)}{\mathrm{ri}(\phi)}\,\mathrm{ri} \otimes \mathrm{E} \qquad \frac{\mathrm{ri}(\phi \otimes \psi)}{\mathrm{ri}(\psi)}\,\mathrm{ri} \otimes \mathrm{E}$$

$$\frac{\mathrm{ri}(\phi)}{\mathrm{ri}(\neg\phi)}\,\mathrm{ri}\neg\mathrm{I} \qquad \frac{\mathrm{ri}(\neg\phi)}{\mathrm{ri}(\phi)}\,\mathrm{ri}\neg\mathrm{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\mathrm{ri}(x)] \\ \vdots \\ \mathrm{ri}(\phi)\end{array}}{\mathrm{ri}((\forall x)\phi)}\,\mathrm{ri}\forall\mathrm{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}[\mathrm{ri}(x)] \\ \vdots \\ \mathrm{ri}(\phi)\end{array}}{\mathrm{ri}((\exists x)\phi)}\,\mathrm{ri}\exists\mathrm{I}$$

$$\frac{\mathrm{ri}((\forall x)\phi) \quad \mathrm{ri}(s)}{\mathrm{ri}(\phi[x \rightarrow s])}\,\mathrm{ri}\forall\mathrm{E} \qquad \frac{\mathrm{ri}((\exists x)\phi) \quad \mathrm{ri}(s)}{\mathrm{ri}(\phi[x \rightarrow s])}\,\mathrm{ri}\exists\mathrm{E}$$

Im Gegensatz zur Chop-Freiheit, die nur auf der syntaktischen Ebene der Formeln definiert ist, müssen für die Starrheit einer Formel noch Aussagen über die Starrheit der darin enthaltenen Terme möglich sein. Im Folgenden bezeichnet $\odot$ ein zweistelliges, starres Prädikats- oder Funktionssymbol wie $=$ oder $+$ und $\star$ ein einstelliges, starres Prädikats- oder Funktionssymbol.

$$\frac{\mathrm{ri}(s) \qquad \mathrm{ri}(t)}{\mathrm{ri}(s \odot t)}\,\mathrm{ri}\odot\mathrm{I} \qquad \frac{\mathrm{ri}(s \odot t)}{\mathrm{ri}(s)}\,\mathrm{ri}\odot\mathrm{E} \qquad \frac{\mathrm{ri}(s \odot t)}{\mathrm{ri}(t)}\,\mathrm{ri}\odot\mathrm{E}$$

$$\frac{\mathrm{ri}(s)}{\mathrm{ri}(\star s)}\,\mathrm{ri}\star\mathrm{I} \qquad \frac{\mathrm{ri}(\star s)}{\mathrm{ri}(s)}\,\mathrm{ri}\star\mathrm{E}$$

Um diese Regeln anwenden zu können, muss ausdrücklich zugesichert werden, welche atomaren Formeln starr sind, wie zum Beispiel ri(0) und ri($\bot$).
Dass die Sematik starrer Formel vom betrachteten Polyeder unabhängig ist, muss noch durch eine weitere Regel R ausgedrückt werden.

$$\frac{\mathcal{M}\colon \phi \qquad \mathrm{ri}(\phi)}{\mathcal{M}'\colon \phi}\,R$$

4.2 Aussagenlogik

Die üblichen Regeln der Aussagenlogik können wie gewohnt übernommen und auf naheliegende Art und Weise mit Welten beschriftet werden, so dass diese Regeln auch in einer modalen Logik gültig sind.

$$\frac{\mathcal{M}\colon \phi \wedge \psi}{\mathcal{M}\colon \phi}\,\wedge\mathrm{E} \qquad \frac{\mathcal{M}\colon \phi \wedge \psi}{\mathcal{M}\colon \psi}\,\wedge\mathrm{E} \qquad \frac{\mathcal{M}\colon \phi \qquad \mathcal{M}\colon \psi}{\mathcal{M}\colon \phi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{I}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\mathcal{M}\colon \phi]\\ \vdots\\ \mathcal{M}'\colon \bot\end{array}}{\mathcal{M}\colon \neg\phi}\,\neg\mathrm{I} \qquad \frac{\mathcal{M}\colon \phi \qquad \mathcal{M}\colon \neg\phi}{\mathcal{M}\colon \bot}\,\neg\mathrm{E}$$

$$\frac{\mathcal{M}\colon \bot}{\mathcal{M}'\colon \phi}\,\bot \qquad \frac{\begin{array}{c}[\mathcal{M}\colon \neg\phi]\\ \vdots\\ \mathcal{M}'\colon \bot\end{array}}{\mathcal{M}\colon \phi}\,\mathrm{RAA}$$

Die Regel $\bot$ ist ein Spezialfall von RAA, wurde der Übersicht halber jedoch mit aufgeführt.

4.3 Prädikatenlogik

Für die Regeln zur Einführung und Elimination der Quantoren sowie für die Regeln der Gleichheit werden die oben eingeführten Bedingungen ri und cf benutzt. Deshalb existieren für die Allquantorelimination und die Existenzquantorintroduktion jeweils zwei Regeln, die sich nur in der benutzten Eigenschaft der Formel (Starrheit bzw. Chop-Freiheit) unterscheiden.

$$\frac{\mathcal{M}\colon (\forall x)\phi \qquad \mathrm{ri}(s)}{\mathcal{M}\colon \phi[x \to s]}\,\forall\mathrm{E}_{\mathrm{ri}} \qquad \frac{\mathcal{M}\colon (\forall x)\phi \qquad \mathrm{cf}(\phi)}{\mathcal{M}\colon \phi[x \to s]}\,\forall\mathrm{E}_{\mathrm{cf}}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\mathrm{ri}(x)]\\ \vdots\\ \mathcal{M}\colon \phi\end{array}}{\mathcal{M}\colon (\forall x)\phi}\,\forall\mathrm{I} \qquad \frac{\mathcal{M}\colon (\exists x)\phi \qquad \begin{array}{c}[\mathcal{M}\colon \phi]\ [\mathrm{ri}(x)]\\ \vdots\\ \mathcal{M}'\colon \psi\end{array}}{\mathcal{M}'\colon \psi}\,\exists\mathrm{E}$$

$$\frac{\mathcal{M}\colon \phi[x \to s] \qquad \mathrm{ri}(s)}{\mathcal{M}\colon (\exists x)\phi}\,\exists\mathrm{I}_{\mathrm{ri}} \qquad \frac{\mathcal{M}\colon \phi[x \to s] \qquad \mathrm{cf}(\phi)}{\mathcal{M}\colon (\exists x)\phi}\,\exists\mathrm{I}_{\mathrm{cf}}$$

Die folgenden Regeln bilden die Eigenschaften der Gleichheit nach, z.B., dass die Substituierung eines starren Terms s durch einen gleichwertigen starren Term t möglich ist.

$$\frac{\mathcal{M}\colon \phi[x \to s] \qquad \mathcal{M}\colon s = t \qquad \mathrm{ri}(s) \qquad \mathrm{ri}(t)}{\mathcal{M}\colon \phi[x \to t]}\,\mathrm{Subst}_{\mathrm{ri}}$$

$$\frac{}{\mathcal{M}\colon s = s}\,\mathrm{Refl}$$

$$\frac{\mathcal{M}\colon \phi[x \to s] \qquad \mathcal{M}\colon s = t \qquad \mathrm{cf}(\phi)}{\mathcal{M}\colon \phi[x \to t]}\,\mathrm{Subst}_{\mathrm{cf}}$$

4.4 Modallogik

Die einzige Modalität des von MPL ist der Chop-Operator, da es möglich ist, $\Box$ und $\Diamond$ als Abkürzungen aufzufassen. Aus diesem Grund werden nur Regeln aufgeführt, die Eigenschaften dieser Modalität und der Relation der Welten beschreiben.

$$\frac{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \phi \qquad \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \psi}{\mathcal{M}\colon \phi\,\langle\vec{d}\rangle\,\psi}\,\langle\vec{d}\rangle\,\mathrm{I} \qquad \frac{\mathcal{M}\colon \phi\,\langle\vec{d}\rangle\,\psi \qquad \begin{array}{c}[\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \phi]\ [\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \psi]\\ \vdots\\ \mathcal{M}'\colon \delta\end{array}}{\mathcal{M}'\colon \delta}\,\langle\vec{d}\rangle\,\mathrm{E}$$

Für $\langle\vec{d}\rangle\,\mathrm{E}$ muss zusätzlich als Nebenbedingung gelten, dass $\vec{m}$ sowohl in keiner Annahme, von der $\mathcal{M}'\colon \delta$ abhängt, als auch nicht in $\mathcal{M}'\colon \delta$ selbst, frei vorkommt.

Lemma 4.4.1 *Die Regel der Chop-Introduktion $\langle\vec{d}\rangle$ I und die Regel der Chop-Elimination $\langle\vec{d}\rangle$ E sind korrekt.*

Beweis: *Korrektheit der Chop-Introduktion $\langle\vec{d}\rangle$ I*
Sei $\mathfrak{m}$ ein Polyeder-Modell, $\mathcal{I}$ eine Interpretation, $\mathcal{V}$ eine Belegung, η eine Umgebungsbelegung und $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ geschlossene, konvexe Polyeder, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}_1\colon \phi$ und $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}_2\colon \psi$ und es gibt ein $\vec{m} \in T^n$, so dass $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}}$ und $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}}$.

Dann folgt aus $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \phi$ und $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \psi$ nach der Definition des Chop-Operators $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M} : \phi \langle \vec{d} \rangle \psi$. □

Beweis: *Korrektheit der Chop-Elimination* $\langle \vec{d} \rangle E$
Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ Mengen beschrifteter Formeln, so dass

$$\mathcal{A}_1 \models \mathcal{M} : \phi \langle \vec{d} \rangle \psi \tag{4.1}$$
$$\mathcal{A}_2 \models \mathcal{M}' : \delta. \tag{4.2}$$

Weiterhin sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation, $\mathcal{V}$ eine Belegung und η eine Umgebungsbelegung mit

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \backslash \{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \phi, \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \psi\} \tag{4.3}$$

Hieraus folgt, dass

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \gamma \text{ für alle } \gamma \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \backslash \{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \phi, \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \psi\}.$$

Wegen (4.1) gilt dann auch $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M} : \phi \langle \vec{d} \rangle \psi$. Das heißt, dass es eine Umgebungsbelegung η' gibt, mit $\eta' = \eta[\vec{m} \to \alpha]$, so dass

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \phi \text{ und } \mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \psi.$$

Da $\vec{m}$ in keiner Formel in $\mathcal{A}_2 \backslash \{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \phi, \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \psi\}$ frei vorkommt, gilt für alle Formeln $\gamma \in \mathcal{A}_2 \backslash \{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \phi, \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \psi\}$, dass $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \gamma$. Damit gilt insgesamt für alle $\gamma \in \mathcal{A}_2$, dass $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \gamma$ und daher mit (4.2) auch $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \mathcal{M}' : \delta$. Da $\vec{m}$ in $\mathcal{M}' : \delta$ nicht frei vorkommt, gilt auch $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}' : \delta$. □

Die folgenden beiden Regeln beschreiben die eindeutige Zerlegung eines Polyeders. Wenn eine Hyperebene, die durch einen Punkt $\vec{m}$ und Richtungsvektor $\vec{d}$ spezifiziert ist, ein Teilpolyeder $\mathcal{M}_1$ abtrennt, das das Maß $\ell = s$ (s ist ein starrer Term) besitzt, und eine Hyperebene, die durch den Punkt $\vec{n}$ und Richtungsvektor $\vec{d}$ spezifiziert ist, ein Teilpolyeder $\mathcal{M}_2$ abtrennt, das auch das Maß $\ell = s$ besitzt, so sind diese Teilpolyeder gleich.

$$\frac{\mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \phi \quad \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{n}} : \ell = s \quad \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = s \quad \mathrm{ri}(s)}{\mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{n}} : \phi} \text{ S1}$$

$$\frac{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \phi \quad \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{n}} : \ell = s \quad \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = s \quad \mathrm{ri}(s)}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{n}} : \phi} \text{ S2}$$

Lemma 4.4.2 *Die Regeln der eindeutigen Zerlegung S*1 *und S*2 *sind korrekt.*

Beweis: *Korrektheit der eindeutigen Zerlegung S*1
Sei $\mathfrak{m}$ ein Polyeder-Modell, $\mathcal{I}$ eine Interpretation, $\mathcal{V}$ eine Belegung, η eine Umgebungsbelegung und s ein starrer Term, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \phi$, $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = s$

und $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{n}} : \ell = s$ gelten. Mit Definition 3.2.3 (M3) folgt dann $\langle \vec{m} - \vec{n}, \vec{d} \rangle = 0$, d.h. sowohl $\vec{m}$ als auch $\vec{n}$ erzeugen mit $\vec{d}$ zusammen dieselbe Hyperebene. Damit ergibt sich $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{n}} : \phi$. □

Beweis: *Korrektheit der eindeutigen Zerlegung S2*
Der Beweis kann analog zum Beweis der Korrektheit von S1 durchgeführt werden. □

4.5 Raum- und Längenmaß

Die Eigenschaften des allgemeinen Raummaßes sind in den folgenden drei Regeln abgebildet.

$$\frac{\mathcal{M} \colon \ell_{\vec{d}} = 0}{\mathcal{M} \colon \ell = 0}\,\ell 0 \qquad \frac{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = s \qquad \mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = t \qquad \mathrm{ri}(s) \qquad \mathrm{ri}(t)}{\mathcal{M} \colon \ell = s + t}\,\ell + \mathrm{I}$$

$$\frac{\mathcal{M} \colon \ell = s + t \qquad \mathrm{ri}(s) \qquad \mathrm{ri}(t) \qquad \begin{array}{c}[\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = s]\ [\mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = t] \\ \vdots \\ \mathcal{M}' \colon \psi\end{array}}{\mathcal{M}' \colon \psi}\,\ell + \mathrm{E}$$

Für $\ell + \mathrm{E}$ muss als Nebenbedingung gelten, dass $\vec{m}$ weder in $\mathcal{M}' \colon \psi$, noch in einer Annahme frei vorkommt, von der $\mathcal{M}' \colon \psi$ abhängt, außer $\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = s$ und $\mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = t$.

Lemma 4.5.1 *Die Regeln zur Introduktion- bzw. Elimination einer Addition zweier Volumen $\ell + I$ und $\ell + E$ und die Regel $\ell 0$ sind korrekt.*

Beweis: *Korrektheit von $\ell 0$*
Sei $\mathfrak{m}$ ein Polyeder-Modell, $\mathcal{I}$ eine Interpretation, $\mathcal{V}$ eine Belegung, η eine Umgebungsbelegung und $\mathcal{M}$ ein Polyeder, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M} \colon \ell_{\vec{d}} = 0$. Dann folgt aus Definition 3.2.3 (M2), dass $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M} \colon \ell = 0$. □

Beweis: *Korrektheit der Volumenadditionsintroduktion $\ell + I$*
Sei $\mathfrak{m}$ ein Polyeder-Modell, $\mathcal{I}$ eine Interpretation, $\mathcal{V}$ eine Belegung, η eine Umgebungsbelegung, s und t zwei starre Terme und $\vec{d}$ ein Vektor, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = s$ und $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = t$.

1. Fall: $m \in \mathcal{M}$:
   Mit Definition 3.2.3 (M4) ergibt sich hieraus direkt $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M} \colon \ell = s + t$.
2. Fall: $m \notin \mathcal{M}$:
   Es gilt $\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} = \mathcal{M}$ und $\mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} = \emptyset$ (der umgekehrte Fall kann analog behandelt werden). Nach Definition 3.2.3 ist dann $m_r(\mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}}, \vec{d}) = 0$, für beliebige $\vec{d}$ und

damit auch $m(\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}}) = 0$ (M2). Hieraus folgt aufgrund der Starrheit von t auch $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\colon t = 0$. Für das Polyeder $\mathcal{M}$ gilt weiterhin $m(\mathcal{M}) = m(\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}})$ und damit auch $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\colon \ell = s$. Insgesamt ergibt sich $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\colon \ell = s + t$.

□

Beweis: *Korrektheit der Volumenadditionselimination* $\ell + E$

Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ Mengen beschrifteter Formeln, s und t starre Terme, so dass

$$\mathcal{A}_1 \models \mathcal{M}\colon \ell = s + t \tag{4.4}$$
$$\mathcal{A}_2 \models \mathcal{M}'\colon \psi. \tag{4.5}$$

Weiterhin sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation, $\mathcal{V}$ eine Belegung und η eine Umgebungsbelegung, so dass

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \backslash \{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = s, \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = t\}. \tag{4.6}$$

Damit gilt

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \gamma \quad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \backslash \{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = s, \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = t\}.$$

Offensichtlich gilt dann auch $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{A}_1$, und mit (4.4) folgt daraus

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\colon \ell = s + t.$$

Das bedeutet, dass es eine Umgebungsbelegung η' gibt, mit $\eta' = \eta[\vec{m} \to \alpha]$, so dass

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = s \quad \text{und} \quad \mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = t.$$

Da s und t als starr vorausgesetzt werden, bezeichnen sie in diesen Teilformeln immer noch die selben Werte wie in (4.4). Da $\vec{m}$ nicht frei in $\mathcal{A}_2 \backslash \{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = s, \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = t\}$ vorkommt, gilt $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \gamma$ für alle $\gamma \in \mathcal{A}_2 \backslash \{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = s, \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = t\}$. Insgesamt ergibt sich damit $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \gamma$ für alle $\gamma \in \mathcal{A}_2$, woraus mit (4.5) $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \mathcal{M}'\colon \psi$ folgt. Da $\vec{m}$ auch nicht frei in $\mathcal{M}'\colon \psi$ vorkommt, gilt auch $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}'\colon \psi$. □

Für das gerichtete Längenmaß ergeben sich analog folgende Regeln.

$$\frac{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = s \qquad \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = t \qquad \mathrm{ri}(s) \quad \mathrm{ri}(t)}{\mathcal{M}\colon \ell_{\vec{d}} = s + t}\, \ell_{\vec{d}} + \mathrm{I}$$

$$\frac{\mathcal{M}\colon \ell_{\vec{d}} = s + t \qquad \mathrm{ri}(s) \qquad \mathrm{ri}(t) \qquad \begin{array}{c}[\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = s]\ [\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = t] \\ \vdots \\ \mathcal{M}'\colon \psi\end{array}}{\mathcal{M}'\colon \psi}\, \ell_{\vec{d}} + \mathrm{E}$$

Bei der Längenadditionselimination $\ell_{\vec{d}} + \mathrm{E}$ gilt als Nebenbedingung, dass $\vec{m}$ weder in einer Annahme, von der $\mathcal{M}'\colon \psi$ abhängt, außer $\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = s$ und $\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = s$, noch in $\mathcal{M}'\colon \psi$ frei vorkommen darf.

Lemma 4.5.2 *Die Regeln zur Introduktion- bzw. Elimination der Addition zweier Längen $\ell_{\vec{d}} + I$ und $\ell_{\vec{d}} + E$ sind korrekt.*

Beweis: *Korrektheit der Längenadditionsintroduktion $\ell_{\vec{d}} + I$*
Sei $\mathfrak{m}$ ein Polyeder-Modell, $\mathcal{I}$ eine Interpretation, $\mathcal{V}$ eine Belegung und η eine Umgebungsbelegung, so dass

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell_{\vec{d}} = s \quad \text{und} \tag{4.7}$$
$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell_{\vec{d}} = t, \tag{4.8}$$

unter der Voraussetzung, dass s und t starre Terme sind.

1. Fall: $\vec{m} \in \mathcal{M}$:
   Aufgrund der Definition 3.2.2 gilt $\max\left((\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}) \times \vec{d}^{\,T}\right) = \min\left((\mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}}) \times \vec{d}^{\,T}\right)$, wodurch aus der Definition des einfachen Maßes aus Definition 3.2.3 folgt mit

   $$a = m_{SIL}\left(\min((\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}) \times \vec{d}^{\,T}), \max((\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}) \times \vec{d}^{\,T}))\right)$$
   $$b = m_{SIL}\left(\min((\mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}}) \times \vec{d}^{\,T}), \max((\mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}}) \times \vec{d}^{\,T}))\right),$$

   dass

   $$m_{SIL}(\min((\mathcal{M}) \times \vec{d}^{\,T}), \max((\mathcal{M}) \times \vec{d}^{\,T})) = a + b.$$

   Damit gilt auch

   $$m_r(\mathcal{M}, \vec{d}) = m_r(\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}, \vec{d}) + m_r(\mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}}, \vec{d})$$

   das heißt, aus (4.7) und (4.8) folgt $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M} \colon \ell_{\vec{d}} = s + t$.

2. Fall: $\vec{m} \notin \mathcal{M}$:
   In diesem Fall gilt entweder $\mathcal{M} = \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}$ oder $\mathcal{M} = \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}}$. Da beide Fälle analog behandelt werden können, wird hier nur $\mathcal{M} = \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}$ betrachtet. In diesem Fall gilt auch $\mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} = \emptyset$, und damit nach Definition 3.2.3 $m_r(\mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}}, \vec{d}) = 0$. Hieraus folgt $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell_{\vec{d}} = 0$, d.h. $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : t = 0$. Da $m_r(\mathcal{M}, \vec{d}) = m_r(\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}}, \vec{d})$, d.h. $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M} \colon \ell_{\vec{d}} = s$, und aufgrund der Starrheit von s und t gilt $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M} \colon \ell_{\vec{d}} = s + t$.

□

Beweis: *Korrektheit der Längenadditionselimination $\ell_{\vec{d}} + E$*

Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ Mengen beschrifteter Formeln, so dass

$$\mathcal{A}_1 \models \mathcal{M} \colon \ell_{\vec{d}} = s + t \tag{4.9}$$
$$\mathcal{A}_2 \models \mathcal{M}' \colon \psi \tag{4.10}$$

Weiterhin sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation, $\mathcal{V}$ eine Belegung und η eine Umgebungsbelegung, so dass

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \backslash \{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell_{\vec{d}} = s, \mathcal{M}\rceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell_{\vec{d}} = t\} \tag{4.11}$$

Damit gilt

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \gamma \quad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \backslash \{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = s, \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = t\}$$

Hieraus folgt offensichtlich $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{A}_1$, woraus mit (4.9) folgt, dass

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M} \colon \ell_{\vec{d}} = s + t.$$

Das bedeutet, dass es eine Umgebungsbelegung η' gibt mit $\eta' = \eta[\vec{m} \to \alpha]$, so dass

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = s \quad \text{und} \quad \mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = t.$$

Aufgrund der Voraussetzung, dass t und s starre Terme sind, bezeichnen sie auch auf den Teilpolyedern die selben Werte. Da $\vec{m}$ nicht frei in $\mathcal{A}_2 \backslash \{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = s, \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = t\}$ vorkommen darf, gilt

$$\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \gamma \quad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{A}_2 \backslash \{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = s, \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell_{\vec{d}} = t\}$$

Insgesamt gilt damit $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \mathcal{A}_2$, woraus mit (4.10) folgt, dass $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta' \models \mathcal{M}' \colon \psi$. Da $\vec{m}$ auch nicht in $\mathcal{M}' \colon \psi$ frei vorkommt, gilt $\mathcal{I}, \mathcal{V}, \eta \models \mathcal{M}' \colon \psi$. □

4.6 Domäneneigenschaften

Während eines Beweises ist es häufig nötig, Eigenschaften der Domäne der Modelle auszunutzen. Bei den später vorgestellten Beweisen (siehe 5.3) werden die Volumen einzelner Polyeder miteinander verglichen, wozu die einige der folgenden Regeln genutzt werden müssen. Ohne diese Schlussregeln wären viele Beweise nicht möglich, und der Kalkül würde sehr viel an Aussagekraft einbüßen.

Gruppeneigenschaften

Im Folgenden werden Regeln angegeben, mit denen Schlüsse aus den Gruppeneigenschaften der Domäne gezogen werden. Aufgrund der Einfachheit der Schlussregeln wird auf entsprechende Beweise verzichtet.

$$\frac{}{\mathcal{M} \colon s + (t + u) = (s + t) + u} \text{+Ass} \qquad \frac{}{\mathcal{M} \colon s + 0 = s} \text{+R0}$$

$$\frac{}{\mathcal{M} \colon s + (-s) = 0} \text{+RInv} \qquad \frac{}{\mathcal{M} \colon s + t = t + s} \text{+Kom}$$

$$\frac{}{\mathcal{M} \colon s \leq s} \leq \text{Refl} \qquad \frac{\mathcal{M} \colon s \leq t \qquad \mathcal{M} \colon t \leq u}{\mathcal{M} \colon s \leq u} \leq \text{Trans}$$

$$\frac{\mathcal{M} \colon s \leq t \qquad \mathcal{M} \colon t \leq s}{\mathcal{M} \colon s = t} \leq \text{AntiS} \qquad \frac{}{\mathcal{M} \colon s \leq t \vee t \leq s} \leq \text{Ax}$$

$$\frac{\mathcal{M} \colon s \leq t}{\mathcal{M} \colon s + u \leq t + u} \leq \text{Add}$$

Körpereigenschaften

Damit bei komplizierteren Beweisen die Möglichkeit gegeben ist, nicht nur zu addieren, sondern auch zu multiplizieren und zu dividieren, sind die folgenden Regeln angegeben, die die Körpereigenschaften der Domäne ausnutzen. Auch hier wird auf entsprechende Beweise verzichtet.

$$\frac{}{\mathcal{M}\colon s \circ t = t \circ s}\circ\text{Kom} \quad \frac{}{\mathcal{M}\colon s \circ 1 = s}\circ\text{R1} \quad \frac{\mathcal{M}\colon s \neq 0}{\mathcal{M}\colon s \circ s^{-1} = 1}\circ\text{RInv}$$

$$\frac{}{\mathcal{M}\colon s \circ (t \circ u) = (s \circ t) \circ u}\circ\text{Ass} \quad \frac{}{\mathcal{M}\colon s \circ (t + u) = (s \circ t) + (s \circ u)}\circ\text{Dist}$$

Um auch eine totale Ordnung auf dem Körper zu nutzen, muss noch die Verträglichkeit der Ordnungsrelation und der Multiplikation spezifiziert werden.

$$\frac{\mathcal{M}\colon 0 < u \qquad \mathcal{M}\colon s \leq t}{\mathcal{M}\colon s \circ u \leq t \circ u} \leq \text{Mul} \quad \frac{\mathcal{M}\colon 0 < s}{\mathcal{M}\colon 0 < s^{-1}} \leq \text{Rec}$$

Die topologische Dichte des Raumes beschreiben die Regeln Dense-ℓ und Dense-$\ell_{\vec{d}}$.

$$\frac{\mathcal{M}\colon \ell > 0}{\mathcal{M}\colon \ell > 0 \,\langle\vec{d}\rangle\, \ell > 0}\text{Dense-}\ell \quad \frac{\mathcal{M}\colon \ell_{\vec{d}} > 0}{\mathcal{M}\colon \ell_{\vec{d}} > 0 \,\langle\vec{d}\rangle\, \ell_{\vec{d}} > 0}\text{Dense-}\ell_{\vec{d}}$$

Falls die Domäne unendlich ist, werden die sogenannten Archimedischen Axiome zum Kalkül hinzugefügt.

$$\frac{}{\mathcal{M}\colon (\exists x) x < s}\text{Arch1} \quad \frac{}{\mathcal{M}\colon (\exists x) s < x}\text{Arch2}$$

5 Natürliches Schließen für den Shape Calculus

Die mehrdimensionale Modal-Logik, die in den vorherigen Abschnitten vorgestellt wurde, unterscheidet sich vom Shape Calculus dadurch, dass für sie weder Zustandsausdrücke, noch der Integral-Operator $\int$ definiert sind. In diesem Kapitel soll deshalb die Verbindung zwischen MPL und dem SC hergestellt werden. Es sei noch einmal daran erinnert, dass die spatio-temporale Domäne im Folgenden als $\mathbb{R}$ (siehe auch 3.2) gewählt wird.

5.1 Syntax und Semantik

Die Syntax des Shape Calculus ist eine Erweiterung der Syntax von MPL durch flexible Konstanten der Form

$$\int\pi$$

wobei π als Zustandsausdruck bezeichnet wird. Zustandsausdrücke bestehen aus Zustandsvariablen $P, Q, ...$, die durch Boolesche Operatoren verknüpft werden können.

$$\pi ::= 0 \mid 1 \mid P \mid \neg\pi_1 \mid \pi_1 \vee \pi_2$$

Die weiteren Operatoren können als Abkürzungen wie üblich definiert werden. Zu beachten ist, dass die Symbole $\vee$ und $\neg$ in Zustandsausdrücken eine andere Semantik besitzen als in Formeln. Da sie jedoch in eindeutig unterscheidbaren Kontexten unterschiedlich interpretiert werden, ergeben sich dadurch keine Probleme. Für die Interpretation der Zustandsausdrücke wird zuerst eine Interpretation der Zustandsvariablen benötigt:

$$\mathcal{I}_Z(P)\colon \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$$

Für diese Interpretationen wird verlangt, dass nur endliche Variabilität aufweisen, d.h., dass es für jeden Punkt möglich ist, ihn mit einem nicht-leeren Polyeder zu umgeben, auf dem die Interpretation konstant ist. Die Interpretation wird für Zustandsausdrücke wie folgt erweitert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_Z(0)(\vec{x}) &= 0, \\
\mathcal{I}_Z(1)(\vec{x}) &= 1, \\
\mathcal{I}_Z(\neg\pi)(\vec{x}) &= 1 - \mathcal{I}_Z(\pi)(\vec{x}), \\
\mathcal{I}_Z(\pi_1 \vee \pi_2)(\vec{x}) &= \max(\mathcal{I}_Z(\pi_1)(\vec{x}), \mathcal{I}_Z(\pi_2)(\vec{x})).
\end{aligned}$$

Die Interpretation von Termen und Formeln ist wie in MPL (siehe Abschnitt 3.2) definiert, mit der Ausnahme der Konstanten der Form $\int\pi$. Für diese gilt

$$\mathcal{I}[\![\textstyle\int\pi]\!](\mathcal{V},\mathcal{M}) \;=\; \int_{\mathcal{M}} \mathcal{I}_Z(\pi)(\vec{x})d\vec{x}$$

Aus Gründen der Lesbarkeit werden noch einige Abkürzungen eingeführt.

$$\begin{aligned} \lceil\rceil &\equiv \ell = 0 \\ \lceil\pi\rceil &\equiv \textstyle\int\pi = \ell \wedge \ell > 0 \end{aligned}$$

5.2 Beweisregeln

Die Erweiterung der Beweisregeln für das Integral folgen aus der Axiomatisierung des Shape Calculus relativ zu ITL^n, wie sie in [Sch06] dargestellt wurde. Die Axiome wurden dabei größtenteils einfach als axiomatische Regeln übernommen, im Falle von $\int+$ mussten die Eigenschaften des Längenmaßes von MPL berücksichtigt werden, $\int\langle\vec{d}\rangle$ wurde angepasst, damit der Chop-Operator möglichst nur in seinen Introduktions- und Eliminationsregeln vorkommt. Die grundlegenden Eigenschaften des Integraloperators werden mit den folgenden Axiomen angegeben.

$$\frac{}{\mathcal{M}\colon \textstyle\int 0 = 0}\,\textstyle\int 0 \qquad \frac{}{\mathcal{M}\colon \textstyle\int 1 = \ell}\,\textstyle\int 1$$

$$\frac{}{\mathcal{M}\colon \textstyle\int S \geq 0}\,\textstyle\int \geq 0 \qquad \frac{}{\mathcal{M}\colon \textstyle\int S_1 = \int S_2}\,\textstyle\int =$$

Für Regel $\int =$ gilt als Nebenbedingung, dass $S_1 \equiv S_2$ eine aussagenlogische Tautologie ist. Das Verhältnis des Integrals zur Addition definieren die Regeln $\int+$ und $\int\langle\vec{d}\rangle$.

$$\frac{}{\mathcal{M}\colon \textstyle\int S_1 + \int S_2 = \int(S_1 \vee S_2) + \int(S_1 \wedge S_2)}\,\textstyle\int +$$

$$\frac{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \textstyle\int S = s \qquad \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int S = t \qquad \mathrm{ri}(s) \qquad \mathrm{ri}(t)}{\mathcal{M}\colon \textstyle\int S = s + t}\,\textstyle\int\langle\vec{d}\rangle$$

Da nur $\int\langle\vec{d}\rangle$ kein Axiom darstellt, wird auch nur für diese Regel ein Beweis angegeben. So folgt die Korrektheit von $\int\langle\vec{d}\rangle$ aus der Additivität der Integration, für einen Beweis sei auf ein beliebiges Lehrbuch der Analysis verwiesen, z.B. [Heu06].

5.3 Beispiele

Als Beispiele für Ableitungen in dem vorgestellten Beweissystem dienen Ableitungen der Theoreme

1. $\lceil\pi\rceil \langle\vec{d}\rangle \lceil\pi\rceil \rightarrow \lceil\pi\rceil$
2. $\lceil\pi\rceil \rightarrow \lceil\pi\rceil \langle\vec{d}\rangle \lceil\pi\rceil$.

Die Beweise werden schon für diese relativ simplen Theoreme sehr groß und unhandlich. Deshalb wurden die Beweisbäume in kleinere Bäume aufgeteilt, die an den angegebenen Stellen einzufügen sind. Innerhalb der Beweise werden beide Schreibweisen $\lceil\pi\rceil$ und $\int\pi = \ell \wedge \ell > 0$ genutzt, je nachdem, was im Beweis angebracht scheint.

Beispiel 1

Die Idee des Beweises ist die Identifikation der Volumen der abgetrennten Polyeder mit zwei Variablen x und y, die daraufhin mittels der Integralregeln zum Volumen des gesamten Polyeders addiert werden. Hierbei ist es möglich und später auch notwendig, etwas über die Größe der Werte der Variablen auszusagen (Teilbäume Π_x,Π_y und $\Pi_{\geq}$):
Π_x:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell \wedge \ell > 0]_3}{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell > 0}\wedge\mathrm{E} \quad \dfrac{[\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = x]_2 \quad \mathrm{cf}(\ell > 0)}{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{v}} : x > 0}\mathrm{Subst}_{\mathrm{cf}} \quad \mathrm{ri}(x > 0)}{\mathcal{M}\colon x > 0}R}{\mathcal{M}\colon x + y > y}\leq \mathrm{Add}$$

Π_y:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell \wedge \ell > 0]_3}{\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell > 0}\wedge\mathrm{E} \quad \dfrac{[\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = y]_1 \quad \mathrm{cf}(\ell > 0)}{\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : y > 0}\mathrm{Subst}_{\mathrm{cf}} \quad \mathrm{ri}(y > 0)}{\mathcal{M}\colon y > 0}R$$

$\Pi_{\geq}$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_x \\ \mathcal{M}\colon x + y > y\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_y \\ \mathcal{M}\colon y > 0\end{matrix}}{\mathcal{M}\colon x + y > 0}\leq \mathrm{Trans}$$

Auch für das Volumen des gesamten Polyeders lässt sich mit der Volumenadditionsintroduktion eine Beziehung zu x und y herstellen, die weiterhin mit Π_ℓ bezeichnet wird.

Π_ℓ:

$$\frac{[\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = x]_2 \qquad [\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = y]_1 \qquad \mathrm{ri}(x) \quad \mathrm{ri}(y)}{\mathcal{M} \colon \ell = x + y}\, \ell + \mathrm{I}$$

Die beiden Teilbeweise $\Pi_{\int x}$ und $\Pi_{\int y}$ führen den Wert des Integrals $\int\pi$ auf den beiden Teilpolyeder mit den Variablen x und y zusammen.

$\Pi_{\int x}$:

$$\frac{\dfrac{[\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell \wedge \ell > 0]_3}{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell}\,\wedge\mathrm{E} \qquad [\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = x]_2 \qquad \mathrm{cf}(\int\pi = \ell)}{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = x}\,\mathrm{Subst}_{\mathrm{cf}}$$

$\Pi_{\int y}$:

$$\frac{\dfrac{[\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell \wedge \ell > 0]_3}{\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell}\,\wedge\mathrm{E} \qquad [\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = y]_1 \qquad \mathrm{cf}(\int\pi = \ell)}{\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = y}\,\mathrm{Subst}_{\mathrm{cf}}$$

Alle obigen Teilbäume werden nun zu Π vereinigt, so dass aus ihnen $\mathcal{M} \colon \lceil\pi\rceil$ abgeleitet werden kann.

$\Pi_{\int x+y}$:

$$\frac{\dfrac{\Pi_{\int x} \qquad \Pi_{\int y}}{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = x \quad \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = y \quad \mathrm{ri}(x)\,\mathrm{ri}(y)}{\mathcal{M} \colon \int\pi = x + y}\,\int\langle\vec{d}\rangle \qquad \Pi_{\geq}\ \mathcal{M} \colon x + y > 0}{\mathcal{M} \colon \int\pi = x + y \wedge x + y > 0}\,\wedge\mathrm{I}$$

Π:

$$\frac{\Pi_{\int x+y} \qquad \Pi_{\ell} \qquad \dfrac{\mathrm{cf}(\int\pi = w) \qquad \mathrm{cf}(w > 0)}{\mathrm{cf}(\int\pi = w \wedge w > 0)}}{\mathcal{M} \colon \int\pi = x + y \wedge x + y > 0 \qquad \mathcal{M} \colon \ell = x + y \qquad \mathcal{M} \colon \int\pi = \ell \wedge \ell > 0}\,\mathrm{Subst}_{\mathrm{cf}}$$

Schließlich werden aus diesem Baum Π alle Annahmen mittels Existenz- und Chop-Elimination aus den Annahmemengen entfernt. In den Teilbäumen wurde dies schon durch Einklammerung und Indizes an den betreffenden Annahmen kenntlich gemacht.

$$\dfrac{\dfrac{[\mathcal{M}\colon \lceil\pi\rceil\ \langle\vec{e_x}\rangle\ \lceil\pi\rceil]_4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = \ell}}{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : (\exists x)\ell = x}\exists\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = \ell}}{\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : (\exists y)\ell = y}\exists\mathrm{E}_1 \qquad \mathcal{M}\colon \textstyle\int\pi = \ell \wedge \ell > 0}{\mathcal{M}\colon \textstyle\int\pi = \ell \wedge \ell > 0}\exists\mathrm{E}_2}{\mathcal{M}\colon \textstyle\int\pi = \ell \wedge \ell > 0}\langle\vec{d}\rangle\,\mathrm{E}_3}{\mathcal{M}\colon \textstyle\int\pi = \ell \wedge \ell > 0}\to\mathrm{I}_4}{\mathcal{M}\colon \lceil\pi\rceil\ \langle\vec{d}\rangle\ \lceil\pi\rceil \to \lceil\pi\rceil}\ \Pi$$

Beispiel 2

Für den Beweis von $\lceil\pi\rceil \to \lceil\pi\rceil\ \langle\vec{d}\rangle\ \lceil\pi\rceil$ werden zunächst einige Annahmen getroffen, die im Laufe des Beweises wieder eliminiert werden. Diese Annahmen betreffen das Volumen der Teilpolyeder des betrachteten Polyeders $\mathcal{M}$.

- $\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = s$
- $\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = s'$
- $\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = t$
- $\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = t'$

Die Idee des Beweises ist, dass für jedes Teilpolyeder der Zusammenhang zwischen dem Volumen des Polyeders und dem Wert des Integrals über π überprüft wird, d.h. zum Beispiel für das "untere" Polyeder der Zusammenhang zwischen s und s'. Es wird zunächst angenommen, dass $\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \neg(s = s')$ gilt und daraus ein Widerspruch gefolgert. Mit der Regel RAA folgt dann, dass $\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : s = s'$ gilt, also letztlich $\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell$. Für die Folgerung des Widerspruchs wird die Äquivalenz $\neg(s = s') \equiv (s < s' \vee s > s')$ ausgenutzt. Anschließend wird aus der Regel Dense $-\ell$ gefolgert, dass das Volumen des Teilpolyeders größer als 0 ist, so dass insgesamt für dieses Teilpolyeder $\lceil\pi\rceil$ gilt. Das Vorgehen für das andere Teilpolyeder ist analog.

Wie schon im ersten Beispiel zu sehen ist, werden häufig Annahmen der Form $\mathcal{M}\colon \ell = t$ getroffen, und später durch eine Existenzquantorelimination wieder entfernt. Der Übersichtlichkeit halber wird hierfür eine abgeleitete Regel definiert:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\mathcal{M}\colon \ell = t]\ [\mathrm{ri}(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{M}'\colon \psi\end{array}}{\mathcal{M}'\colon \psi}\,\ell\mathrm{E}$$

Hierbei darf t weder in $\mathcal{M}'\colon \psi$, noch in einer Annahme, von der $\mathcal{M}'\colon \psi$ abhängt frei vorkommen.

Beweis: *ℓE ist eine abgeleitete Regel*
Für den Beweis wird eine Ableitung im Kalkül angegeben, die belegt, dass ℓE nur eine Abkürzung dieser Ableitung ist.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\mathcal{M}\colon \ell = \ell}}{\mathcal{M}\colon (\exists t)\ell = t}\,\exists\mathrm{I} \qquad \begin{array}{c}[\mathcal{M}\colon \ell = t]\,[\mathrm{ri}(t)]\\ \vdots\\ \mathcal{M}'\colon \psi\end{array}}{\mathcal{M}'\colon \psi}\,\exists\mathrm{E}$$

Die Nebenbedingung von ℓE ergibt sich direkt aus der Nebenbedingung der Existenzelimination. □

Auch für Annahmen der Form $\mathcal{M}\colon \int\pi = t$ wird eine entsprechende abgeleitete Regel definiert:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\mathcal{M}\colon \int\pi = t]\,[\mathrm{ri}(t)]\\ \vdots\\ \mathcal{M}'\colon \psi\end{array}}{\mathcal{M}'\colon \psi}\,\int\mathrm{E}$$

Auch hierbei darf t weder in $\mathcal{M}'\colon \psi$, noch in einer Annahme, von der $\mathcal{M}'\colon \psi$ abhängt frei vorkommen.

Beweis: *$\int E$ ist eine abgeleitete Regel*
Für den Beweis wird wieder eine Ableitung im Kalkül angegeben, die belegt, dass $\int$E nur eine Abkürzung dieser Ableitung ist.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\mathcal{M}\colon \int\pi = \int\pi}}{\mathcal{M}\colon (\exists t)\int\pi = t}\,\exists\mathrm{I} \qquad \begin{array}{c}[\mathcal{M}\colon \int\pi = t]\,[\mathrm{ri}(t)]\\ \vdots\\ \mathcal{M}'\colon \psi\end{array}}{\mathcal{M}'\colon \psi}\,\exists\mathrm{E}$$

Die Nebenbedingung von $\int$E ergibt sich direkt aus der Nebenbedingung der Existenzelimination. □

Die Namen der benutzten Regeln werden in diesem Beweis aus Platzgründen nur bei Regeln angegeben, bei denen Annahmen eliminiert werden.

Zuerst werden einige Zusammenhänge der Variablen gefolgert:

Π_1:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi \le \ell} \qquad [\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = t']_6}{\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : t' \le \ell} \qquad [\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = t]_4}{\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : t' \le t}}{\dfrac{\overline{\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : s + t' \le s + t} \qquad \mathrm{ri}(s + t' \le s + t)}{\mathcal{M}\colon s + t' \le s + t}}$$

Auch für das Volumen des Polyeders $\mathcal{M}$ lässt sich eine Ableitung finden, die im folgenden durch den Baum Π_ℓ bezeichnet wird.

$\Pi_{\ell 1}$:

$$\frac{\mathrm{ri}(s) \quad \mathrm{ri}(t) \qquad [\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = s]_3 \qquad [\mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = t]_4}{\mathcal{M}\colon \ell = s + t}$$

Der Wert des Interals auf $\mathcal{M}$ wird wie folgt durch s' und t' bestimmt.
$\Pi_{\int 1}$:

$$\frac{\mathrm{ri}(s') \quad \mathrm{ri}(t') \qquad [\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi = s']_5 \qquad [\mathcal{M}\lceil_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi = t']_6}{\mathcal{M}\colon \int\pi = s' + t'}$$

Der Fall $s' > s$ ist relativ leicht zu widerlegen:
$\Pi_{s'>}$:

$$\dfrac{\dfrac{[\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : s' > s]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi \leq \ell \qquad [\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi = s']_5}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : s' \leq \ell} \qquad [\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = s]_3}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : s' \leq s}}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \bot} \qquad \mathrm{ri}(\bot)}{\mathcal{M}\colon \bot}$$

Der Fall $s' < s$ wird durch folgenden Beweisbaum $\Pi_{s'<}$ behandelt
$\Pi_{s'<}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : s' < s]_1}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : s' + t' < s + t'} \qquad \mathrm{ri}(s' + t' < s + t')}{\mathcal{M}\colon s' + t' < s + t'} \qquad \Pi_1}{\mathcal{M}\colon s' + t' < s + t} \qquad \Pi_{\ell 1}}{\mathcal{M}\colon s' + t' < \ell}$$

Mit diesem Ergebnis und der Prämisse $\mathcal{M}\colon \lceil\pi\rceil$ lässt sich der Widerspruch folgern:
$\Pi_{\perp 1}$:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_{s'<}}{\mathcal{M}\colon s' + t' < \ell} \qquad \dfrac{\Pi_{\int 1}}{\mathcal{M}\colon \int\pi = s' + t'} \qquad \mathrm{cf}(s' + t' < \ell)}{\mathcal{M}\colon \int\pi < \ell} \qquad \dfrac{\dfrac{[\mathcal{M}\colon \lceil\pi\rceil]_{14}}{\mathcal{M}\colon \int\pi = \ell \wedge \ell > 0}}{\mathcal{M}\colon \int\pi = \ell}}{\mathcal{M}\colon \bot}$$

Diese beiden Ergebnisse lassen sich mit der folgenden Oder-Elimination vereinen:

$\Pi_{\vee 1}$:

$$\dfrac{\dfrac{[\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \neg(s' = s)]_2}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : s' < s \vee s' > s} \quad \begin{array}{c}[\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : s' < s]_1 \\ \Pi_{s'<} \\ \mathcal{M} \colon \bot\end{array} \quad \begin{array}{c}[\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : s' > s]_1 \\ \Pi_{s'>} \\ \mathcal{M} \colon \bot\end{array}}{\dfrac{\mathcal{M} \colon \bot}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : s' = s}\,\mathrm{RAA}_2}\,\vee\mathrm{E}_1$$

Durch entsprechende Substitutionen lässt sich hiermit $\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi = \ell$ folgern.
$\Pi_{\ell\int 1}$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_{\vee 1} \\ \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : s' = s\end{array} \quad [\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell = s]_3}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : s' = \ell} \quad [\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi = s']_5}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi = \ell}$$

Die Annahmen über s, s',t und t' müssen mit den abgeleiteten Regeln ℓE und $\int$E entfernt werden:
$\Pi_{\mathrm{E}1}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_{\ell\int 1} \\ \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi = \ell\end{array}}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi = \ell}\,\ell\mathrm{E}_3}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi = \ell}\,\ell\mathrm{E}_4}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi = \ell}\,\int\mathrm{E}_5}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi = \ell}\,\int\mathrm{E}_6$$

Eine weitere Annahme, die später durch eine Chop-Eliminaton entfernt wird, liefert das gewünschte Ergebnis für dieses Teilpolyeder:
$\Pi_{\lfloor}$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_{\mathrm{E}1} \\ \mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi = \ell\end{array} \quad [\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \ell > 0]_{13}}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \int\pi = \ell \wedge \ell > 0}}{\mathcal{M}\lfloor_{\vec{d}}^{\vec{m}} : \lceil\pi\rceil}$$

Entsprechende Ableitungen müssen nun für das andere Teilpolyeder durchgeführt werden. Der Übersicht halber werden die Volumen bzw. die Werte der Teilpolyeder mit den selben Variablen bezeichnet.

Π_2:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi \leq \ell} \quad [\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = s']_{11}}{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : s' \leq \ell} \quad [\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = s]_9}{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : s' \leq s} \qquad \mathrm{ri}(s + t' + \leq s + t)}{\mathcal{M}\colon s' + t \leq s + t}$$

Die Werte des Volumens bzw. des Integrals auf $\mathcal{M}$ werden wie oben gefolgert.
$\Pi_{\ell 2}$:

$$\dfrac{\mathrm{ri}(s) \quad \mathrm{ri}(t) \qquad [\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = s]_9 \qquad [\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = t]_{10}}{\mathcal{M}\colon \ell = s + t}$$

$\Pi_{\int 2}$:

$$\dfrac{\mathrm{ri}(s') \quad \mathrm{ri}(t') \qquad [\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = s']_{11} \qquad [\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = t']_{12}}{\mathcal{M}\colon \int\pi = s' + t'}$$

Der Fall $t' > t$ wird analog behandelt:
$\Pi_{t'>}$:

$$\dfrac{\dfrac{[\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : t' > t]_7 \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi \leq \ell} \quad [\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = t']_{12}}{\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : t' \leq \ell} \quad [\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = t]_{10}}{\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : t' \leq t}}{\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \bot} \qquad \mathrm{ri}(\bot)}{\mathcal{M}\colon \bot}$$

Auch der andere Fall entspricht weitgehend dem obigen.
$\Pi_{t'<}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : t' < t]_1}{\mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : s' + t' < s' + t} \quad \mathrm{ri}(s' + t' < s' + t)}{\mathcal{M}\colon s' + t' < s' + t} \qquad \Pi_2}{\mathcal{M}\colon s' + t' < s + t} \qquad \Pi_{\ell 2}}{\mathcal{M}\colon s' + t' < \ell}$$

Auch der Widerspruch folgt analog zur ersten Betrachtung.

$\Pi_{\perp 2}$:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_{t'<}}{\mathcal{M}\colon s'+t'<\ell} \qquad \dfrac{\Pi_{\int 2}}{\mathcal{M}\colon \int\pi = s'+t'} \qquad \mathrm{cf}(s'+t'<\ell)}{\mathcal{M}\colon \int\pi < \ell} \qquad \dfrac{\dfrac{[\mathcal{M}\colon \lceil\pi\rceil]_{14}}{\mathcal{M}\colon \int\pi = \ell \wedge \ell > 0}}{\mathcal{M}\colon \int\pi = \ell}}{\mathcal{M}\colon \perp}$$

Durch Substitutionen und Odereliminationen sowie den abgeleiteten Regeln ℓE und $\int$E folgt das gewünschte Ergebnis wie in Fall 1.

$\Pi_{\vee 2}$:

$$\dfrac{\dfrac{[\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \neg(t'=t)]_8}{\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : t'<t \vee t'>t} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : t'<t]_7 \\ \Pi_{t'<} \\ \mathcal{M}\colon \perp\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : t'>t]_7 \\ \Pi_{t'>} \\ \mathcal{M}\colon \perp\end{array}}{\dfrac{\mathcal{M}\colon \perp}{\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : t'=t}\,\mathrm{RAA}_8}\,\vee\mathrm{E}_7$$

$\Pi_{\ell\int 2}$:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_{\vee 2}}{\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : t'=t} \qquad [\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell = t]_{10}}{\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : t'=\ell} \qquad [\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = t']_{12}}{\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell}$$

$\Pi_{\mathrm{E}2}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_{\ell\int 2}}{\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell}}{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell}\,\ell\mathrm{E}_9}{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell}\,\ell\mathrm{E}_{10}}{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell}\,\int\mathrm{E}_{11}}{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell}\,\int\mathrm{E}_{12}$$

Abschließend erhält man durch eine Annahme der Form $\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell > 0$ wiederum $\Pi_{\restriction}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_{\mathrm{E}2}}{\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell} \qquad [\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \ell > 0]_{13}}{\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \int\pi = \ell \wedge \ell > 0}}{\mathcal{M}\restriction^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \lceil\pi\rceil}$$

Als letzte Schritte werden der neue Chop-Operator eingeführt und die letzten Annahmen entfernt. Hierbei ist zu beachten, dass die durchgeführte Chop-Elimination die Nebenbedingung besitzt, dass der Punkt $\vec{m}$ nicht frei ein einer Annahme vorkommen darf, auf der die zu folgernde Formel basiert. Deshalb müssen die abgeleiteten Regeln an den angegebenen Stellen des Beweises angewandt werden.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathcal{M}\colon \lceil\pi\rceil]_{14}}{\mathcal{M}\colon \int\pi = \ell \wedge \ell > 0}}{\mathcal{M}\colon \ell > 0}}{\mathcal{M}\colon \ell > 0 \langle\vec{d}\rangle\, \ell > 0} \qquad \dfrac{\Pi_{\downarrow} \qquad \Pi_{\uparrow}}{\mathcal{M}\lfloor^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \lceil\pi\rceil \qquad \mathcal{M}\lceil^{\vec{m}}_{\vec{d}} : \lceil\pi\rceil}}{\mathcal{M}\colon \lceil\pi\rceil \langle\vec{d}\rangle \lceil\pi\rceil}\ \langle\vec{d}\rangle\,\mathrm{E}_{13}}{\dfrac{\mathcal{M}\colon \lceil\pi\rceil \langle\vec{d}\rangle \lceil\pi\rceil}{\mathcal{M}\colon \lceil\pi\rceil \to \lceil\pi\rceil \langle\vec{d}\rangle \lceil\pi\rceil}\to \mathrm{I}_{14}}$$

6 Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine abstrahierte Fassung des Shape Calculus vorgestellt und ein Beweissystem dafür entwickelt. Anschließend wurden die Besonderheiten des Shape Calculus in diese Abstraktion mit aufgenommen und das Beweissystem entsprechend erweitert. In beiden Systemen wurde die Korrektheit der einzelnen Regeln gezeigt, wodurch auch die Korrektheit des Systems bewiesen wurde. Die Anwendbarkeit des Beweissystems wurde durch zwei Beispiele belegt.

Da die Betrachtung der Vollständigkeit des vorgestellten Kalküls nicht in den zeitlichen Rahmen dieser Arbeit passte, bleibt die Frage, inwieweit ein korrektes und vollständiges Kalkül des natürlichen Schließens für den Shape Calculus definiert werden kann. Weiterhin wurde die Möglichkeit außer acht gelassen, Variablen und Terme mit mehrdimensionalen Matrizen zu identifizieren, wie in [Sch06]. Durch eine solche Erweiterung wären auch Transformationen eines n-dimensionalen Polyeders auf Ebenen bzw. Polyeder niedriger Dimensionen möglich.

Die vorgestellten Beispiele zeigen sowohl die Vorzüge, als auch die Beschränkungen des Systems. So sind einzelne Ableitungsschritte leicht nachzuvollziehen, da die Regeln des Beweissystems sehr einfach und intuitiv gehalten sind. Deshalb müssen aber auch für einfache Beweise sehr viele Regeln angewandt werden, wodurch die Beweise groß und unübersichtlich werden.

Im Gegensatz zu Hilbert-Systemen jedoch, die sehr häufig für ein erstes Beweissystem für eine Logik genutzt werden, ist die Anwendung einer Regel eindeutig bestimmt. Ein Beweissystem nach Hilbert basiert auf Axiomenschemata, die unendlich viele Instanzen besitzen. Für eine Ableitung müssen passende Instanzen gefunden werden, aus deren Eigenschaften sich die gewünschte Formel herleiten lässt. In dem hier vorgestellten Kalkül des natürlichen Schließens hingegen bestimmt die Form der herzuleitenden Formel die zu benutzenden Regeln. Dadurch wird die Menge an Regeln, welche bei einem Beweis anwendbar sind, stark eingeschränkt. Weiterhin erhöht die Baumstruktur eines Beweises die Übersichtlichkeit, wogegen Ableitungen in Hilbert-Systemen normalerweise in Form einer Liste notiert werden.

Die Tatsachen, dass die Beweise im hier vorgestellten Kalkül recht groß werden, die Auswahl der anzuwendenden Regeln aber sehr schematisch verläuft, legt eine Einbindung in einem automatischen Theorembeweiser wie Isabelle [NPW02] nahe. Da eine Implementierung in Isabelle schon für den Duration Calculus bzw. Signed Interval Logic durchgeführt wurde [Ras02] und der Shape Calculus eine konservative Erweiterung des DC ist, erscheint eine Umsetzung des Beweissystems für den Shape Calculus in Isabelle erfolgversprechend.

Literaturverzeichnis

[BHS07] B. Beckert, R. Hähnle, and P.H. Schmitt, editors. *Verification of Object-Oriented Software: The KeY Approach*. LNCS 4334. Springer-Verlag, 2007.

[BMV96] D. Basin, S. Matthews, and L. Viganò. Natural deduction for non-classical logics. Technical Report MPI-I-96-2-006, Max-Planck-Institute, Im Stadtwald, D-66123 Saarbrücken, Germany, 1996.

[Dut95] B. Dutertre. Complete proof systems for first order interval temporal logic. In *Logic in Computer Science*, pages 36–43, 1995.

[ECS99] ERTMS/ETCS functional requirements specification, 1999.

[Gab96] D.M. Gabbay. *Labelled Deductive Systems*, volume I. Oxford University Press, 1996.

[Gen35] G. Gentzen. Untersuchungen über das logische Schließen I,II. In *Mathematische Zeitschrift*, volume 39, pages 176–210,405–431, 1935.

[Heu06] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis Teil 1.* B. G. Teubner, 15 edition, 2006.

[NPW02] T. Nipkow, L.C. Paulson, and M. Wenzel. *Isabelle/HOL — A Proof Assistant for Higher-Order Logic*, volume 2283 of *LNCS*. Springer, 2002.

[Pra65] D. Prawitz. *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study.* Almqvist & Wiksell, Stockholm, Sweden, 1965.

[Ras02] T.M. Rasmussen. *Interval Logic. Proof theory and theorem proving.* PhD thesis, Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU, Richard Petersens Plads, Building 321, DK-2800 Kgs. Lyngby, 2002.

[Sch06] A. Schäfer. *Specification and Verification of Mobile Real-Time Systems.* PhD thesis, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Dezember 2006.

[vD04] D. van Dalen. *Logic and Structure.* Springer-Verlag, fourth edition, 2004.

[ZH04] Zhou C. and M.R. Hansen. *Duration Calculus: A Formal Approach to Real-Time Systems.* EATCS: Monographs in Theoretical Computer Science. Springer, 2004.

[ZHR91] Zhou C., C.A.R. Hoare, and A.P. Ravn. A calculus of durations. *Inf. Process. Lett.*, 40(5):269–276, 1991.