OER Selbsttest Mathematik - Aufgaben

Jabe Peters

December 10, 2025

Du hast Lust auf das **Informatikstudium** und möchtest gerne wissen, ob du die passenden **Mathematikkenntnisse** dafür hast? Dann bist du hier genau richtig! Wir haben die Mathedozierenden unserer Uni gefragt, was sie sich von Studienanfänger*innen wünschen, und daraus eine Aufgabensammlung erstellt, die dir helfen soll einzuschätzen, auf welchem Stand du bist.

Der Umfang der Aufgaben mag auf den ersten Blick erheblich sein, aber lass dich davon nicht entmutigen! Du musst nicht alles perfekt können. Der Test soll dir einen **Überblick** geben, welche Themen du beherrschst und welche du dir vor oder während deines Studiums genauer anschauen solltest.

Einige Kapitel enthalten kurze Erklärungen, um deinem Wissen auf die Sprünge zu helfen - solltest du trotzdem Schwierigkeiten haben, besuche gerne den **Mathevorkurs** der Fachschaft Informatik. Dieser ist für alle empfehlenswert, auch um erste Kontakte zu knüpfen. Die Fachschaft und die Tutor*innen unterstützen dich immer gerne!

Du brauchst für diesen Test weder einen Taschenrechner noch sonstige Hilfsmittel, aber halte einen Stift und Papier bereit.

Und jetzt: **Viel Spaß beim Ausprobieren!**

Übersicht

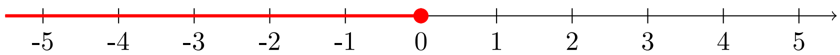
1 Begriffe, Symbole, Notation

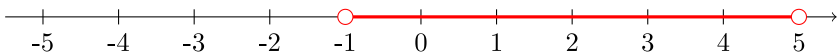
Hinweis zur Notation von Intervallen:

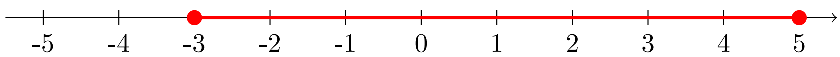
- Liegen die Grenzen eines Intervalls im Intervall, dann sprechen wir von einem abgeschlossenem Intervall und benutzen eckige Klammern [und]. Beispiel: $I = [0; 1]$.
- Liegen die Grenzen eines Intervalls nicht im Intervall, dann sprechen wir von einem offenen Intervall und benutzen runde Klammern (und). Beispiel: $I = (-1; 3)$.
- Ist eine Seite eines Intervalls offen und die andere abgeschlossen, so sprechen wir von einem halboffenen Intervall. Beispiele: $[0; 1)$, $(-\infty; 0]$, $[1; \infty)$.
- Auf einem Zahlenstrahl markieren wir einen Punkt mit einem ausgefüllen Kreis $\bullet$, wenn er in dem Intervall liegt, und mit einem nicht ausgefüllten Kreis $\circ$ wenn er nicht im Intervall liegt.

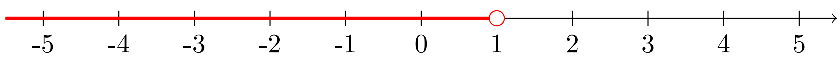
1.1 Aufgabe: Abschnitte auf dem Zahlenstrahl

Wähle die richtige Notation und die passende Skizze aus.

Skizze 1:


Skizze 2:


Skizze 3:


Skizze 4:


(i) x ist kleiner oder gleich 0.
☐ $x < 0$
☐ $x \leq 0$
☐ $x > 0$
☐ $x \geq 0$
Skizze: ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

(ii) x ist größer als -1 und kleiner als 5.
☐ $x < -1$
☐ $x \leq 5$
☐ $-1 < x < 5$
☐ $-1 > x > 5$
Skizze: ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

(iii) I ist ein abgeschlossenes Intervall mit unterer Grenze -3 und oberer Grenze 5.
☐ $[5; -3]$
☐ $-3 \leq I \leq 5$
☐ $I \leq [-3; 5]$
☐ $I = [-3; 5]$
Skizze: ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

(iv) I ist ein offenes Intervall, dessen obere Grenze 1 nicht in I liegt, und das keine untere Grenze besitzt.
☐ $I = (-\infty; 1)$
☐ $[\infty; 1)$
☐ $I = (-\infty; 1]$
☐ $I = (0; 1)$
Skizze: ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

1.2 Aufgabe: Symbole

Wähle die richtige Antwort aus.

(i) Welches Symbol steht für die Summe? ☐ χ ☐ $\sum$ ☐ $\int$ ☐ $\prod$

(ii) Welches Symbol steht für das Produkt? ☐ $\prod$ ☐ $\bigotimes$ ☐ X ☐ $\sum$

(iii) Welches Symbol steht für ein Integral? ☐ $\sum$ ☐ $\int$ ☐ $\prod$ ☐ χ

(iv) Welches Symbol steht für die Natürlichen Zahlen? ☐ $\mathbb{Z}$ ☐ $\mathcal{A}$ ☐ $\mathcal{Z}$ ☐ $\mathbb{N}$

(v) Welches Symbol steht für die Reellen Zahlen? ☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{Z}$ ☐ $\mathbb{Q}$ ☐ $\mathbb{R}$

1.3 Aufgabe: Notation

Wähle die richtige Notation aus:

(i) s ist die Summe über -1 hoch n von i gleich Null bis n.

☐ $s = \sum_{i} (-1)^i$ ☐ $n = \prod_{i=0}^{s} -1$ ☐ $s = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n$ ☐ $n = \sum_{i=-1}^{n} s$

(ii) p ist das Produkt aller natürlichen Zahlen, die größer als oder gleich 2 sind.

☐ $n = \prod^{\infty} 2$ ☐ $p = \prod_{i=2}^{\infty} i$ ☐ $p = \prod_{i=1}^{n} i$ ☐ $p = \sum_{i=2}^{n} i$

2 Elementares Rechnen

Hinweis: Achte auf Vorzeichen, Klammern und Punkt-vor-Strich-Rechnung.

Erinnerung: Assoziativ, Distributiv, Kommutativ
Für reelle Zahlen a, b und c gelten die folgenden Gesetze.

Assoziativgesetz:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Kommutativgesetz:

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Erinnerung: Binomische Formeln.
Für alle reellen Zahlen a und b gelten die folgenden Formeln.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Erinnerung: Potenzgesetze.
Für alle reellen Zahlen x und y sowie natürliche Zahlen a und b gelten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}x^0 &= 1\\ x^a \cdot x^b &= x^{a+b}\\ x^a : x^b &= \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}\\ (x^a)^b &= x^{a \cdot b}\\ x^{-a} &= \frac{1}{x^a}\end{aligned}$$

Erinnerung: Wurzelgesetze.
Für alle reellen Zahlen x und y sowie natürliche Zahlen m und n gelten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{x^m} &= x^{\frac{m}{n}}\\ \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} &= \sqrt[n]{x \cdot y}\\ \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} &= \sqrt[n]{\frac{x}{y}}\\ \left(\sqrt[n]{x}\right)^m &= \sqrt[n]{x^m}\end{aligned}$$

2.1 Aufgabe: Klammern und Vorzeichen

Vereinfache die Ausdrücke und wähle das richtige Ergebnis aus.

(i) $-(2a+b-(3a-(-4b)))$
☐ $a-b$
☐ $a+3b$
☐ $-a-3b$
☐ $-5a+b$

(ii) $4xy-(y(x-2)+5y)$
☐ $3y(x-1)$
☐ $3xy+7y$
☐ $(xy-3)y$
☐ $xy(x-3)$

(iii) $6+z(z-6)+(2+1)(2-1)$
☐ z^2
☐ $9-z^2$
☐ $(3-z)^2$
☐ $(6-z)^2$

2.2 Aufgabe: Binomische Formeln

Forme den Ausdruck mithilfe der binomischen Formeln um:

$$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \quad \square\ \frac{x-3}{x+3} \quad \square\ \frac{x-9}{x-3} \quad \square\ \frac{x^2-9}{x+3} \quad \square\ \frac{x+3}{x-3}$$

2.3 Aufgabe: Potenzen

Fasse den Ausdruck zusammen und wähle das richtige Ergebnis aus:

$$x^2x^3 + \left(x^2\right)^4 + \frac{x^7}{x^2} + x^3x + \left(\left(x^2\right)^2\right)^2 + x^0 + \frac{x^{12}}{x^7} + x^4x^{-4}$$

☐ $2x^8+3x^5+x^4+2$
☐ $x^8+3x^4+2x^2+1$
☐ $3x^6+2x^5+x^3+2$
☐ $2x^7+2x^4+x^2+1$

2.4 Aufgabe: Wurzeln

Vereinfache den Ausdruck:

$$\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^7}} = \quad \square\ 1 \quad \square\ x \quad \square\ \sqrt{x} \quad \square\ \sqrt{x^3}$$

3 Bruchrechnung

Hinweis:
Achte auf Vorzeichen, Klammern und Punkt-vor-Strich-Rechnung.

Erinnerung: Rechenregeln für Brüche.
Für reelle Zahlen a, b, c und d mit $b, d \neq 0$ gilt:
Addition:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Multiplikation:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Division für $c \neq 0$:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Negation:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

3.1 Aufgabe: Brüche addieren und multiplizieren

Fasse die folgenden Ausdrücke zusammen. Multipliziere dabei alle Klammern aus, und kürze so weit wie möglich. Wähle das richtige Ergebnis aus.

(i) $\frac{2a}{b} + \frac{c}{2d} = ?$

☐ $\frac{2ac}{bd}$ ☐ $\frac{4ad}{bc}$ ☐ $\frac{2a+c}{2bd}$ ☐ $\frac{4ad+bc}{2bd}$

(ii) $\frac{2a+b}{c} + \frac{a+4b}{d} = ?$

☐ $\frac{3a+5b}{c+d}$ ☐ $\frac{2ad+bd+ac+4bc}{cd}$ ☐ $\frac{3a+bd+ac+8ab}{c+d}$ ☐ $\frac{2ad+3a+4ac+b^2}{cd}$

(iii) $\frac{2a+b}{c} \cdot \frac{a+4b}{d} = ?$

☐ $\frac{3a+5b}{cd}$ ☐ $\frac{2a^2+4b^2}{cd}$ ☐ $\frac{2a^2+9ab+4b^2}{cd}$ ☐ $\frac{3a^2+ab+5b^2}{cd}$

3.2 Aufgabe: Klammern und Vorzeichen bei Brüchen

Fasse die folgenden Ausdrücke zusammen. Multipliziere dabei alle Klammern aus, und kürze so weit wie möglich.

(i) $a\left(\frac{-3}{8}\right) - \left(\frac{+1}{4}\right) = ?$

☐ $\frac{-3a-1}{4}$ ☐ $\frac{-3a-1}{8}$ ☐ $\frac{-3a-2}{4}$ ☐ $\frac{-3a-2}{8}$

(ii) $a\left(\frac{-7}{3}\right) - \left(\frac{+3}{4}\right) b \left(\frac{+1}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2}{7}\right) c \left(\frac{+2}{5}\right) : \left(\frac{-3}{5}\right) = ?$

☐ $\frac{-28a-bc}{7}$ ☐ $\frac{-49a-bc}{21}$ ☐ $\frac{-7a+bc}{3}$ ☐ $\frac{21a+bc}{7}$

3.3 Aufgabe: Brüche und Potenzen

Vereinfache den folgenden Ausdruck und wähle das richtige Ergebnis aus:

$$\left(\frac{a^3 \cdot b}{c \cdot d^2}\right)^4 : \left(\frac{a \cdot b^2}{c^2 \cdot d^3}\right)^3 = \qquad \square\ \frac{a^3 \cdot b^2 \cdot d^4}{c^2} \qquad \square\ \frac{a^9 \cdot c^2 \cdot d}{b^2} \qquad \square\ \frac{a^3 \cdot b^4}{c^3 \cdot d^5} \qquad \square\ \frac{a^4 \cdot b^2 \cdot c^4}{d^4}$$

3.4 Aufgabe: Auf einen Bruch bringen I

Fasse den folgenden Ausdruck zu einem Bruch zusammen und wähle das richtige Ergebnis aus:

$$1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \qquad \square\ \frac{1}{1-x} \qquad \square\ \frac{x}{1-x} \qquad \square\ \frac{x^2}{1-x} \qquad \square\ \frac{1-x}{1+x}$$

3.5 Aufgabe: Auf einen Bruch bringen II

Forme den folgenden Ausdruck so um, dass das Ergebnis nur noch einen Bruchstrich enthält, und wähle das richtige Ergebnis aus:

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + y} = \qquad \square\ \frac{1}{x+y} \qquad \square\ \frac{y}{x+y} \qquad \square\ \frac{1}{1+xy} \qquad \square\ \frac{x}{1+xy}$$

3.6 Aufgabe: Erweitern und Kürzen

Kürze den folgenden Bruch mit n^2, sodass im ganzen Bruch n^2 noch höchstens ein Mal vorkommt, und wähle das richtige Ergebnis aus.

$$\frac{3n^2+1}{4n^2-2n} = \qquad \square\ \frac{3+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{2}{n}} \qquad \square\ \frac{3+1}{4-2n} \qquad \square\ \frac{3+\frac{1}{n^2}}{4n-2} \qquad \square\ \frac{3+\frac{1}{n}}{4-\frac{2}{n}}$$

4 Umstellen und Lösen von Gleichungen

Erinnerung: Quadratische Ergänzung.
Gegeben sei eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + cx = d$ mit c und d reelle Zahlen. Wir erinnern uns an die erste binomische Formel $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ und wollen die rechte Seite der quadratischen Gleichung in die Form $x^2 + 2ax + a^2$ bringen. Dafür gehen wir wie folgt vor:

$$\begin{aligned}
x^2 + cx &= d && \mid c = 2a \\
x^2 + 2ax &= d \\
x^2 + 2ax + 0 &= d \\
\underbrace{x^2 + 2ax + a^2}_{(x+a)^2} - a^2 &= d \\
(x + a)^2 - a^2 &= d && \mid +a^2 \\
(x + a)^2 &= d + a^2 && \mid \sqrt{\cdots} \\
x + a = \sqrt{d + a^2} \quad &\vee \quad x + a = -\sqrt{d + a^2} && \mid -a \\
x = \sqrt{d + a^2} - a \quad &\vee \quad x = -\sqrt{d + a^2} - a
\end{aligned}$$

Hinweis: Sind c und damit auch a negativ, nutzt man die zweite binomische Formel.

Erinnerung: pq-Formel.
Gegeben sei eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$, dann sind

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

zwei mögliche Lösungen. Hinweis: p und q sind reelle Zahlen, heißt sie können auch negativ sein.

Erinnerung: Substitution.
Gegeben sei eine Gleichung der Form $x^4 + x^2 + a = 0$, dann kann man $t = x^2$ substituieren und erhält die quadratische Gleichung $t^2 + t + a = 0$, die man dann mit quadratischer Ergänzung oder der pq-Formel lösen kann. Man erhält etwas der Form $t = b \vee t = c$, führt die Rücksubstitution $t = x^2$ durch, und zieht die Wurzel. Achte darauf, dass $x^2 = b$ bzw. $x^2 = c$ eine reelle Lösung besitzt - dies ist nicht der fall, wenn b bzw. c negativ ist.

Erinnerung: Faktorisierung.
Für die Faktorisierung $(x - a) \cdot (x - b) \cdot ...$ eines Terms gilt, dass diese genau dann 0 ist, wenn mindestens einer der Faktoren $(x - a), (x - b), ...$ gleich 0 ist:

$$(x - a) \cdot (x - b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - a = 0 \ \vee \ x - b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = a \ \vee \ x = b$$

4.1 Aufgabe: Brüche nach x auflösen

Löse die folgenden Gleichungen nach x auf und wähle die richtige Lösung aus.

(i) $z = \dfrac{1-x}{1+x}$

☐ $x = 1 - z$ ☐ $x = \dfrac{1}{z}$ ☐ $x = \dfrac{1-z}{1+z}$ ☐ $x = \dfrac{1+z}{1-z}$

(ii) $\dfrac{2x+y}{3} + \dfrac{z-x}{4} = \dfrac{5}{6}$

☐ $x = 2 - 4y - 3z$ ☐ $x = 10 - 4y - 3z$ ☐ $x = \dfrac{2-4y-3z}{6}$ ☐ $x = \dfrac{10-4y-3z}{5}$

4.2 Aufgabe: Wurzeln nach x auflösen

Löse $\sqrt{6+2x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1-x}$ nach x auf und wähle die richtige Lösung aus.

☐ $x = -3$ ☐ $x = -1$ ☐ $x = 0$ ☐ $x = 2$

4.3 Aufgabe: Quadratische Gleichungen

Löse die folgenden Gleichungen mithilfe quadratischer Ergänzung, pq-Formel oder Substitution, und wähle alle richtigen Lösungen aus.

(i) $x^2 + 2x = 3$ ☐ $x = -3$ ☐ $x = 0$ ☐ $x = 1$ ☐ $x = 2$

(ii) $18x^2 - 9x + 1 = 0$ ☐ $x = \frac{1}{2}$ ☐ $x = \frac{1}{3}$ ☐ $x = \frac{1}{6}$ ☐ $x = \frac{1}{12}$

(iii) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ ☐ $x = -2$ ☐ $x = -1$ ☐ $x = 1$ ☐ $x = 2$

4.4 Aufgabe: Faktorisierung

Welche der Aussagen über die folgende Gleichung sind wahr?

$$(x-1) \cdot (x - \sqrt{2}) \cdot (x^2 - 4) = 0$$

☐ $x = 1$ und $x = 2$ sind Lösungen.
☐ $x = 2$ und $x = 3$ sind Lösungen.
☐ $x \approx 1,4142$ und $x = 2$ sind Lösungen.
☐ Es gibt genau vier Lösungen.

5 Lineare Gleichungssysteme

Erinnerung: Einsetzungsverfahren.

$$\begin{cases} \quad x - y = -1 & L_1 \\ -2x - y = 3 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_1 \text{ nach } x \text{ umformen:} \quad & x = y - 1 \\ \text{Einsetzen in } L_2\text{:} \quad & 3 = -2x - y = -2(y-1) - y = -2y + 2 - y = -3y + 2 \\ \text{Nach } y \text{ umformen:} \quad & 3 = -3y + 2 \quad \Rightarrow \quad -3y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3} \\ \text{Rückwärtseinsetzen in } L_1\text{:} \quad & x = y - 1 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Gegeben ist das folgende LGS, bestehend aus zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ -2x - y &= 3 \end{aligned}$$

Schritt 1: Die erste Gleichung nach x umformen:

$$\begin{aligned} x - y &= -1 && \mid +y \\ x &= -1 + y \\ x &= y - 1 \end{aligned}$$

Schritt 2: Einsetzen von $x = y - 1$ in die zweite Gleichung und nach y umformen:

$$\begin{aligned} -2x - y &= 3 && \mid x = y - 1 \\ -2(y-1) - y &= 3 && \mid \text{ausmultiplizieren} \\ -2y + 2 - y &= 3 && \mid y\text{-Terme zusammenfassen} \\ -3y + 2 &= 3 && \mid -2 \\ -3y &= 1 && \mid \cdot(-3) \\ y &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Schritt 3: Rückwärtseinsetzen von $y = -\frac{1}{3}$ aus Schritt 2 in $x = y - 1$ aus Schritt 1:

$$x = y - 1 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

Erinnerung: Additionsverfahren. Betrachte dasselbe LGS wie im Beispiel vorher:

$$\begin{cases} \quad x - y = -1 & L_1 \\ -2x - y = 3 & L_2 \end{cases}$$

Wir wollen die beiden Gleichungen L_1 und L_2 so miteinander verrechnen, dass in L_2 kein x mehr vorkommt. Dafür addieren wir die erste Zeile zwei Mal auf die zweite Zeile und ersetzen die zweite Zeile durch das Ergebnis, geschrieben als

$$L_2 \longleftarrow L_2 + 2 \cdot L_1$$

Für $2 \cdot L_1$ haben wir

$$\begin{aligned} x - y &= -1 && \mid \cdot 2 \\ 2x - 2y &= -2 \end{aligned}$$

Dann ist $L_2 + 2 \cdot L_1$

$$\begin{array}{cccccc} & -2x & -y & = & 3 \\ + & 2\text{x} & -2y & = & -2 \\ \hline & 0 & -3y & = & 1 \end{array}$$

Damit haben wir das neue LGS

$$\begin{cases} x - y = -1 & L_1 \\ - 3y = 1 & L_2 \end{cases}$$

Dies können wir dann wie beim Einsetzungsverfahren lösen.

Erinnerung: LGS aufstellen.
Haben wir eine Gleichung $ax^2 + bx + c = y$ und Punkte $P = (p_1, p_2)$ und $Q = (q_1, q_2)$ gegeben, können wir ein LGS aufstellen, indem wir die beiden Punkte in die Gleichung einsetzen:

$$a \cdot p_1^2 + b \cdot p_1 + c = p_2$$
$$a \cdot q_1^2 + b \cdot q_1 + c = q_2$$

Dieses LGS können wir lösen, um Werte für die Koeffizienten a, b und c der Gleichung zu bestimmen. Da wir aber drei Koeffizienten und nur zwei Gleichungen haben, ist das LGS unterbestimmt, und wir erhalten nicht für alle Koeffizienten feste Werte. Stattdessen wird einer beliebig aus den reellen Zahlen sein (z.B. $a \in \mathbb{R}$) und ein anderer in Abhängigkeit von diesem (z.B. $b = 2a$).

5.1 Aufgabe: LGS

Löse das folgende lineare Gleichungssystem und wähle die richtige Lösung für x, y und z aus.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 11 \\ 6x + 15y - 3z = -15 \\ -3x + y + 4z = 9 \end{cases}$$

☐ $x = -2$	☐ $y = -2$	☐ $z = 0$
☐ $x = -1$	☐ $y = -1$	☐ $z = 1$
☐ $x = 1$	☐ $y = 0$	☐ $z = 2$
☐ $x = 2$	☐ $y = 4$	☐ $z = 4$

5.2 Aufgabe: LGS mit Parameter

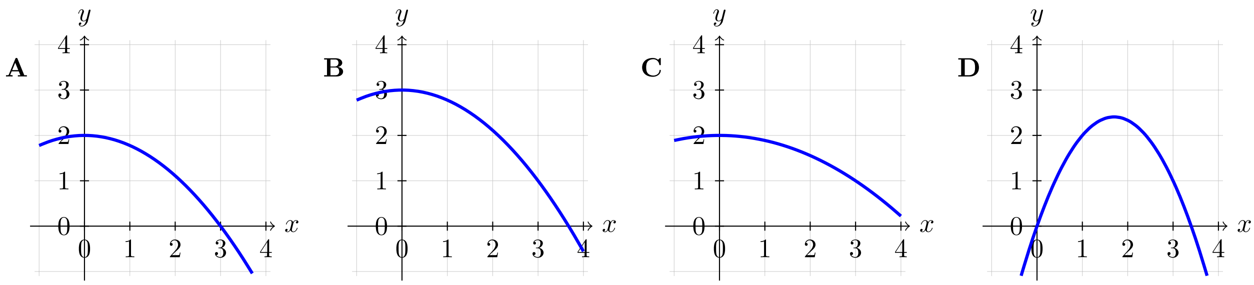
Löse das folgende LGS in Abhängigkeit vom Parameter t und wähle die richtig Lösung für x und y aus.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2t \end{cases}$$

☐ $x = 1 + t$	☐ $y = 1 - t$
☐ $x = 2 + t$	☐ $y = 2 - t$
☐ $x = t - 1$	☐ $y = t - 1$
☐ $x = t - 4$	☐ $y = t + 3$

5.3 Aufgabe: Textaufgabe

Wir wollen die Flugbahn eines geworfenen Balls betrachten. Der Ball wird in zwei Meter Höhe abgeworfen und trifft einen Korb, der drei Meter weiter weg auf einem Meter Höhe hängt.



a) Welche Skizze bildet eine mögliche Flugbahn des Balls ab? ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

b) Durch welche zwei Punkte P und Q verläuft die Parabel aus a)?

☐ $P = (0, 0)$ und $Q = (3, 2)$
☐ $P = (0, 2)$ und $Q = (3, 1)$
☐ $P = (0, 3)$ und $Q = (2, 3)$
☐ $P = (2, 1)$ und $Q = (3, 0)$

c) Durch P und Q wird keine eindeutige Parabel bestimmt, sondern eine Menge unendlich vieler Parabeln. Diese Parabeln haben die Form der allgemeinen Parabelgleichung

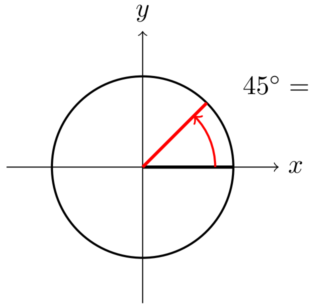
$$y = ax^2 + bx + c$$

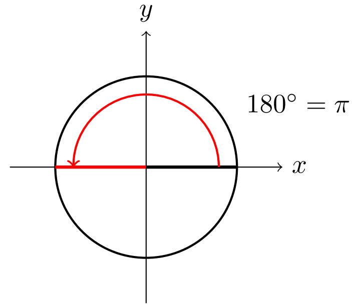
mit reellen Koeffizienten a, b und c. Stelle mithilfe der zwei Punkte P und Q ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten auf und löse es. Wähle die richtige Lösung für a, b und c aus.

☐ $a \in \mathbb{R}, \quad b = -\frac{1}{3} - 3a, \quad c = 2$
☐ $a = -\frac{1}{9} - \frac{b}{3}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad c = 0$
☐ $a \in \mathbb{R}, \quad b = -3a, \quad c = \frac{1}{2}$
☐ $a = 3c, \quad b = 2, \quad c \in \mathbb{R}$

6 Trigonometrie

Erinnerung: Grad- und Bogenmaß.
Wir können Winkel im Gradmaß, zum Beispiel $45°$ und $180°$, oder im Bogenmaß, zum Beispiel $\frac{\pi}{4}$ oder π, angeben. Zwei Skizzen zur Anschaulichkeit:





6.1 Aufgabe: Grad- zu Bogenmaß und zurück

a) Wähle für die folgenden Winkel im Gradmaß den korrekten Wert im Bogenmaß aus:

$$90° = \quad \square\ \frac{\pi}{4} \quad \square\ \frac{\pi}{2} \quad \square\ \pi \quad \square\ 2\pi$$

$$360° = \quad \square\ \pi \quad \square\ 2\pi \quad \square\ 3\pi \quad \square\ 4\pi$$

$$315° = \quad \square\ \frac{6}{5}\pi \quad \square\ \frac{5}{4}\pi \quad \square\ \frac{7}{4}\pi \quad \square\ 2\pi$$

b) Wähle für die folgenden Winkel im Bogenmaß den korrekten Wert im Gradmaß aus:

$$\pi = \quad \square\ 90° \quad \square\ 100° \quad \square\ 180° \quad \square\ 360°$$

$$\frac{\pi}{12} = \quad \square\ 12° \quad \square\ 15° \quad \square\ 20° \quad \square\ 30°$$

$$\frac{2}{3}\pi = \quad \square\ 120° \quad \square\ 150° \quad \square\ 180° \quad \square\ 200°$$

6.2 Aufgabe: Wichtige Werte von Sinus und Cosinus

a) Wähle die richtige Lösung aus:

$$\sin(2\pi) = \quad \square\ 0 \quad \square\ 1 \quad \square\ -1$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}) = \quad \square\ 0 \quad \square\ 1 \quad \square\ -1$$

$$\sin(0) = \quad \square\ 0 \quad \square\ 1 \quad \square\ -1$$

b) Wähle die richtige Lösung aus:

$$\cos(0) = \quad \square\ 0 \quad \square\ 1 \quad \square\ -1$$

$$\cos(\pi) = \quad \square\ 0 \quad \square\ 1 \quad \square\ -1$$

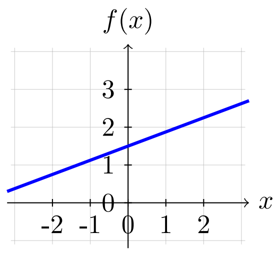
$$\cos(\frac{\pi}{2}) = \quad \square\ 0 \quad \square\ 1 \quad \square\ -1$$

7 Funktionen

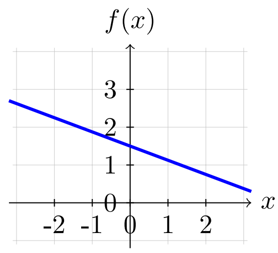
Erinnerung: Nullstellen.
Eine Stelle $x = x_0$ heißt Nullstelle einer Funktion f, falls $f(x_0) = 0$ gilt. An dieser Stelle schneidet eine Funktion die x-Achse. Zum Beispiel ist $x = 2$ eine Nullstelle von $f(x) = x - 2$, da $f(2) = 2 - 2 = 0$.

Erinnerung: Periodenlänge.
Periodische Funktionen wie Sinus und Cosinus wiederholen sich in regelmäßigen Abständen. Den kleinsten solchen Abstand nennt man Periodenlänge und kürzt ihn mit p ab. Sinus und Cosinus haben eine Periodenlänge von $p = 2\pi$.

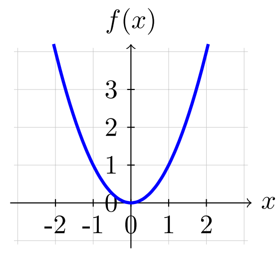
Erinnerung: Monotonie.
Eine Funktion f heißt streng monoton steigend, wenn für alle $x > x'$ auch $f(x) > f(x')$ gilt.
Eine Funktion f heißt streng monoton fallend, wenn für alle $x > x'$ gilt: $f(x) < f(x')$.



streng monoton steigend



streng monoton fallend

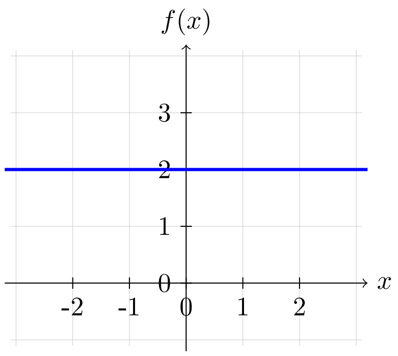


weder streng monoton steigend noch fallend

7.1 Aufgabe: Geraden und Parabeln

Wähle für jede Skizze die passende Funktion aus und lese die Nullstellen ab.

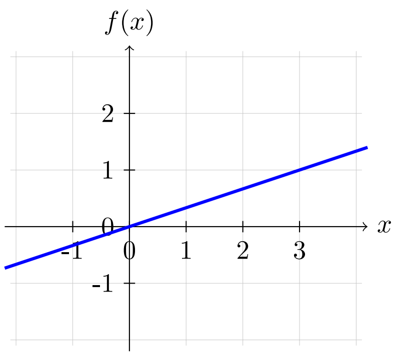
a)



☐ $f(x) = 0$
☐ $f(x) = 2$
☐ $f(x) = 2x$
☐ $x = 0$

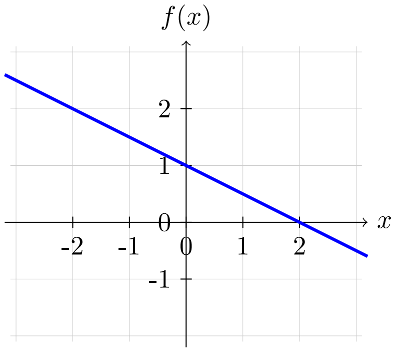
☐ Es gibt keine Nullstellen.
☐ $x = 0$
☐ $x = 2$
☐ $x = 0$ und $x = 2$

b)

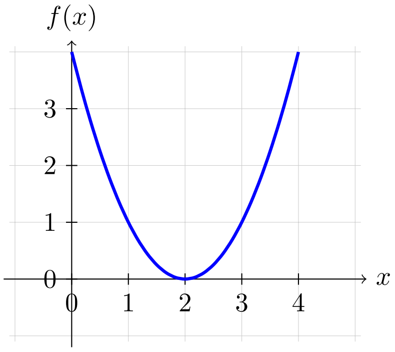


☐ $f(x) = x + 3$
☐ $f(x) = 2x$
☐ $f(x) = 3x$
☐ $f(x) = \frac{1}{3}x$

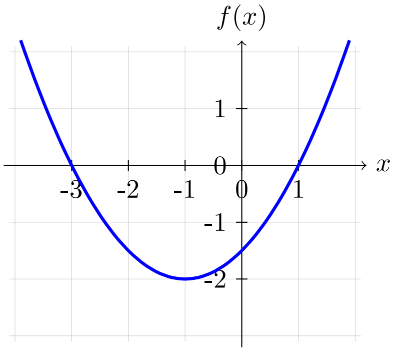
☐ Es gibt keine Nullstellen.
☐ $x = 0$
☐ $x = 3$
☐ $x = 0$ und $x = 3$

c) 

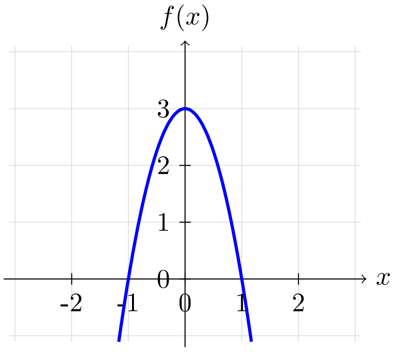
☐ $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ ☐ Es gibt keine Nullstellen.
☐ $f(x) = -2x$ ☐ $x = 1$
☐ $f(x) = 2x + 1$ ☐ $x = 2$
☐ $f(x) = -\frac{1}{2}x$ ☐ $x = 1$ und $x = 2$

d) 

☐ $f(x) = x^2 + 2$ ☐ Es gibt keine Nullstellen.
☐ $f(x) = x^2 - 2$ ☐ $x = 0$
☐ $f(x) = (x-2)^2$ ☐ $x = 2$
☐ $f(x) = (x-2)^2 + 2$ ☐ $x = 2$ und $x = -2$

e) 

☐ $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$ ☐ Es gibt keine Nullstellen.
☐ $f(x) = (x-1)^2 - 2$ ☐ $x = -1$
☐ $f(x) = 2(x+1)^2 - 2$ ☐ $x = -2$
☐ $f(x) = (x-3)^2 + 1$ ☐ $x = 1$ und $x = -3$

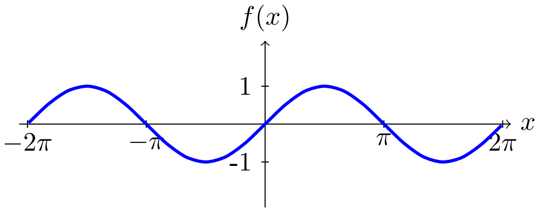
f) 

☐ $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 3$ ☐ Es gibt keine Nullstellen.
☐ $f(x) = (3-x)^2 - 3$ ☐ $x = 0$
☐ $f(x) = -x^2 + 3$ ☐ $x = 3$
☐ $f(x) = -3x^2 + 3$ ☐ $x = 1$ und $x = -1$

7.2 Aufgabe: Sinus und Cosinus

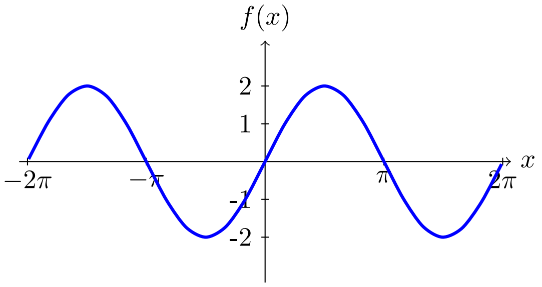
Wähle für jede Skizze die passende Funktion aus und lese die Periodenlänge p ab.

a)



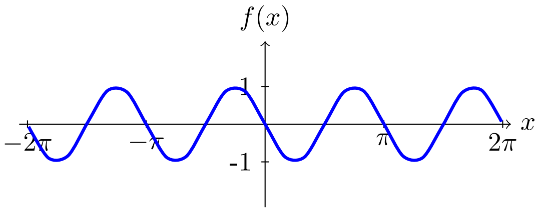
☐ $f(x) = \sin(x)$	☐ $p = 2$
☐ $f(x) = \cos(x)$	☐ $p = \pi$
☐ $f(x) = \sin(2x)$	☐ $p = 2\pi$
☐ $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$	☐ $p = 4\pi$

b)



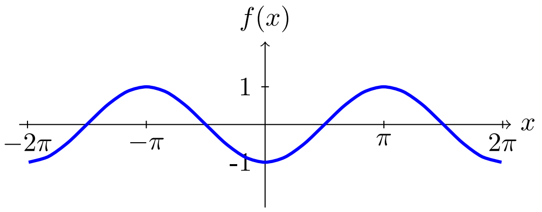
☐ $f(x) = \sin(x)$	☐ $p = \pi$
☐ $f(x) = \sin(2x)$	☐ $p = 2\pi$
☐ $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$	☐ $p = 4$
☐ $f(x) = 2 \cdot \cos(x)$	☐ $p = 4\pi$

c)



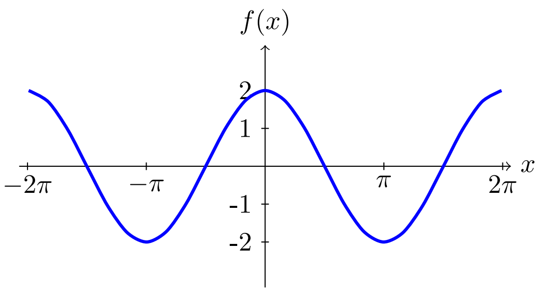
☐ $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$	☐ $p = \frac{\pi}{2}$
☐ $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$	☐ $p = 2$
☐ $f(x) = -\sin(2x)$	☐ $p = \pi$
☐ $f(x) = \cos(x)$	☐ $p = 2\pi$

d)



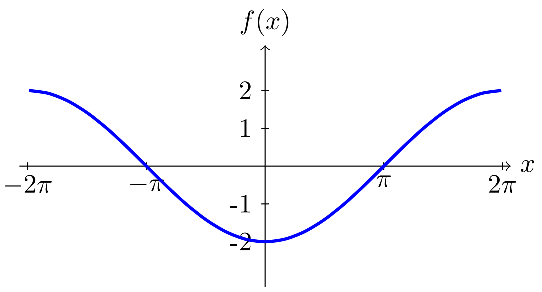
☐ $f(x) = -\sin(x)$	☐ $p = 2$
☐ $f(x) = -\cos(x)$	☐ $p = \pi$
☐ $f(x) = \cos(x)$	☐ $p = 2\pi$
☐ $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$	☐ $p = 4\pi$

e)



☐ $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$	☐ $p = 2$
☐ $f(x) = \cos(x)$	☐ $p = \pi$
☐ $f(x) = \cos(2x)$	☐ $p = 2\pi$
☐ $f(x) = 2 \cdot \cos(x)$	☐ $p = 3\pi$

f)

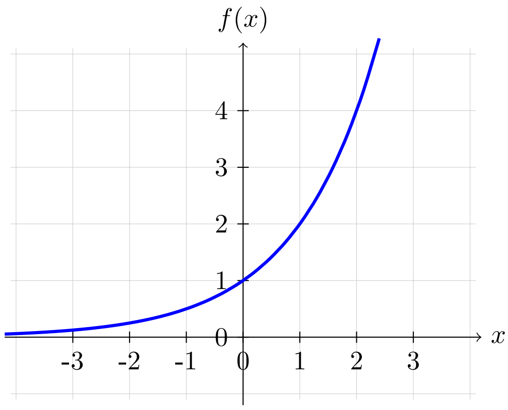


☐ $f(x) = -\sin(x)$	☐ $p = \frac{\pi}{2}$
☐ $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$	☐ $p = 2\pi$
☐ $f(x) = -\cos(2x)$	☐ $p = 3\pi$
☐ $f(x) = -2 \cdot \cos(\frac{1}{2}x)$	☐ $p = 4\pi$

7.3 Aufgabe: Exponentielle Funktionen und Logarithmus

Wähle für jede Skizze die passende Funktion und alle richtigen Aussagen aus.

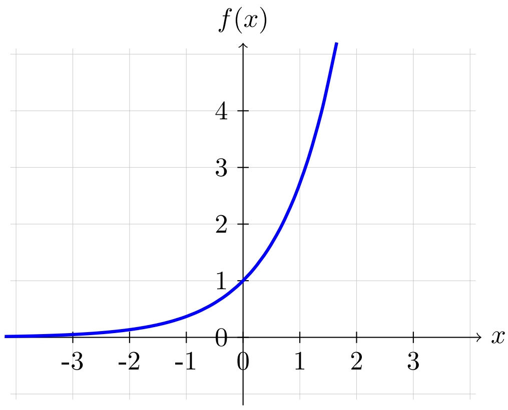
a)



- ☐ $f(x) = 2^x$
- ☐ $f(x) = 2x$
- ☐ $f(x) = e^x$
- ☐ $f(x) = x^2$

- ☐ Es gibt keine Nullstellen.
- ☐ f ist streng monoton steigend.
- ☐ f ist streng monoton fallend.
- ☐ $f(1) = 0$

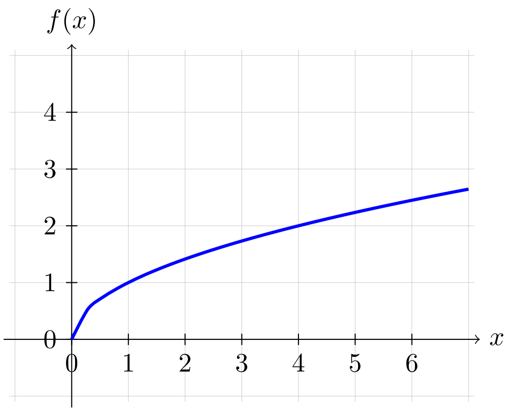
b)



- ☐ $f(x) = 2^x$
- ☐ $f(x) = 3^x$
- ☐ $f(x) = e^x$
- ☐ $f(x) = x^3$

- ☐ Es gibt keine Nullstellen.
- ☐ f ist streng monoton steigend.
- ☐ f ist streng monoton fallend.
- ☐ $f(0) = 1$

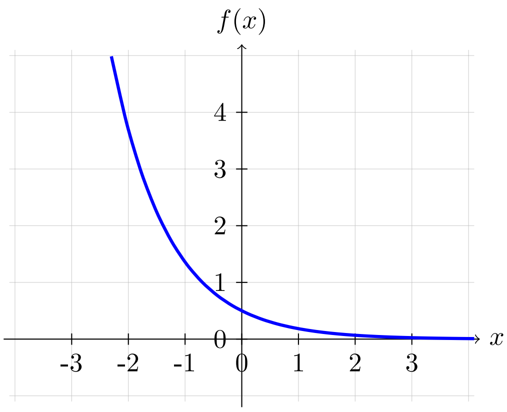
c)



- ☐ $f(x) = 2^x$
- ☐ $f(x) = \sqrt{x}$
- ☐ $f(x) = e^x$
- ☐ $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$

- ☐ Es gibt keine Nullstellen.
- ☐ $x = 0$ ist eine Nullstelle.
- ☐ f ist streng monoton steigend.
- ☐ f ist streng monoton fallend.

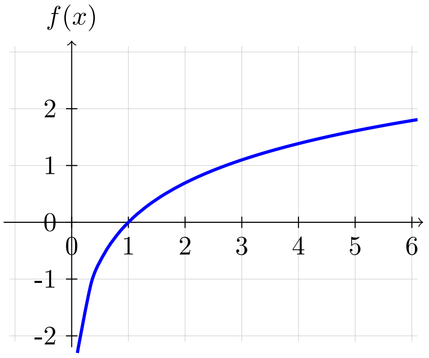
d)



- ☐ $f(x) = 2 \cdot e^x$
- ☐ $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$
- ☐ $f(x) = -e^x$
- ☐ $f(x) = -e^{2x}$

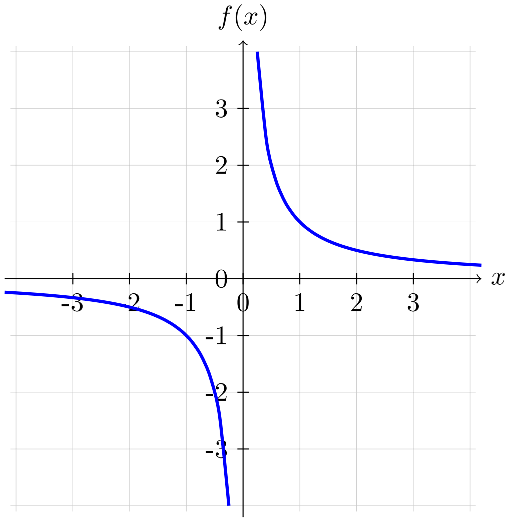
- ☐ Es gibt keine Nullstellen.
- ☐ $x = 1$ ist eine Nullstelle.
- ☐ f ist streng monoton steigend.
- ☐ f ist streng monoton fallend.

e)



☐ $f(x) = \ln(x)$ ☐ Es gibt keine Nullstellen.
☐ $f(x) = e^{-x}$ ☐ $x = 1$ ist eine Nullstelle.
☐ $f(x) = -e^{x}$ ☐ f ist streng monoton steigend.
☐ $f(x) = \sqrt{x}$ ☐ f ist streng monoton fallend.

f)



☐ $f(x) = e^{x}$ ☐ Es gibt keine Nullstellen.
☐ $f(x) = \frac{1}{x}$ ☐ $x = 0$ ist eine Nullstelle.
☐ $f(x) = -e^{x}$ ☐ f ist streng monoton steigend.
☐ $f(x) = \frac{2}{x}$ ☐ f ist streng monoton fallend.

8 Ableiten

Erinnerung: Tabelle.

Funktion	Ableitung	Stammfunktion
1	0	$x + C$
x	1	$\frac{1}{2}x^2 + C$
x^2	$2x$	$\frac{1}{3}x^3 + C$
x^n	nx^{n-1}	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln(x) + C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$	$-\frac{1}{x} + C$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \cdot \ln(x) - x + C$
e^x	e^x	e^x

Erinnerung: Produktregel.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

Erinnerung: Quotientenregel.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

Erinnerung: Kettenregel.

$$\Big(u\big(v(x)\big)\Big)' = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$$

Dabei heißt u' äußere Ableitung und v' innere Ableitung.

8.1 Aufgabe: Ableiten

Wähle für jede Funktion die richtige Ableitung aus.

a)

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x - 1$$

☐ $f'(x) = x^4 + 3x^2 + 3 - 1$
☐ $f'(x) = 4x^4 - 3x^2 + 3$
☐ $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 3$
☐ $f'(x) = 5x^5 + 6x^2 + 1$

b)

$$f(x) = (7 - x)^7$$

☐ $f'(x) = -7(7 - x)^6$
☐ $f'(x) = 7(7 - x)^6$
☐ $f'(x) = -(7 - x)^6$
☐ $f'(x) = 7(7 - x)^7$

c)

$$f(x) = (2x^2 - x + 2)^4$$

☐ $f'(x) = 4(2x^2 - x + 2)^3$
☐ $f'(x) = 4(4x - 1)(2x^2 - x + 2)^3$
☐ $f'(x) = 8x(2x^2 - x + 2)^3$
☐ $f'(x) = (4x - 1)(2x^2 - x + 2)^4$

d)

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)$$

☐ $f'(x) = -x^3$
☐ $f'(x) = x^2 + 2$
☐ $f'(x) = x^2 - 2$
☐ $f'(x) = \frac{1}{4}x^4$

e)

$$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$$

☐ $f'(x) = x \cdot \cos(x) + 2x$
☐ $f'(x) = x \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x)$
☐ $f'(x) = 2x \cdot \cos(x)$
☐ $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

f)

$$f(x) = x \cdot e^{2x}$$

☐ $f'(x) = 2e^{2x}$
☐ $f'(x) = 2xe^{2x}$
☐ $f'(x) = e^{2x} + 2e^x$
☐ $f'(x) = (1 + 2x)e^{2x}$

g)

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2}$$

☐ $f'(x) = -\dfrac{x + 4}{x^3}$
☐ $f'(x) = -\dfrac{x + 4}{x^4}$
☐ $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^4}$
☐ $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2}$

8.2 Aufgabe: Kurvendiskussion

Führe für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

a) Gib den Definitionsbereich von f an:
☐ $\mathbb{R}$
☐ $\mathbb{R} \setminus 0$
☐ $\mathbb{R}_{\geq 0}$
☐ $\mathbb{R}_{\leq 0}$

b) An welcher Stelle schneidet f die y-Achse?
☐ $y = 0$
☐ $y = 1$
☐ $y = 2$
☐ $y = -1$

c) Die Linearfaktorzerlegung von f ist

$$f(x) = (x + 2)(x - 1)^2.$$

Wähle alle richtigen Aussagen aus.
☐ f hat drei verschiedene Nullstellen.
☐ $x = 1$ ist eine Nullstelle von f.
☐ $x = -2$ ist eine Nullstelle von f.
☐ $x = 2$ und $x = -1$ sind Nullstellen von f.

d) Bestimme die beiden Extrempunkte von f und wähle aus, ob sie Hoch- oder Tiefpunkte sind.
Erster Extrempunkt:

☐ $(1, 0)$	☐ Hochpunkt
☐ $(2, 0)$	☐ Tiefpunkt
☐ $(1, -1)$	
☐ $(2, -2)$	

Zweiter Extrempunkt:

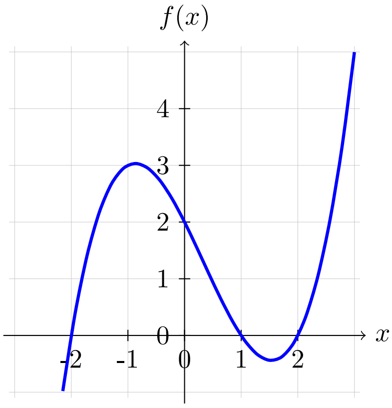
☐ $(-1, 2)$	☐ Hochpunkt
☐ $(-1, 4)$	☐ Tiefpunkt
☐ $(-2, 1)$	
☐ $(-2, 4)$	

e) Bestimme den Wendepunkt von f.

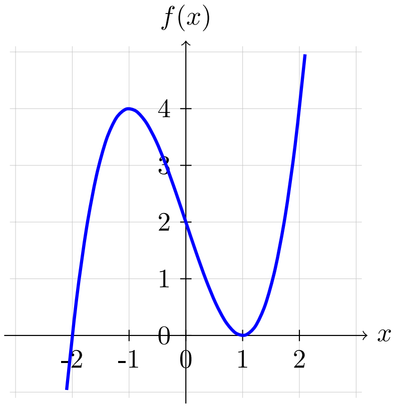
☐ $(0, 1)$
☐ $(0, 2)$
☐ $(1, 1)$
☐ $(1, 2)$

f) Wähle die richtige Skizze von f aus. ☐ **A** ☐ **B** ☐ **C** ☐ **D**

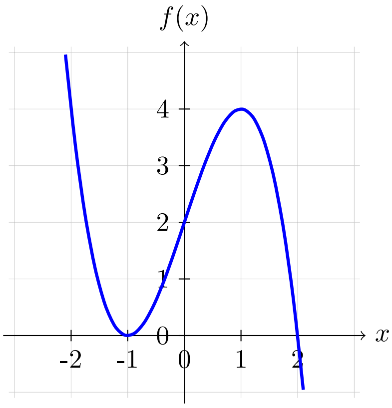
A



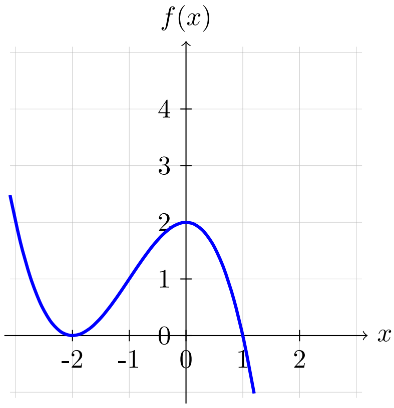
B



C



D



g) Wie verhält sich f im Unendlichen?

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ ☐ $-\infty$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ ∞

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ☐ $-\infty$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ ∞

9 Integrieren

Erinnerung: Stammfunktion und bestimmtes Integral. Für eine Funktion f ist F eine Stammfunktion, falls gilt

$$F'(x) = f(x).$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und eine Stammfunktion F von f ist das bestimmte Integral und dessen Berechnung:

$$\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

9.1 Aufgabe: Stammfunktion

Wähle die Antwort aus, die eine Stammfunktion von f ist.

(i)

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 1$$

☐ $F(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$
☐ $F(x) = 4x^5 - 6x^4 + 3x^2 - x$
☐ $F(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^2 - x$
☐ $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x$

(ii)

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

☐ $F(x) = x^2$
☐ $F(x) = -\frac{1}{x}$
☐ $F(x) = x$
☐ $F(x) = -\frac{1}{x^3}$

(iii)

$$f(x) = 2e^{2x}$$

☐ $F(x) = e^{2x}$
☐ $F(x) = 2e^{x}$
☐ $F(x) = e^{-2x}$
☐ $F(x) = 2e^{3x}$

(iv)

$$f(x) = \sqrt{2x - 1}$$

☐ $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{2x - 1}$
☐ $F(x) = (2x - 1)^{\frac{3}{2}}$
☐ $F(x) = \frac{1}{3}(2x - 1)^{\frac{3}{2}}$
☐ $F(x) = \frac{1}{2}(2x - 2)^2$

9.2 Aufgabe: Bestimmte Integrale

Berechne die folgenden Integrale und wähle die richtige Lösung aus.

(i) $\displaystyle\int_0^2 (3x^2 + 1)\ \mathrm{dx} =$ ☐ 1 ☐ 10 ☐ 12 ☐ 22

(ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (2 \cdot \cos(x) + 3 \cdot \sin(x))\ \mathrm{dx} =$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ π ☐ 2π

9.3 Aufgabe: Flächeninhalt zwischen zwei Graphen

Seien $f(x) = (x-3)^2$ und $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$. Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die die beiden Graphen der Funktionen einschließt, und wähle die richtige Lösung aus.

☐ 2

☐ $3,5$

☐ $4,5$

☐ 5

10 Beweise

10.1 Aufgabe: pq-Formel

Bring die Herleitung der pq-Formel in die richtige Reihenfolge.

A Und bringen den Rest auf die andere Seite.

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

B Seien p, q reelle Zahlen und $x^2 + px + q = 0$.

C Als nächstes ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel.

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

D Nun können wir die erste binomische Formel anwenden.

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

E Und subtrahieren nun $\frac{p}{2}$, um x auf der linken Seite zu isolieren.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

F Mit quadratischer Ergänzung erhalten wir

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0.$$

Schritt 1:	☐ **A**	☐ **B**	☐ **C**	☐ **D**	☐ **E**	☐ **F**
Schritt 2:	☐ **A**	☐ **B**	☐ **C**	☐ **D**	☐ **E**	☐ **F**
Schritt 3:	☐ **A**	☐ **B**	☐ **C**	☐ **D**	☐ **E**	☐ **F**
Schritt 4:	☐ **A**	☐ **B**	☐ **C**	☐ **D**	☐ **E**	☐ **F**
Schritt 5:	☐ **A**	☐ **B**	☐ **C**	☐ **D**	☐ **E**	☐ **F**
Schritt 6:	☐ **A**	☐ **B**	☐ **C**	☐ **D**	☐ **E**	☐ **F**

10.2 Aufgabe: $2 = 1$

Der folgende Beweis ist falsch.

Behauptung: $2 = 1$

Beweis:

(1) Wir nutzen die dritte binomische Formel. Für alle reellen Zahlen a und b gilt

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

(2) Insbesondere gilt dies auch für $a = b$, also

$$(a+a)(a-a) = a^2 - a^2.$$

(3) Auf der rechten Seite können wir a ausklammern: $a^2 - a^2 = a(a-a)$. Dann haben wir

$$(a+a)(a-a) = a(a-a).$$

(4) Jetzt haben wir auf beiden Seiten den Faktor $(a-a)$ und können ihn deswegen weglassen. Dann ist

$$a + a = a.$$

(5) Da unsere Folgerungen für beliebige reelle Zahlen a gelten, können wir $a = 1$ einsetzen und erhalten

$$2 = 1.$$

q.e.d.

An welcher Stelle befindet sich der Fehler?
☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Und warum ist an dieser Stelle ein Fehler?
☐ Es wird durch 0 geteilt.
☐ Für $a = b$ haben wir $0 = 0$, daraus kann man nichts weiter folgern.
☐ Man muss Umformungen immer auf beide Seiten anwenden, tut es hier aber nur auf einer.
☐ Das ist nicht die dritte binomische Formel.
☐ Man darf nicht einfach eine Zahl einsetzen.