

Kinetik radioaktiver Zerfallsreihen

von Jens Christoffers

Die Kinetik in einer radioaktiven Zerfallsreihe – eine Sequenz von Folgereaktionen erster Ordnung – läßt sich durch ein System gekoppelter inhomogener Differentialgleichungen beschreiben. Vorgestellt wird ein neuer Lösungsweg, der auf einen leicht programmierbaren, rekursiven Algorithmus hinausläuft.

Gliederung

- | | |
|-------|-----------------------------------------------------|
| 1 | Problemstellung |
| 2 | Lösungsweg |
| 2.1 | Herleitung von N_2 , N_3 und N_4 |
| 2.2 | Vereinfachung der Funktionsterme |
| 2.3 | Verallgemeinerung für beliebig lange Zerfallsreihen |
| 2.4 | Beweis |
| 2.4.1 | Induktionsstart |
| 2.4.2 | Induktionsschluß |
| 3 | Ergebnis |
| 4 | Diskussion |
| 5 | Ausblick |
| 6 | Literaturverzeichnis |

1

Problemstellung

Ein radioaktives Nuklid zerfällt nach einer Kinetik erster Ordnung. Seine Konzentration über die Zeit läßt sich durch die einfache Differentialgleichung

$$(1) N_1'(t) = -k_1 N_1(t)$$

beschreiben, die als Lösung die einfache Exponentialfunktion

$$(2) N_1(t) = N_1^0 e^{(-k_1 \cdot t)}$$

besitzt. N_1^0 ist hierbei die Anfangskonzentration des Nuklids zum Zeitpunkt $\tau = 0$ und k_1 die Geschwindigkeitskonstante der Zerfallsreaktion, die mit der Halbwertszeit τ_1 nach

$$(3) k_1 = \frac{\ln 2}{\tau_1}$$

zusammenhängt.

Der Zerfall in einer radioaktiven Zerfallsreihe dagegen läßt sich durch m Folgereaktionen erster Ordnung beschreiben:

(4) $A_1 \xrightarrow{k_1} A_2 \xrightarrow{k_2} A_3 \xrightarrow{k_3} \dots \xrightarrow{k_m} A_{m+1}$.
 A_{m+1} ist dabei das stabile Endprodukt der Zerfallsreihe. Die Konzentrationen der Nuklide A_n in der Zerfallsreihe lassen sich durch ein System gekoppelter inhomogener Differentialgleichungen (9) beschreiben:

$$\begin{aligned} (1) & N_1'(t) = -k_1 N_1(t) \\ (5) & N_2'(t) + k_2 N_2(t) = k_1 N_1(t) \\ (6) & N_3'(t) + k_3 N_3(t) = k_2 N_2(t) \\ & \vdots \\ (7) & N_n'(t) + k_n N_n(t) = k_{n-1} N_{n-1}(t) \\ & \vdots \\ (8) & N_{m+1}'(t) = k_m N_m(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist bekannt und von Rutherford et al. [05] sowie Bateman [02] (siehe auch [04]) diskutiert worden. Erofeev [03] (siehe auch [01]) gibt eine Lösung mit sogenannten „kinetischen Determinanten“ an.

Im folgenden soll eine weitere Lösung für das Gleichungssystem (9), die auf einer rekursiv definierten Funktion basiert, vorgestellt werden, bewiesen und an einem Beispiel angewendet werden.

2

Lösungsweg

2.1

Herleitung von N_2 , N_3 und N_4

Die inhomogene Differentialgleichung (7) läßt sich durch Integration lösen:

$$(7) N_n'(t) + k_n N_n(t) = k_{n-1} N_{n-1}(t) \Leftrightarrow$$

$$(10) N_n(t) = e^{-k_n t} \left[N_n^0 + \int_0^t k_{n-1} N_{n-1}(t) e^{k_n t} dt \right]$$

Setzt man in Gleichung (10) mit $n=2$ $N_1(t)$ aus Lösung (2) ein und integriert, so ergibt sich für $N_2(t)$:

$$(11) N_2(t) = N_2^0 e^{-k_2 t} + \frac{k_1 N_1^0}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

Ebenso erhält man aus (10) für $n=3$ und (11) den Term für $N_3(t)$:

$$(12) N_3(t) = N_3^0 e^{-k_3 t} + \frac{k_2 N_2^0}{k_3 - k_2} (e^{-k_2 t} - e^{-k_3 t})$$



Jens Christoffers, Jahrgang 1966, Ernst-Lemmer-Straße 17/312, 3550 Marburg 6, Schüler des Käthe-Kollwitz-Gymnasiums in Wilhelmshaven

$$+ \frac{k_1 k_2 N_1^0}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} (e^{-k_1 t} - e^{-k_3 t}) - \frac{k_1 k_2 N_1^0}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_2)} (e^{-k_2 t} - e^{-k_3 t})$$

Analog läßt sich aus (10) und (12) $N_4(t)$ herleiten:

$$\begin{aligned} (13) N_4(t) = & N_4^0 e^{-k_4 t} + \frac{k_3 N_3^0}{k_4 - k_3} (e^{-k_3 t} - e^{-k_4 t}) \\ & + \frac{k_3 k_2 N_2^0}{(k_3 - k_2)(k_4 - k_2)} (e^{-k_2 t} - e^{-k_4 t}) \\ & - \frac{k_3 k_2 N_2^0}{(k_3 - k_2)(k_4 - k_3)} (e^{-k_3 t} - e^{-k_4 t}) \\ & + \frac{k_3 k_2 k_1 N_1^0}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_4 - k_1)} (e^{-k_1 t} - e^{-k_4 t}) \end{aligned}$$

Stellungnahme zur Arbeit
„Kinetik radioaktiver Zerfallsreihen“
von Jens Christoffers

- 1) Der Autor stellt eine Lösung des Differentialgleichungssystems für radioaktive Zerfallsreihen vor, die als rekursiv definierte Funktion dargestellt ist.
- 2) Am Beispiel einer Zerfallskette mit drei Tochternukliden wird die rekursive Darstellung der Anzahl der radioaktiven Kerne als Funktion der Zeit entwickelt. Die Gültigkeit der gefundenen Lösung wird durch vollständige Induktion für beliebig lange Zerfallsketten bewiesen. Abschließend werden zwei Beispiele radioaktiver Zerfallsketten diskutiert.
- 3) Der Beweis der rekursiv definierten Lösung des Differentialgleichungssystems für radioaktive Zerfallsreihen ist formal schlüssig. Ob der vorgestellte rekursive Algorithmus eine neue Lösung ist oder diese Lösung aus der Theorie der Differentialgleichung bekannt ist, entzieht sich meiner Kenntnis.
- 4) Die in den Abschnitten „Diskussion“ und „Ausblick“ gemachten Ausführungen sind keine speziell aus der vorgestellten rekursiven Darstellung von radioaktiven Zerfallsreihen hervorgehenden Resultate; das zeitliche Verhalten radioaktiver Zerfallsreihen ist lange bekannt und läßt sich mit Hilfe von (Klein-) Computern ohne großen Programmier- und Rechenaufwand berechnen (vergl. z. B. Kohlrausch, Praktische Physik).
- 5) Die vom Autor angegebene rekursive Darstellung des zeitlichen Verhaltens radioaktiver Zerfallsreihen ist eine formal elegante Lösung des Differentialgleichungssystems.

$$\begin{aligned}
 & - \frac{k_3 k_2 k_1 N_1^0}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_4 - k_3)} (e^{-k_3 t} - e^{-k_4 t}) \\
 & - \frac{k_3 k_2 k_1 N_1^0}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_2)(k_4 - k_2)} (e^{-k_2 t} - e^{-k_4 t}) \\
 & + \frac{k_3 k_2 k_1 N_1^0}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_2)(k_4 - k_3)} (e^{-k_3 t} - e^{-k_4 t}).
 \end{aligned}$$

Wie man sieht, wächst die Länge der Terme rasch an, so daß eine Lösung nach diesem Schema unzuweckmäßig ist. Es gilt den Aufbau der Terme zu verallgemeinern.

2.2

Vereinfachung der Funktionsterme

Der Term für $N_4(t)$ läßt sich in vier Summanden unterteilen, so daß man bei jedem dieser Summanden S_i^4 ein N_i^0 ausklammern kann:

$$(14) N_4(t) = S_1^4(t) + S_2^4(t) + S_3^4(t) + S_4^4(t).$$

Definiert man

$$(15) E_y^x := \frac{1}{k_x - k_y} (e^{-k_y t} - e^{-k_x t});$$

$x, y \in \mathbb{N}; y < x$
und verallgemeinert:

$$(16) N_n(t) = S_n^n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} S_i^n(t),$$

so lassen sich die vier Summanden von $N_4(t)$ allgemein schreiben als:

$$(17) S_n^n(t) = N_n^0 e^{-k_n t},$$

$$(18) S_{n-1}^n(t) = k_{n-1} N_{n-1}^0 E_{n-1}^n,$$

$$(19) S_{n-2}^n(t) = \frac{k_{n-1} k_{n-2} N_{n-2}^0}{(k_{n-1} - k_{n-2})} (E_{n-2}^n - E_{n-1}^n) \text{ und}$$

$$(20) S_{n-3}^n(t) = \frac{k_{n-1} k_{n-2} k_{n-3} N_{n-3}^0}{(k_{n-2} - k_{n-3})}$$

$$\left[\frac{1}{(k_{n-1} - k_{n-3})} (E_{n-3}^n - E_{n-1}^n) - \frac{1}{(k_{n-1} - k_{n-2})} (E_{n-2}^n - E_{n-1}^n) \right].$$

2.3

Verallgemeinerung für beliebig lange Zerfallsreihen

Definiert man

$$(21) K_{n-j}^n := N_{n-j}^0 \prod_{i=n-j}^{n-1} k_i; 0 < j < n$$

und die rekursive Funktion

$$(22) P_n \left(\frac{x}{y} \right) := \begin{cases} E_y^x & \text{für } x = n; \\ \frac{1}{k_x - k_y} \left[P_n \left(\frac{x+1}{y} \right) - P_n \left(\frac{x+1}{x} \right) \right] & \text{für } x < n; \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} n, x, y \in \mathbb{N}; \\ y < x \leq n, \end{matrix} \right\}$$

dann gilt:

Satz: Man kann $S_{n-i}^n(t)$ durch

$$(23) S_{n-i}^n(t) = K_{n-i}^n \cdot P_n \left(\frac{n-i+1}{n-i} \right)$$

ausdrücken.

Satz (23) bildet mit der Summe (16) dann die Lösung der Differentialgleichung (7).

Satz (23) wird im folgenden durch vollständige Induktion bewiesen.

2.4

Beweis

Daß Satz (23) für $i=1$ und $i=2$ gilt, ist offensichtlich. Als Induktionsart wird daher gezeigt, daß Satz (23) für $i=3$ gilt. Als Induktionsschluß ist zu zeigen:

$$(24.1) S_{n-i}^n(t) = K_{n-i}^n \cdot P_n \left(\frac{n-i+1}{n-i} \right) \Rightarrow$$

$$(24.2) S_{n-i-1}^n(t) = K_{n-i-1}^n \cdot P_n \left(\frac{n-i}{n-i-1} \right) (24).$$

Die Folgerung (24) ist jedoch äquivalent mit (25.)

$$(25.1) S_{n-i}^n(t) = K_{n-i}^n \cdot P_n \left(\frac{n-i+1}{n-i} \right) \Rightarrow$$

$$(25.2) S_{n-i}^{n+1}(t) = K_{n-i}^{n+1} \cdot P_{n+1} \left(\frac{n-i+1}{n-i} \right).$$

denn S_{n-i}^{n+1} und S_{n-i-1}^n haben die gleiche Form; die Terme unterscheiden sich jeweils nur durch die Werte der Parameter N_{n-i}^0, N_{n-i-1}^0 und k_j mit $n-i-1 < j < n$. Dies erscheint auch anschaulich klar, wenn man bedenkt, daß der Einfluß, den die Anfangskonzentration eines Nuklids A_{n-j} auf Term von N_{n+1} ausübt, gleich der Wirkung von A_{n-i-1} auf N_n ist. Daher wird Folgerung (25) als Induktionsschluß gezeigt.

2.4.1 Induktionsart

Aus Satz (23) mit $i=3$ und den Definitionen (22) sowie (21) erhalten wir:

$$(26) S_{n-3}^n(t) = N_{n-3}^0 \prod_{i=n-3}^{n-1} k_i \cdot \frac{1}{(k_{n-2} - k_{n-3})}$$

$$\cdot \left[P_n \left(\frac{n-1}{n-3} \right) - P_n \left(\frac{n-1}{n-2} \right) \right],$$

woraus sich erneut mit Definition (22) ergibt:

$$(27) S_{n-3}^n(t) = \frac{k_{n-1} k_{n-2} k_{n-3} N_{n-3}^0}{k_{n-2} - k_{n-3}} \left\{ \frac{1}{(k_{n-1} - k_{n-3})} \left[P_n \binom{n}{n-3} P_n \binom{n}{n-1} \right] - \frac{1}{(k_{n-1} - k_{n-2})} \left[P_n \binom{n}{n-2} P_n \binom{n}{n-1} \right] \right\}.$$

Durch nochmalige Verwendung von Definition (22) erhält man:

$$(28) S_{n-3}^n(t) = \frac{k_{n-1} k_{n-2} k_{n-3} N_{n-3}^0}{k_{n-2} - k_{n-3}} \left[\frac{1}{(k_{n-1} - k_{n-3})} (E_{n-3}^n - E_{n-1}^n) - \frac{1}{(k_{n-1} - k_{n-2})} (E_{n-2}^n - E_{n-1}^n) \right],$$

was schließlich mit Gleichung (20) übereinstimmt und somit Satz (23) für $i=3$ beweist.

2.4.2 Induktionsschluß

Nehmen wir an, daß $N_j^0 = 0$ für $1 \leq j \leq n+1$ und $j \neq n-i$ und $N_{n-i}^0 \neq 0$, dann erhalten wir aus (10) mit (16):

$$(29) S_{n-i}^{n+1}(t) = k_n \cdot e^{-k_{n+1}t} \cdot \int_0^t S_{n-i}^n(t) \cdot e^{k_{n+1}t} dt.$$

Mit (25.1) als Voraussetzung ergibt sich:

$$(30) S_{n-i}^{n+1}(t) = k_n \cdot K_{n-i}^n \cdot e^{-k_{n+1}t} \cdot \int_0^t P_n \binom{n-i+1}{n-i} \cdot e^{k_{n+1}t} dt.$$

Multiplizieren wir k_n mit K_{n-i}^n unter Berücksichtigung von Definition (21) und P_n mit $e^{k_{n+1}t}$ unter Beachtung der Definitionen (22) und (15), so erhalten wir:

$$(31) S_{n-i}^{n+1}(t) = K_{n-i}^{n+1} e^{-k_{n+1}t} \int_0^t Q_n \binom{n-i+1}{n-i} dt,$$

mit Q_n definiert als:

$$(32) Q_n \binom{x}{y} := \begin{cases} \frac{1}{k_x - k_y} (e^{(k_{n+1} - k_y)t} - e^{(k_{n+1} - k_x)t}) & \text{für } x = n \\ \frac{1}{k_x - k_y} [Q_n \binom{x+1}{y} - Q_n \binom{x+1}{x+1}] & \text{für } x < n \end{cases}$$

$n, x, y \in \mathbb{N}; y < x \leq n$.

Integrieren wir und setzen die Grenzen ein, so folgt letztlich:

$$(33) S_{n-i}^{n+1}(t) = K_{n-i}^{n+1} \cdot e^{-k_{n+1}t} \cdot R_n \binom{n-i+1}{n-i},$$

mit R_n definiert als:

$$(34) R_n \binom{x}{y} = \begin{cases} \frac{1}{k_x - k_y} \left[\frac{1}{(k_{n+1} - k_y)} (e^{(k_{n+1} - k_y)t} - 1) \right] & \text{für } x = n; \\ - \frac{1}{(k_{n+1} - k_x)} (e^{(k_{n+1} - k_x)t} - 1) & \\ \frac{1}{k_x - k_y} [R_n \binom{x+1}{y} - R_n \binom{x+1}{x+1}] & \text{für } x < n; \end{cases}$$

$n, x, y \in \mathbb{N}; y < x \leq n$

Schließlich wir R_n mit $e^{-k_{n+1}t}$ ausmultipliziert und es ergibt sich die gewünschte Formel zu

$$(25.2) S_{n-i}^{n+1}(t) = K_{n-i}^{n+1} \cdot P_{n+1} \binom{n-i+1}{n-i},$$

mit P_n definiert nach (22). Da (25.1) als Voraussetzung in (29) eingeflossen ist und (29) äquivalent zu (25.2) ist, wäre die Gültigkeit von (25) und somit auch der Induktionsschluß bewiesen.

N_{n+1} besteht aus einer Summe von verschiedenen S_{n-i}^{n+1} ; der Beweis 2.4.2 kann daher ebenso mit allen $N_{n-i}^0 \neq 0; -i \leq i < n$ durchgeführt werden.

3 Ergebnis

Das Differentialgleichungssystem (9) besitzt als spezielle Lösung:

$$(2) N_1(t) = N_1^0 \cdot e^{-k_1 t}$$

$$(35) N_n(t) = N_n^0 \cdot e^{-k_n t} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[N_i^0 \cdot P_n \binom{i+1}{i} \cdot \prod_{j=i}^{n-1} k_j \right];$$

$1 < n \leq m$

mit P_n rekursiv definiert als

$$(36) P_n \binom{x}{y} = \begin{cases} \frac{1}{k_x - k_y} (e^{-k_y t} - e^{-k_x t}) & \text{für } x = n; \\ \frac{1}{k_x - k_y} [P_n \binom{x+1}{y} - P_n \binom{x+1}{x+1}] & \text{für } x < n; \end{cases}$$

$n, x, y \in \mathbb{N}$
 $y < x \leq n$

Angeregt zu dieser Arbeit wurde ich Mitte Mai dieses Jahres, als ich erfuhr, daß Hamburger Messungen nach die Aktivität von ^{131}J anstieg, obwohl an sich keine Zunahme der Belastung durch dieses Nuklid durch radioaktiven „Fall Out“ als Folge des ukrainischen Reaktorunfalls mehr möglich sein sollte. Bei der Entwicklung eines Computerprogramms zur graphischen Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Nuklidkonzentration in einer Zerfallsreihe entdeckte ich „durch Zufall“ ein allgemeines Aufbauprinzip der Funktionsterme. Da ich im Juni mein Abitur in Wilhelmshaven ablegte und danach mit den Vorbereitungen zur 18. Internationalen Chemie-Olympiade beschäftigt war, konnte ich erst im August die Arbeit zu diesem Thema fortsetzen. Inzwischen war ich nach Marburg umgezogen, wo ich im Oktober ein Chemie-Diplom-Studium an der Philipps-Universität begonnen habe. Bei einem hier in Marburg durchgeführten Literaturstudium stellte ich fest, daß mein Lösungsweg noch nicht beschrieben worden war, was mich endgültig zur Niederlegung meines Gedankenganges in dem beigefügten Aufsatz veranlaßte.

Keine zwei Nuklide dürfen gleiche Halbwertszeiten haben: $k_x \neq k_y$.

Die Konzentration des stabilen Endnuklids kann beschrieben werden durch:

$$(37) N_{m+1}(t) = \sum_{i=1}^{m+1} N_i^0 - \sum_{i=1}^m N_i(t)$$

4

Diskussion

Die hergeleitete und bewiesene Lösung des Differentialgleichungssystems (9) soll nun an zwei Beispielen diskutiert werden.

In Abb. 1 sind drei Funktionen für um Größenordnungen verschiedene k_n (siehe Tab. 1) dargestellt. Die Zeit ist der Übersicht halber logarithmisch aufgetragen. Man sieht, daß N_2 und N_3 jeweils ihr Maximum erreichen, wenn N_1 und N_2 annähernd gleich Null werden. Hier kann der Einfluß der Folge-reaktionen können durch Funktion (2) gut beschrieben werden.

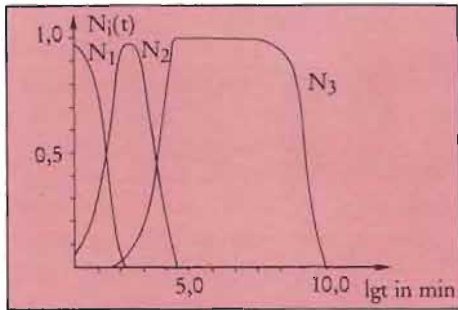


Abb. 1: k_n und Größenordnungen verschieden, Parameter siehe Tabelle 2

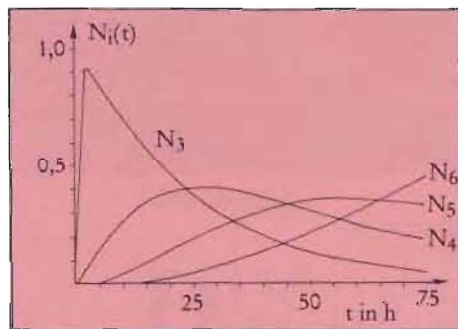
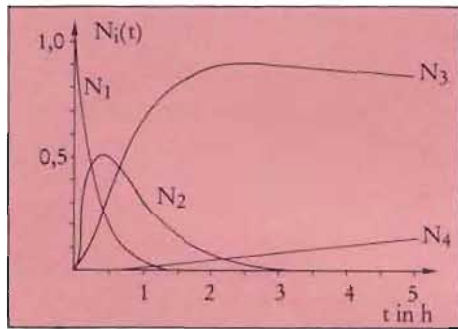


Abb. 2 und 3: k_n in der gleichen Größenordnung, Parameter siehe Tabelle 2

Liegen dagegen die einzelnen Geschwindigkeitskonstanten in etwa der gleichen Größenordnung, ist eine Beschreibung des Systems durch das Gleichungssystem (9) unumgänglich. Abb. 2 und 3 erläutern diesen Sachverhalt an einem Ausschnitt der Actinium-Zerfallsreihe (siehe Tabelle 2). Alle Funktionen N_n mit $1 < n < 6$ steigen bis zu einem Maximum – dessen Lage numerisch bestimmt werden kann – monoton an. Mit wachsendem n wird der Verlauf der Graphen immer „fla-

Tabelle 1

n	A_n	Zerfall	τ_n [min]	k_n [min^{-1}]	N_n^0	Maximum t_m [min]	$N_n(t_m)$
1	$^{239}_{92}\text{U}$	β^-	23,5	$2,95 \cdot 10^{-2}$	1,00	0	1,00
2	$^{239}_{93}\text{Np}$	β^-	$3,40 \cdot 10^{-3}$	$2,04 \cdot 10^{-4}$	0,00	165	0,97
3	$^{239}_{94}\text{Pu}$	β^-	$1,27 \cdot 10^{10}$	$5,47 \cdot 10^{-11}$	0,00	40000	1,00

Tabelle 2 (nach [6]): Ausschnitt aus der Actinium-Zerfallsreihe

n	A_n	Zerfall	τ_n [h]	k_n [h^{-1}]	N_n^0	Maximum t_m [h]	$N_n(t_m)$
1	$^{135}_{60}\text{Nd}$	β^+	0,200	3,466	1,00	0,00	1,00
2	$^{135}_{59}\text{Pr}$	β^+	0,417	1,662	0,00	0,41	0,51
3	$^{135}_{58}\text{Ce}$	β^+	17,0	$4,077 \cdot 10^{-2}$	0,00	2,68	0,91
4	$^{135}_{57}\text{La}$	β^+	19,4	$3,573 \cdot 10^{-2}$	0,00	27,09	0,39
5	$^{135}_{56}\text{Ba}^*$	isom.	28,7	$2,415 \cdot 10^{-2}$	0,00	61,90	0,36
6	$^{135}_{56}\text{Ba}$	stabil	$[\infty]$	0,000	0,00	$[\infty]$	1,00

cher“, d. h. – wie vor allem Abb. 3 zeigt – die Funktionswerte der Maxima und die Steigungen in einer bestimmten Umgebung der Maxima werden immer kleiner. Der Abfall der Graphen besitzt eine „virtuelle Halbwertszeit“, die wesentlich größer ist als bei einem Zerfall ohne oder am Anfang einer Zerfallsreihe. Z. B. wäre N_5 außerhalb einer Zerfallsreihe zum Zeitpunkt $t = 100$ h nur ca. $\frac{1}{3}$ so groß wie im beschriebenen Fall. Im Extremfall, d. h. wenn N_1^0 und n sehr groß sind, verläuft der Graph nach dem Maximum fast parallel zur Baszisse („radioaktives Gleichgewicht“).

5 Ausblick

Die beschriebene Lösung des Gleichungssystems (9) läßt sich – im Gegensatz zu den von Rutherford et al. [05], Batemann [02] und Erofeev [03], der n -reihige Determinanten benötigt, gegebenen Formeln – mit einem einfachen Algorithmus programmieren. Die verwendete Funktion P_n (36) läßt sich z. B. in der Programmiersprache PASCAL als rekursive Funktion darstellen. Die einfache Programmierbarkeit dieses mathematischen Modells ermöglicht eine Anwendung zur Berechnung der

6 Literatur

Gesamtaktivität von radioaktiven Proben oder Abfällen, sofern die Zusammensetzung bekannt ist und kein Stoffaustausch mit der Umwelt stattfindet, also ein geschlossenes System vorliegt. Auf eine Kontaminierung der Umwelt nach Atomtests oder Reaktorunfällen läßt sich das Modell ebenfalls anwenden. Allerdings werden hier Transportvorgänge in Boden und Luft – Faktoren die sich wahrscheinlich einer quantitativen Beschreibung entziehen – vernachlässigt, so daß das Modell für diesen Bereich nur den Charakter einer Näherungslösung haben kann.

- [01] Bamford, C. H., C. F. H. Tipper: Chemical Kinetics, Vol. 2, Theory of Kinetics, Elsevier, 1969, pp. 22ff
- [02] Bateman, H.: Solution of a System of Differential Equations Occuring in the Theory of Radioactive Transformations, Proc. Cambridge Phil. Soc., 15 (1910), 423
- [03] Erofeev, B. V.: Zhur. Fiz. Khim., 24 (1950), 721
- [04] Friedlanger, G., J. W. Kennedy, J. M. Miller: Nuclear and Radiochemistry, 1964², pp. 76f.
- [05] Rutherford, E., J. Chadwick, C. D. Ellis: Radiations from Radioactive Substances, Cambridge, 1930, pp. 10 - 23
- [06] Seelmann-Eggebert, W., G. Pfennig, H. Münzel: Karlsruher Nuklidkarte, 1974⁴