

# Hält das Standardmodell unter Solvency II, was es verspricht? \*

Dietmar Pfeifer<sup>1</sup>

IfM Preprint No. 2016-04  
Januar 2019

Institut für Mathematik  
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg  
D-26111 Oldenburg, Germany

---

\*Published in R. Koch, M. Weber, G. Winter (Hrsg.): *Der Forschung — der Lehre — der Bildung. 100 Jahre Hamburger Seminar für Versicherungswissenschaft und Versicherungswissenschaftlicher Verein in Hamburg e.V. (2016)*, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 767-788.

<sup>1</sup>dietmar.pfeifer@uol.de



# 1 Hält das Standardmodell unter Solvency II, was es verspricht?

Dietmar Pfeifer, Universität Oldenburg

Ein wesentlicher Aspekt bei der legislativen Neugestaltung des europäischen Aufsichtsregimes (Solvency II) ist der Schutz eines europäischen Versicherungsnehmers gegen Insolvenzen seines Versicherungsunternehmens. In diesem Beitrag werden einige mathematisch-statistische Annahmen, die dem Standardmodell unter Solvency II, welches diese Sicherheit „garantieren“ soll, zu Grunde liegen, in diesem Sinne kritisch hinterfragt.

## 1.1 Einführung

Nach vielen Jahren Vorarbeit ist das Projekt Solvency II zum 1.1.2016 in den Ländern der Europäischen Union legislativ umgesetzt worden. Wir beginnen mit einigen Zitaten zu dessen Vorgeschichte und ökonomischer Motivation:

“Die Entstehungsgeschichte von Solvency II wird vom Vorwurf beherrscht, dass die bestehenden Solvabilitätsvorschriften<sup>1</sup> nicht risikoorientiert seien. Die Eigenmittelvorschriften decken nur Versicherungsrisiken ab; das Marktrisiko, das Kreditrisiko und das operationelle Risiko blieben hingegen unberücksichtigt. [...] Aus diesem Grund sollten die Instrumente der Finanzaufsicht im Versicherungsbereich insbesondere nach dem Vorbild der entsprechenden Reformen im Bankenbereich (Basel II und III) ausgestaltet werden. Mit Solvency II wird daher größere Risikoorientierung und mehr Aufsichtsconvergenz bezweckt. Hauptziel der Versicherungsaufsicht ist aber (weiterhin) die Stärkung und Vereinheitlichung des Schutzes der Versicherten.“<sup>2</sup>

„Durch Solvency II findet ein Paradigmenwechsel in der europäischen Versicherungsaufsicht statt. Die vergleichsweise einfachen Methoden zur Ermittlung der Eigenmittelanforderungen aus Solvency I werden durch Verfahren ersetzt, die deutlich besser den Risikogehalt der einzelnen Bilanzpositionen widerspiegeln. Zur Berechnung der benötigten Eigenmittel können Erst- und Rückversicherungsunternehmen [...] dabei entweder auf die Standardformel zurückgreifen oder Interne Modelle für ihre Risiken bzw. Teile ihrer Risiken entwickeln. Gleichzeitig werden die verfügbaren Eigenmittel aus einem Marktwertansatz ermittelt, was ebenfalls einen Bruch zu der bisherigen Verwendung von Werten aus dem Rechnungswesen darstellt.“<sup>3</sup>

“Die Solvency II-Richtlinie verfolgt einen an Prinzipien orientierten Ansatz in der Rechtsetzung. Dies bedeutet: der Gesetzgeber gibt weitestgehend keine konkreten Regeln in der Solvency II-Rahmenrichtlinie vor, sondern formuliert Prinzipien, die jeweils eine bestimmte Zielsetzung verfolgen. Diese Vorschriften haben zunächst einen generellen, für alle Unternehmen allgemeingültigen Charakter. Die Anwendung der Prinzipien erfordert

<sup>1</sup> Gemeint sind hier die früheren Vorschriften aus Solvabilität I.

<sup>2</sup> FMA (2012), S. 7f.

<sup>3</sup> Bennemann et al. (2011), S. 4.

eine individuelle Prüfung des Einzelfalls, sowohl auf der Ebene der Unternehmen als auch auf der Ebene der Aufsicht. Durch eine Vielzahl von unbestimmten Rechtsbegriffen erhöhen sich die Freiheitsgrade für die Unternehmen bei der Wahl der Umsetzungsalternativen.“<sup>4</sup>

„Solvency II erlaubt die Berücksichtigung von Diversifikationseffekten bei der Berechnung der Solvenzkapitalanforderungen im Standard- und im internen Modell [...]. Grundsätzliche Idee der Diversifikation ist, dass die 99,5 %-Höhe (Quantil) von zwei Verlusten zusammen in der Regel geringer ist als die Summe der beiden einzelnen 99,5 %-Höhen.“<sup>5</sup>

„Der nächste Schritt besteht dann in der Ermittlung der Risikomarge, welche zu dem berechneten Barwert addiert werden muss. Aber während der beste Schätzwert für die versicherungstechnischen Rückstellungen segmentiert nach homogenen Risikogruppen, die zumindest die einzelnen Geschäftsbereiche widerspiegeln sollen, ausgewiesen werden muss [...], erfolgt die Ermittlung der Risikomarge auf Ebene des gesamten Versicherungsportfolios. Dies hat aus Sicht der Unternehmen den Vorteil, dass Diversifikationseffekte zwischen den einzelnen versicherungstechnischen Rückstellungen zu einer Reduktion der notwendigen Eigenmittel und damit der Risikomarge führen.“<sup>6</sup>

„Mit der Berechnung der Kapitalerfordernisse wird auf unterster Ebene begonnen. Anschließend werden die einzelnen Kapitalerfordernisse mittels einer Korrelationsmatrix, die die Beziehungen zwischen den einzelnen Risiken wiedergibt, zu einem Kapitalerfordernis aggregiert. Durch die Verwendung der Korrelationsmatrix können Diversifikationseffekte zwischen den einzelnen Risiken geltend gemacht werden.“<sup>7</sup>

Ein zentrales Anliegen von Solvency II ist damit einerseits die quantitative *Messung aller relevanten Risiken* und deren Aggregation durch geeignete stochastische Methoden („Risikomaße“), um das Fortbestehen des Unternehmens mit einer hohen Sicherheitswahrscheinlichkeit zu garantieren, andererseits eine Berücksichtigung so genannter *Diversifikationseffekte*, durch die Eigenmittelanforderungen reduziert werden können, wenn ein risikomindernder Ausgleich zwischen verschiedenen Risikogruppen angenommen werden kann.

Der Berücksichtigungsfähigkeit eines solchen risikomindernden Effekts liegt dabei die Annahme zu Grunde, dass Diversifikationseffekte in einem funktionalen Zusammenhang zu Korrelationen zwischen einzelnen Risikogruppen stehen. Gründl et al. führen dazu aus:

„Im Standardmodell kommt die Korrelation bei der Aggregation der Einzel-SCR<sup>8</sup> zum Einsatz. Hierbei ist anzumerken, dass diese „Wurzelformel“ eigentlich für die Aggregation von Standardabweichungen gilt. Nur für eine ganz spezielle Klasse von Verteilungen, die elliptischen Verteilungen<sup>9</sup> (mit dem prominenten Beispiel der Normalverteilung), ist diese

---

<sup>4</sup> Gründl et al. (2015), S.9.

<sup>5</sup> Gründl et al. (2015), S.61.

<sup>6</sup> Bennemann et al. (2011), S.10.

<sup>7</sup> FMA (2011), S.28.

<sup>8</sup> Solvency Capital Requirement.

<sup>9</sup> Vgl. hierzu etwa McNeil et al. (2005), Kapitel 3.3.

Formel auch auf die Aggregation von Quantilen (wie der Verlust-Value-at-Risk (VaR) 99,5 % eines ist) übertragbar. Für die anderen Verteilungen (z.B. Lognormal) gilt diese Formel nicht (oder zumindest nicht exakt)! Dies wird jedoch in Kauf genommen, wenn man nachweisen kann, dass die verwendeten Korrelationen so gewählt sind, dass sie eventuelle, durch die Wurzelformel nicht erfassbare Diversifikationseffekte in Bezug auf den zu berechnenden VaR 99,5 % gleichwertig abbilden. Die Korrelationen sind also für den Fall, dass die Wurzelformel eigentlich nicht gilt, so anzupassen, dass die Wurzelformel wieder verwendbar ist, um das 99,5 %-Quantil der Verlustverteilung zu bestimmen.“<sup>10</sup>

In diesem Beitrag wird diese Unverträglichkeit der Übertragung der „Wurzelformel“ auf die im Versicherungsbereich relevanten, typischerweise *nicht* elliptisch konturierten Risikoverteilungen thematisiert und gezeigt, dass es im Allgemeinen überhaupt keinen funktionalen Zusammenhang zwischen Korrelation und Diversifikation gibt, so dass es auch prinzipiell keine Anpassung von Korrelationen geben kann, die eine Anwendung der „Wurzelformel“ unter Solvency II rechtfertigt.

## 1.2 Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Im Erläuterungsteil des Gesetzes zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen vom 1. April 2015, Bundesgesetzblatt (2015) findet sich in Teil I Nr. 14, S.442f folgender Text:

„Risikomaß: eine mathematische Funktion, die unter einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose einen monetären Betrag bestimmt und monoton mit dem Risikopotenzial steigt, das der Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose zugrunde liegt.“

Diese Formulierung ist leider in mehrerer Hinsicht inhaltlich fragwürdig.<sup>11</sup> Zum Einen gibt es in der mathematischen Fachwelt keinen Begriff „Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose“. Der Begriff ist eine wörtliche Übersetzung des in der englischen Fassung der Solvency II-Rahmenrichtlinie verwendeten Begriffs „probability distribution forecast“ und meint die für die jeweilige Risikoberechnung unterstellte Wahrscheinlichkeitsverteilung, die entweder in einem internen Modell auf der Basis empirischer Daten zu schätzen oder aber politisch vorgegeben ist (z.B. die Lognormalverteilung für Schadenquoten in der Säule I). Im Erläuterungsteil des Gesetzes zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen vom 1. April 2015, Bundesgesetzblatt (2015) findet sich in Teil I Nr. 14, S.443 dazu folgender Text:

„Wahrscheinlichkeitsverteilungsprognose: eine mathematische Funktion, die einer ausreichenden Reihe von einander ausschließenden zukünftigen Ereignissen eine Eintrittswahrscheinlichkeit zuweist.“

Diese Formulierung ist aus Sicht der Fachmathematik mehr als fragwürdig, weil eine „mathematische Funktion“ eine Abbildung mit gegebenem Definitions- und Wertebereich im Sinne der Mengenlehre ist und mit „zukünftigen Ereignissen“ rein gar nichts zu tun hat.

---

<sup>10</sup> Gründl et al. (2015), S. 65.

<sup>11</sup> Vgl. hierzu Pfeifer (2014).

Zum Anderen bestimmt ein Risikomaß keinen „monetären Betrag“, sondern eine Kenngröße einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die obige Formulierung wirft in unzulässiger Weise eine mathematische Definition mit ihrer ökonomischen Interpretation durcheinander. Des Weiteren erfasst die obige „Definition“ auch nur einen Teil der charakteristischen Eigenschaften eines Risikomaßes. Genauer muss es wie folgt heißen:

**Definition.**<sup>12</sup> Sei  $\mathfrak{X}$  eine geeignete Menge nicht-negativer Zufallsvariablen (Risiken)  $X$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Ein **Risikomaß**  $R$  auf  $\mathfrak{X}$  ist eine Abbildung  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{llll}
 P^X = P^Y \Rightarrow R(X) = R(Y) & \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X} & & \text{[Verteilungsinvarianz]} \\
 R(cX) = cR(X) & \text{für alle } X \in \mathfrak{X} \text{ und } c \geq 0 & & \text{[Skaleninvarianz]} \\
 R(X + c) = R(X) + c & \text{für alle } X \in \mathfrak{X} \text{ und } c \geq 0 & & \text{[Translationsinvarianz]} \\
 R(X) \leq R(Y) & \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X} \text{ mit } X \leq_{st} Y & & \text{[Monotonie]}
 \end{array}$$

Ein Risikomaß heißt *kohärent*, wenn zusätzlich gilt:

$$R(X + Y) \leq R(X) + R(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X} \quad \text{[Subadditivität]} \quad \blacklozenge$$

Diese Ungleichung induziert den oben angesprochenen *Diversifikationseffekt* für beliebige Risiken  $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}$ , denn es folgt mit vollständiger Induktion:

$$R\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \leq \sum_{k=1}^n R(X_k) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hier ist kritisch anzumerken, dass ein kohärentes Risikomaß bei Aggregation von Risiken *in jedem Fall* einen Diversifikationseffekt nach sich zieht, unabhängig davon, ob diese Risiken stochastisch abhängig sind oder nicht. Es ist fraglich, ob dies aus ökonomischer Sicht sinnvoll ist.

Im Folgenden werden wir den Term “(Risiko-)Konzentrationseffekt” im Gegensatz zum “Diversifikationseffekt” benutzen, charakterisiert durch die umgekehrte Ungleichung

$$R(X + Y) > R(X) + R(Y) \quad \text{für gewisse } X, Y \in \mathfrak{X}.$$

Das populäre Standardabweichungsprinzip *SDP*<sup>14</sup> ist gegeben durch  $SDP(X) = E(X) + \gamma \sqrt{Var(X)}$  für ein festes  $\gamma > 0$  und  $X \in \mathfrak{X} = \mathfrak{L}_+^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , die Menge der quadratisch integrierbaren Risiken auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

<sup>12</sup> Diese Definition orientiert sich im Wesentlichen an McNeil et al. (2005), Kapitel 6.

<sup>13</sup> Gemeint ist mit  $\leq_{st}$  die stochastische Ordnung, die sich über die umgekehrte Ordnung der Verteilungsfunktionen ausdrücken lässt.

<sup>14</sup> Dieses Prinzip wird auch in Gründl et al. (2015), S. 65 angesprochen und geht schon auf Vorschläge der IAA (International Actuarial Association) aus dem Jahr 2004 zurück.

SDP ist aber *kein* Risikomaß im Sinne der obigen Definition, da es *nicht monoton* ist (es erfüllt aber alle anderen Bedingungen, einschließlich der Kohärenz). Die Subadditivität des Standardabweichungsprinzips sieht man dabei beispielsweise so:

$$\begin{aligned}
 SDP(X+Y) &= E(X+Y) + \gamma \sqrt{\text{Var}(X+Y)} \\
 &= E(X) + E(Y) + \gamma \sqrt{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Korr}(X,Y)\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \\
 &\leq E(X) + E(Y) + \gamma \sqrt{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \\
 &= E(X) + E(Y) + \gamma \sqrt{(\sqrt{\text{Var}(X)} + \sqrt{\text{Var}(Y)})^2} \\
 &= E(X) + E(Y) + \gamma(\sqrt{\text{Var}(X)} + \sqrt{\text{Var}(Y)}) = SDP(X) + SDP(Y)
 \end{aligned}$$

für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}$ . Hierbei wurde wesentlich die Tatsache ausgenutzt, dass Korrelationen nach oben durch eins beschränkt sind (das entspricht dem Fall vollständiger positiver linearer Abhängigkeit zwischen den Risiken  $X$  und  $Y$ ).

Der folgende Sachverhalt zeigt ein Beispiel für die *Nicht-Monotonie* des Standardabweichungsprinzips:

**Beispiel 1.** Die Risiken  $X, Y$  mögen die Dichten

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad f_Y(x) = \begin{cases} ax^b, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-2e^{-x}}}, & x > 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzen mit den Konstanten  $a = \frac{1}{\sqrt{e(e-2)}} = 0.7156\dots$ ,  $b = \frac{3-e}{e-2} = 0.3922\dots$ . In diesem Fall

gilt die stochastische Monotonie  $X \leq_{st} Y$  wegen  $F_X(x) = P(X \leq x) \geq F_Y(x) = P(Y \leq x)$ ,  $x \geq 0$  mit  $E(X) = \text{Var}(X) = 1$ ,  $E(Y) = 1,2003\dots$ ,  $\text{Var}(Y) = 0,9294\dots$

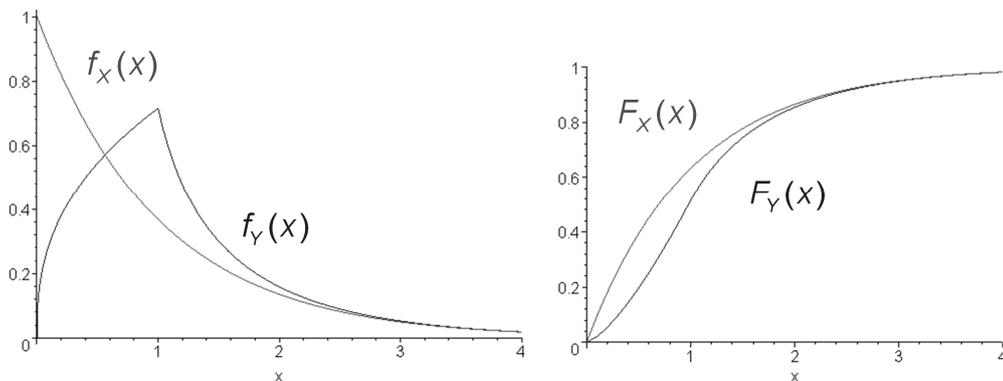


Abbildung 1: Graphen der Dichten und Verteilungsfunktionen der Risiken  $X$  und  $Y$

Für  $\gamma = 3$  ergibt sich hier:  $SDP(X) = 4 > 3,9887\dots = SDP(Y)$ .

Die in der Solvency II-Rahmenrichtlinie und im Gesetz zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen unterstellte Monotonie-Eigenschaft von Risikomaßen ist aber zumindest diskussionswürdig, weil sich dahinter eine bestimmte, nicht mathematisch motivierte Vorstellung von „Risiko“ verbirgt. Im obigen Beispiel ist zwar  $Y$  stochastisch größer als  $X$ , der Erwartungswert von  $Y$  ist auch (geringfügig) größer als der von  $X$ , dafür ist aber die Varianz von  $Y$  kleiner als diejenige von  $X$ . Deshalb erscheint unter dem Standardabweichungsprinzip  $SDP$  das „Risiko“ von  $Y$  auch kleiner als das „Risiko“ von  $X$  – es lässt sich ökonomisch besser „kontrollieren“.

Das in Basel II/III und Solvency II durch gesetzliche Verordnung verwendete Risikomaß ist der Value at Risk VaR, definiert als Quantil der Risiko-Verteilung:

$$\text{VaR}_\alpha(X) := Q_X(1-\alpha) \quad \text{für } X \in \mathfrak{X} \text{ und } 0 < \alpha < 1,$$

wobei  $Q_X$  die zum Risiko  $X$  gehörige Quantilfunktion bezeichnet:

$$Q_X(u) := \inf \{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq u\} \quad \text{für } 0 < u < 1.$$

Der Parameter  $\alpha$  spielt hier die Rolle der (technischen) Ruinwahrscheinlichkeit.<sup>15</sup> VaR ist ein Risikomaß, aber im Allgemeinen *nicht kohärent*.

Das kleinste kohärente Risikomaß oberhalb des VaR ist der Expected Shortfall (auch *average Value-at-Risk*) ES, der gegeben ist durch

$$\text{ES}_\alpha(X) := \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_u(X) du \quad \text{für } 0 < \alpha < 1.$$

Falls  $P(X \geq \text{VaR}_\alpha(X)) = \alpha$  gilt, entspricht dies dem Ausdruck

$$\text{ES}_\alpha(X) = E(X \mid X \geq \text{VaR}_\alpha(X)).$$

Der Expected Shortfall ist das Risikomaß, dass z.B. im *Swiss Solvency Test* (SST) verwendet wird.

### 1.3 Korrelation und Diversifikation

Im Erläuterungsteil des Gesetzes zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen vom 1. April 2015, Bundesgesetzblatt (2015) findet sich in Teil I Nr. 14, S.441 folgender Text:

“Diversifikationseffekte: eine Reduzierung des Gefährdungspotenzials von Versicherungsunternehmen und -gruppen durch die Diversifizierung ihrer Geschäftstätigkeit, die sich aus der Tatsache ergibt, dass das negative Resultat eines Risikos durch das günsti-

<sup>15</sup> Andere Autoren verwenden diesen Parameter oft abweichend als Sicherheitswahrscheinlichkeit, etwa McNeil et al. (2005).

gere Resultat eines anderen Risikos ausgeglichen werden kann, wenn diese Risiken nicht voll korreliert sind.”

René Doff führt hierzu entsprechend aus:

“Diversification arises when different activities complement each other, in the field of both return and risk. [...] The diversification effect is calculated by using correlation factors. Correlations are statistical measures assessing the extend to which events could occur simultaneously. [...] A correlation factor of 1 implies that certain events will always occur simultaneously. Hence, there is no diversification effect and two risks identically add up. Risk managers tend to say that such risks are perfectly correlated (i.e., they have a high correlation factor), meaning that these two risks do not actually diversify at all. A correlation factor of 0 implies that diversification effects are present and a certain diversification benefit holds.”<sup>16</sup>

Hierzu ist kritisch anzumerken, dass der im Gesetz als **Tatsache** dargestellte Zusammenhang gerade *keine* Tatsache ist, weil es nachweislich **keinen** Zusammenhang zwischen Korrelation und Diversifikation gibt. Ebenso wenig ist eine Korrelation ein Maß dafür, dass gewisse „Ereignisse gleichzeitig eintreten“.

Eine mathematisch korrekte, vollständige Beschreibung von stochastischen Abhängigkeiten zwischen (endlich vielen) Risiken ist allein durch eine stochastische Struktur möglich, die *Copula* genannt wird.

**Definition:** Eine  $n$ -dimensionale Copula  $C$  ist (im Wesentlichen) eine multivariate Verteilungsfunktion mit (stetig) uniformen Randverteilungsfunktionen über dem Intervall  $[0, 1]$ .<sup>17</sup> ♦

Jede Copula  $C$  ist durch die sogenannten Fréchet-Hoeffding-Schranken eingeschachtelt, d.h. es gilt

$$C_*(\mathbf{u}) := \max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq C^*(\mathbf{u}) := \min(u_1, \dots, u_n).$$

Die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke  $C^*$  ist selbst eine Copula (in jeder Dimension); die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke  $C_*$  ist nur in zwei Dimensionen eine Copula.

Die besondere Bedeutung von Copulas zur Beschreibung stochastischer Abhängigkeiten zeigt die nachfolgende Aussage.

**Sklar's Theorem:** Sei  $H$  eine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_n$ . Dann existiert eine Copula  $C$  derart, dass für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

---

<sup>16</sup> Doff (2011), S. 249f.

<sup>17</sup> Vgl. hierzu McNeil et al. (2005), Kapitel 5.

Wenn alle Randverteilungsfunktionen stetig sind, ist die Copula eindeutig bestimmt. Umgekehrt gilt: bezeichnen  $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$  die generalisierten Inversen der Randverteilungsfunktionen (Quantilfunktionen), so gilt für alle  $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ :

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)). \quad \blacklozenge$$

**Bemerkung:** Bezeichnet  $X$  eine beliebige Zufallsvariable, so gilt:

Der Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X, X, \dots, X)$  mit  $n$  identischen Komponenten besitzt die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke  $C^*$  als Copula.

Der Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X, -X)$  mit zwei Komponenten besitzt die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke  $C_*$  als Copula. Ist  $X$  positiv, so besitzt auch der Zufallsvektor  $\mathbf{X} = \left(X, \frac{1}{X}\right)$  die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke  $C_*$  als Copula.

Zufallsvektoren, die  $C^*$  oder  $C_*$  als Copula besitzen, heißen *komonoton* bzw. *kontramomonoton*.

Allgemein gilt:

Ein Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X, Y)$  ist *komonoton* genau dann, wenn es eine Zufallsvariable  $Z$  und gleichsinnig wachsende Funktionen  $f, g$  gibt, so dass  $X = f(Z)$  und  $Y = g(Z)$  ist.

Ein Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X, Y)$  ist *kontramomonoton* genau dann, wenn es eine Zufallsvariable  $Z$  und Funktionen  $f, g$  gibt, die gegensinnig wachsen, so dass  $X = f(Z)$  und  $Y = g(Z)$  ist.

Die Korrelation  $\rho(X, Y)$  ist *maximal* genau dann, wenn  $\mathbf{X} = (X, Y)$  *komonoton* ist. Sie beträgt 1, wenn  $X$  und  $Y$  positiv linear abhängig sind.

Die Korrelation  $\rho(X, Y)$  ist *minimal* genau dann, wenn  $\mathbf{X} = (X, Y)$  *kontramomonoton* ist. Sie beträgt  $-1$ , wenn  $X$  und  $Y$  negativ linear abhängig sind.<sup>18</sup>

**Beispiel 2.**<sup>19</sup> Die gemeinsame Verteilung der Risiken  $X$  und  $Y$  sei durch die folgende Tabelle gegeben:

$P(X = x, Y = y)$		$x$			$P(Y = y)$	$P(Y \leq y)$
		0	50	100		
$y$	0	$\beta$	$0,440 - \beta$	0,000	0,440	0,440
	40	$0,554 - \beta$	$\beta$	0,001	0,555	<b>0,995</b>
	50	0,000	0,001	0,004	0,005	1,000
$P(X = x)$		0,554	0,441	0,005		
$P(X \leq x)$		0,554	<b>0,995</b>	1,000		

Tabelle 1: gemeinsame Verteilung der Risiken, Fall 1

<sup>18</sup> Vgl. Theorem 5.25 in McNeil et al. (2005).

<sup>19</sup> Aus Pfeifer (2013).

mit  $0 \leq \beta \leq 0.440$ . Es gilt:  $\text{VaR}_\alpha(X) = 50$ ,  $\text{VaR}_\alpha(Y) = 40$  (für  $\alpha = 0.005$ ).

Für die Momente von  $X$  und  $Y$  erhält man ( $\sigma$  bezeichne die Standardabweichung):

$E(X)$	$E(Y)$	$\sigma(X)$	$\sigma(Y)$	$\rho(\beta) = \rho(X, Y)$
22,550	22,450	25,377	19,912	$-0,9494 + 3,9579\beta$

Tabelle 2: Momente und Korrelationen, Fall 1

Die insgesamt möglichen Risiko-Korrelationen liegen damit im Intervall  $[-0.9494; 0.7921]$ , wobei eine Korrelation von Null für  $\beta = 0.2399$  angenommen wird.

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung des Summen-Risikos  $S = X + Y$ :

$s$	0	40	50	90	100	140	150
$P(S = s)$	$\beta$	$0,554 - \beta$	$0,440 - \beta$	$\beta$	0,001	0,001	0,004
$P(S \leq s)$	$\beta$	0,554	$0,994 - \beta$	0,994	<b>0,995</b>	0,996	1,000

Tabelle 3: Verteilung des Summenrisikos, Fall 1

Damit liegt ein *Risikokonzentrationseffekt* vor wegen

$$\text{VaR}_\alpha(S) = 100 > 90 = \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y),$$

unabhängig vom Parameter  $\beta$  und daher auch unabhängig von den möglichen (positiven wie negativen) Korrelationen zwischen  $X$  und  $Y$ !

Ändert man die obige Kontingenztafel geringfügig ab, erhält man folgende Situation:

$P(X = x, Y = y)$		$x$			$P(Y = y)$	$P(Y \leq y)$
		0	50	100		
$y$	0	$\beta$	$0,440 - \beta$	0,000	0,440	0,440
	40	$0,554 - \beta$	$0,001 + \beta$	0,000	0,555	<b>0,995</b>
	50	0,000	0,000	0,005	0,005	1,000
$P(X = x)$		0,554	0,441	0,005		
$P(X \leq x)$		0,554	<b>0,995</b>	1,000		

Tabelle 4: gemeinsame Verteilung der Risiken, Fall 2

mit  $0 \leq \beta \leq 0,440$ . Da sich die Randverteilungen nicht geändert haben, gilt nach wie vor:  $\text{VaR}_\alpha(X) = 50$ ,  $\text{VaR}_\alpha(Y) = 40$  (für  $\alpha = 0,005$ ) mit gleichen Momenten und fast gleichen Korrelationen

$E(X)$	$E(Y)$	$\sigma(X)$	$\sigma(Y)$	$\rho(\beta) = \rho(X, Y)$
22,550	22,450	25,377	19,912	$-0,9484 + 3,9579\beta$

Tabelle 5: Momente und Korrelationen, Fall 2

Die insgesamt möglichen Risiko-Korrelationen liegen damit im geringfügig nach rechts verschobenen Intervall  $[-0,9484; 0,7931]$ , wobei eine Korrelation von Null hier für  $\beta = 0,2396$  angenommen wird.

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung des Summen-Risikos  $S = X + Y$ :

$s$	0	40	50	90	150
$P(S = s)$	$\beta$	$0,554 - \beta$	$0,440 - \beta$	$0,001 + \beta$	0,005
$P(S \leq s)$	$\beta$	0,554	$0,994 - \beta$	<b>0,995</b>	1,000

Tabelle 6: Verteilung des Summenrisikos, Fall 2

Damit liegt jetzt ein (unechter) *Diversifikationseffekt* vor wegen

$$\text{VaR}_\alpha(S) = 90 = \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y),$$

unabhängig vom Parameter  $\beta$  und daher auch unabhängig von den möglichen (positiven wie negativen) Korrelationen zwischen  $X$  und  $Y$ . Diese Situation kann auch durch keine andere Wahl der gemeinsamen Verteilung bei gleichen Randverteilungen verbessert werden, d.h. eine echte Diversifikation dieses Portfolios ist bei der gegebenen Randverteilungsstruktur grundsätzlich nicht möglich.

Dieses Beispiel zeigt also eindrucksvoll, dass das Vorliegen eines *Risikokonzentrationseffekts* oder eines *Diversifikationseffekts* bei gleichen Randverteilungen der Risiken vollständig unabhängig von deren Korrelationen ist, wobei hier sogar fast das gesamte mögliche Spektrum von Korrelationen zwischen  $-1$  und  $+1$  realisiert werden kann.

Im obigen Beispiel ist übrigens die Korrelation zwischen den Risiken  $X$  und  $Y$  maximal im Fall 2 mit Wert  $0,7931$ , weil hier gerade die komonotone Situation vorliegt. Dies kann man folgendermaßen nachprüfen:

Es sei  $Z$  eine diskrete Zufallsvariable mit der Verteilung

$z$	0	40	50	100
$P(S = s)$	0,440	0,114	0,441	0,005
$P(S \leq s)$	0,440	0,554	0,995	1,000

Tabelle 7: Verteilung der Hilfsvariablen  $Z$

Mit den schwach monoton wachsenden Abbildungen  $f$  und  $g$ , definiert durch

$z$	0	40	50	100
$f(z)$	0	0	50	100
$g(z)$	0	40	40	50

Tabelle 8: Definition der Transformationen  $f$  und  $g$

erhält man über  $X := f(Z)$  und  $Y := g(Z)$  zwei Darstellungen der Risiken mit der in Tabelle 4 gegebenen gemeinsamen Verteilung, für  $\beta = 0.440$ . Offensichtlich entspricht der komonotone Fall entgegen der Intuition aber nicht dem Worst Case in Bezug auf den Value at Risk für das Summenrisiko, wie der obige Fall 1 zeigt.

Gelegentlich wird an dieser Stelle von Praktikern angemerkt, dass solche Beispiele doch recht künstlich seien und in der Realität nicht vorkämen. Das folgende konkrete Beispiel zeigt das Gegenteil.

**Beispiel 3.** Die nachfolgende Tabelle enthält bezahlte, inflationsbereinigte Schäden über 24 Jahre aus einem realen Nat-Cat Portfolio:

Jahr	Risiko X	Risiko Y	Summe S	$u$	$\text{VaR}_{1-u}(X)$	$\text{VaR}_{1-u}(Y)$	$\text{VaR}_{1-u}(X) + \text{VaR}_{1-u}(Y)$	$\text{VaR}_{1-u}(S)$
1	40,513	44,650	85,163	0,04	13,954	12,673	26,627	43,582
2	16,968	28,874	45,842	0,08	14,987	19,016	34,003	44,594
3	45,337	51,018	96,355	0,12	16,960	27,470	44,430	45,842
4	57,120	19,016	76,136	0,16	16,968	27,634	44,602	50,810
5	41,480	27,470	68,950	0,20	17,489	28,595	46,084	50,823
6	14,987	28,595	43,582	0,24	22,750	28,874	51,624	57,342
7	74,524	101,544	176,068	0,28	24,574	33,260	57,834	57,834
8	64,578	111,933	176,511	0,32	30,014	36,856	66,870	68,950
9	42,072	92,727	134,799	0,36	30,745	38,252	68,997	71,211
10	24,574	33,260	57,834	0,40	33,055	39,853	72,908	76,136
11	177,842	81,139	258,981	0,44	38,150	44,650	82,800	81,720
12	17,489	39,853	57,342	0,48	40,513	48,461	88,974	85,163
13	70,719	60,297	131,016	0,52	40,667	50,975	91,642	86,999
14	30,014	56,985	86,999	0,56	41,480	51,018	92,498	89,443
15	40,667	140,794	181,461	0,60	42,072	55,663	97,735	96,355
16	112,692	55,663	168,355	0,64	45,337	56,985	102,322	96,417
17	13,954	36,856	50,810	0,68	51,191	60,297	111,488	131,016
18	30,745	50,975	81,720	0,72	57,120	63,362	120,482	134,799
19	38,150	12,673	50,823	0,76	64,578	81,139	145,717	168,355
20	668,552	276,521	945,073	0,80	70,719	92,727	163,446	176,068
21	22,750	48,461	71,211	0,84	74,524	101,544	176,068	176,511
22	16,960	27,634	44,594	0,88	112,692	111,933	224,625	181,461
23	33,055	63,362	96,417	0,92	177,842	140,794	318,636	258,981
24	51,191	38,252	89,443	0,96	668,552	276,521	945,073	945,073

Tabelle 9: bezahlte Schäden aus einem Nat-Cat Portfolio

Der grau markierte Bereich in der Tabelle zeigt auch empirisch einen deutlichen Risikokonzentrationseffekt.

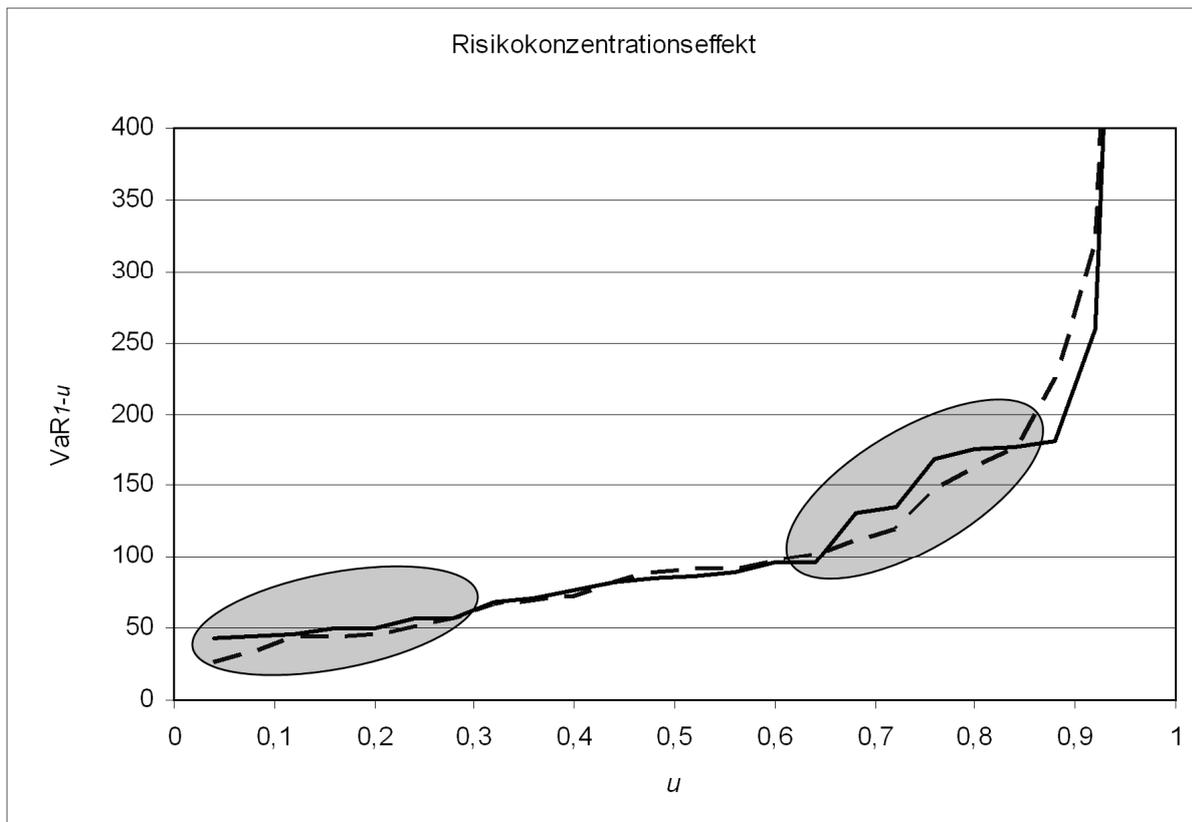


Abbildung 2: graphische Darstellung des Risikokonzentrationseffekts  
 Durchgezogene Linie:  $VaR_{1-u}(S)$ , gestrichelte Linie:  $VaR_{1-u}(X) + VaR_{1-u}(Y)$

Das Problem, unter welchen Bedingungen an die gemeinsame Verteilung der Risiken bzw. an die zugehörige Copula der Worst Case in Bezug auf den Value at Risk für das Summenrisiko eintritt, wurde erst in jüngerer Zeit vollständig gelöst.<sup>20</sup>

Im Fall von zwei Risiken ist die diesem Fall zuzurechnende Copula – in Abhängigkeit vom Risikoniveau  $\alpha$  – charakterisiert durch eine lokale Kontramonaltonie „in der oberen rechten Ecke“<sup>21</sup>. Wir verwenden hier die folgenden Modifikationen für unsere Gegenbeispiele:

<sup>20</sup> vgl. etwa Embrechts et al. (2013).

<sup>21</sup> Siehe Embrechts et al. (2013), Fig. 1, S. 2754.

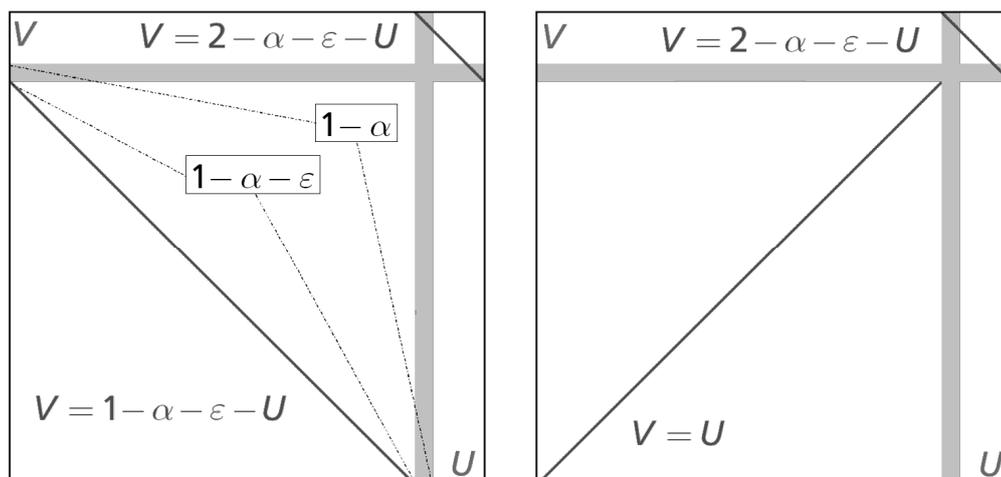


Abbildung 3: graphische Darstellung extremer Copulas  
 untere extreme Copula  $\underline{C}$                       obere extreme Copula  $\bar{C}$

**Beispiel 4.** Die Risiken  $X$  und  $Y$  mögen der gleichen Lognormalverteilung  $\mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$  mit  $\sigma > 0$  genügen, was insbesondere  $E(X) = E(Y) = 1$  bedeutet.<sup>22</sup>

Die folgende Tabelle zeigt einige numerische Ergebnisse für die extremalen Copulas  $\underline{C}$  und  $\bar{C}$ , insbesondere die maximal mögliche Spanne der dadurch induzierten Korrelationen. Gemäß dem Solvency II-Standard sei  $\alpha = 0,005$  gewählt (und  $\epsilon = 0,001$ , was hier ausreicht).<sup>23</sup> In allen Fällen liegt ein Risikokonzentrationseffekt vor, der mit wachsendem  $\sigma$  zunimmt.

$\sigma$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$\text{VaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(Y)$	1,2873	1,6408	2,0704	2,5866	3,1992	3,9177	4,7497
$\text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)$	2,5746	3,2816	4,1408	5,1732	6,3984	7,8354	9,4994
$\text{VaR}_\alpha(X + Y)$	2,6205	3,3994	4,3661	5,5520	6,9901	8,7134	10,7537
$\rho_{\min}(X, Y)$	-0,8719	-0,8212	-0,7503	-0,6620	-0,5598	-0,4480	-0,3310
$\rho_{\max}(X, Y)$	0,9976	0,9969	0,9951	0,9920	0,9873	0,9802	0,9700

Tabelle 10: Risikomaße und Korrelationen für lognormalverteilte Risiken mit extremen Copulas

Die Tatsache, dass zwei (z.B. lognormal-verteilte) Risiken mit fast beliebiger Korrelationsstruktur funktional so konstruiert werden können, dass ihre Aggregation zu einer Risikokonzentration führt, kann - zumindest empirisch - auch in höheren Dimensionen leicht gezeigt werden, und zwar unter Benutzung eines im Folgenden genauer beschriebenen Kon-

<sup>22</sup> Solche Annahmen werden beispielsweise in dem Modul *Non-Life* der Säule I unter Solvency II für Schadenquoten getroffen.

<sup>23</sup> Aus Pfeifer (2013).

struktionsprinzips mit einer „gleichmäßig schlechtesten“ Gauß-Copula<sup>24</sup> für die „obere rechte Ecke“ (mit den paarweise negativen Korrelationen  $-\frac{1}{n-1}$  für unterschiedliche Koordinaten in  $n$  Dimensionen).

**Satz:** Es seien  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$   $n$ -dimensionale Zufallsvektoren mit stetigen uniformen Randverteilungen  $\mathcal{U}[0,1]$  und  $I$  eine  $B(1,p)$ -binomialverteilte Zufallsvariable mit  $0 < p < 1$ , unabhängig

von  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ . Dann besitzt der Zufallsvektor  $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}$  mit den Komponenten

$$W_j := I \cdot p \cdot U_j + (1-I) \cdot [p + (1-p) \cdot V_j] \text{ für } j = 1, \dots, n$$

ebenfalls die Randverteilung  $\mathcal{U}[0,1]$ . ♦

Mit anderen Worten: Der Satz gestattet eine stückweise Konstruktion „neuer“ Copulas aus gegebenen. (Man nennt solche Copulas deshalb auch *Patchwork-Copulas*.)

Die zweidimensionale Copula-Konstruktion des letzten Beispiels ist genau von diesem Typ, wobei  $\mathbf{V}$  die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke als Copula besitzt, und  $\mathbf{U}$  im Prinzip einer beliebigen Copula folgen kann (zwischen der unteren und oberen Fréchet-Hoeffding-Schranke, inklusive der Unabhängigkeit der Komponenten).

Im folgenden Beispiel, das sich auf den obigen Satz stützt, besitzt  $\mathbf{V}$  eine „gleichmäßig schlechteste“ Gauß-Copula mit den paarweisen Korrelationen  $\rho(U_i, U_j) = -\frac{1}{2}$  für  $i \neq j$ .

Die folgende Graphik zeigt einen Ausschnitt der empirischen Verteilungsfunktion  $\hat{F}_3$  der Summe von *drei*  $\mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$ -lognormalverteilten Risiken  $X_1, X_2, X_3$  für  $\sigma = 1$  für die drei Fälle

1.  $\mathbf{U}$  folgt einer „gleichmäßig schlechtesten“ Gauß-Copula (linker Ast)
2.  $\mathbf{U}$  besitzt unabhängige Komponenten (mittlerer Ast)
3.  $\mathbf{U}$  folgt der oberen Fréchet-Hoeffding-Schranke als Copula (rechter Ast).

Der Simulationsumfang beträgt jeweils 1.000.000. Die paarweisen empirischen Korrelationen zwischen jeweils zwei Risiken liegen im Intervall  $[0,14; 0,91]$ , mit dem Wert 0,32 in Fall 2.

<sup>24</sup> Für eine detaillierte Diskussion von Gauß- und verwandten Copulas vgl. etwa McNeil et al. (2005), S. 190ff. Man erhält sie aus einer multivariaten Normalverteilung mit standard-normalen Randverteilungen durch Transformation der Randrisiken mittels der Verteilungsfunktion  $\Phi$  der Standard-Normalverteilung auf stetig gleichverteilte Risiken.

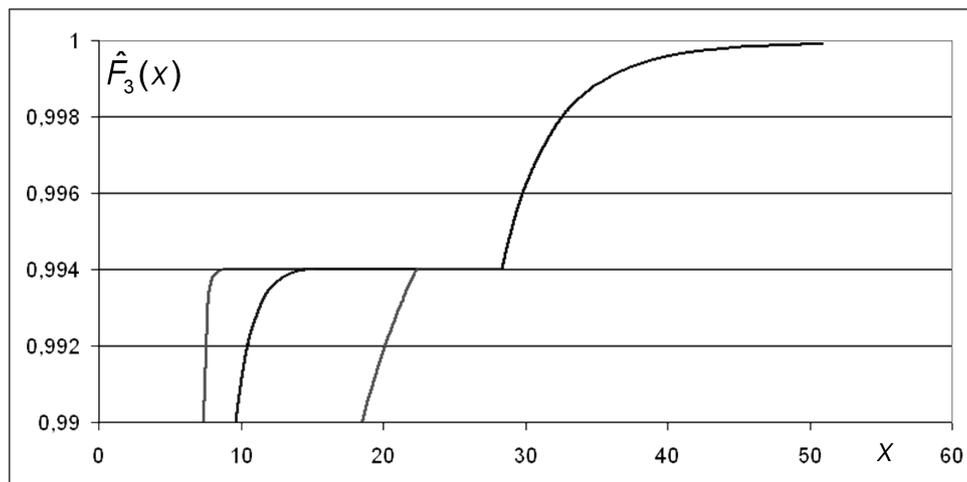


Abbildung 4: empirische Verteilungsfunktionen des Summenrisikos unter verschiedenen Abhängigkeitsstrukturen

Hier gilt  $\sum_{i=1}^3 \text{VaR}_{0,005}(X_i) = 23,913$ , aber (empirisch)  $\widehat{\text{VaR}}_{0,005}\left(\sum_{i=1}^3 X_i\right) > 28,028$  in allen drei Fällen.

## 1.4 Zusammenfassung und Fazit

Das ursprüngliche Ziel von Solvency II, eine gegenüber Solvabilität I stärkere Risiko-Orientierung für die Bestimmung der erforderlichen Eigenmittel eines Versicherungsunternehmens zur Stärkung der Sicherheit seiner Kunden zu erreichen, ist unstrittig positiv zu bewerten. Die in der jetzigen Fassung von Solvency II formulierten Modellannahmen für die Säule I sind aber inhaltlich höchst fragwürdig und aus Sicht der Mathematik nicht zu rechtfertigen. Im Einzelnen:

- „Wahrscheinlichkeiten“ lassen sich grundsätzlich weder „messen“ noch „garantieren“. Sie sind ein rein hypothetisches Modell-Konstrukt, dessen direkte Anwendbarkeit insbesondere auf ökonomische Prozesse fraglich ist. Eine wie in der Rahmenrichtlinie oder dem neuen Aufsichtsgesetz „garantierte“ Sicherheit von 99,5% kann es daher nicht geben. Eine solche Zielgröße kann allenfalls als Motivation für die Entwicklung einer Berechnungsmethode für Eigenkapitalanforderungen dienen.
- Das vorgegebene Risikomaß Value at Risk ist nicht kohärent und führt daher **nicht grundsätzlich** zu einem Diversifikationseffekt bei schwacher Korrelation der Risiken, auch nicht bei einer wie auch immer gearteten Anpassung der Korrelationskoeffizienten.
- Es gibt **prinzipiell keinen** aus Sicht der Mathematik zu rechtfertigenden Zusammenhang zwischen Diversifikation und Korrelation von Risiken unter dem Risikomaß Value at Risk.

- Die im Gesetz unterstellte funktionale „Monotonie“ eines Risikomaßes und die dahinter stehende Auffassung von „Risiko“ ist zumindest aus praktisch-ökonomischer Sicht fragwürdig.
- Die Alternative „Expected Shortfall“, wie sie in der Schweiz für den SST verwendet wird und die in jedem Fall – auch stochastisch abhängiger Risiken – zu Diversifikationseffekten führt, ist bei einem (theoretischen) Risikoniveau von 0,5% nicht praktikabel. Es ist auch prinzipiell nicht möglich, durch Absenkung des Risikoniveaus eine Art globale Äquivalenz zum Value at Risk herzustellen.
- Die schon von der IAA früher vorgeschlagene Alternative „Standardabweichungsprinzip“ *SDP* zur Risikomessung erfüllt bis auf die funktionale Monotonie alle Eigenschaften eines kohärenten Risikomaßes, hält aber nicht grundsätzlich ein gegebenes Sicherheitsniveau ein.

**Fazit:** Will man Diversifikationseffekte bei der Bestimmung von Solvenzkapitalien in mathematisch sauberer Form – insbesondere über Korrelationen – berücksichtigen, muss das Risikomaß Value at Risk zwangsläufig zugunsten anderer Risikomaße aufgegeben werden. Die beiden naheliegenden Alternativen Expected Shortfall oder *SDP* halten dabei als potenzielles Manko ein vorgegebenes Risikoniveau nicht zwingend ein. Das *SDP* bietet aber dagegen noch den Vorteil, Diversifikationseffekte auf der Basis von Korrelationen korrekt zu berücksichtigen.

## 1.5 Literatur

BENNEMAN, C. OEHLENBERG, L., STAHL, G. (Hrsg.) (2011): Handbuch Solvency II. Von der Standardformel zum Internen Modell, vom Governance-System zu den MaRisk VA. Schäffer-Poeschel-Verlag, Stuttgart.

COTTIN, C., DÖHLER, S. (2011): Risikoanalyse. Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken mit Praxisbeispielen. 2. Aufl., Springer Spektrum, Wiesbaden.

DIRECTIVE 2009/138/EC OF THE EUROPEAN PARLIAMENT AND OF THE COUNCIL of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II). Official Journal of the European Union (2009), Vol. 52, L 335.

DOFF, R. (2011): Risk Management for Insurers. Risk Control, Economic Capital and Solvency II. 2<sup>nd</sup> Ed., RISK Books, London.

EMBRECHTS, P., PUCETTI, G., RÜSCHENDORF, L. (2013): Model Uncertainty and VaR Aggregation. Journal of Banking & Finance 37, 2750–2764.

FMA (2012): Solvency II Handbuch. Eine Einführung in das neue europäische Versicherungsaufsichtsrecht. Österreichische Finanzmarkt-Aufsicht, LexisNexis, Wien.

GESETZ ZUR MODERNISIERUNG DER FINANZAUF SICHT ÜBER VERSICHERUNGEN vom 1.4.2015, in: Bundesgesetzblatt Jahrgang 2015 Teil I Nr. 14, ausgegeben zu Bonn am 10. April 2015.

GRÜNDL, H., KRAFT, M. (HRSG.) (2015): Solvency II – Eine Einführung. Grundlagen der neuen Versicherungsaufsicht. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

IAA (2004): A Global Framework for Insurer Solvency Assessment. International Actuarial Association, Ontario, ISBN: 0-9733449-0-3.

MCNEIL, A.J., FREY, R., EMBRECHTS, P. (2005). Quantitative Risk Management - Concepts, Techniques, Tools. Princeton Univ. Press, Princeton.

PFEIFER, D. (2013): Correlation, tail dependence and diversification. In: C. Becker, R. Fried, S. Kuhnt (Hrsg.): Robustness and Complex Data Structures. Festschrift in Honour of Ursula Gather, 301 - 314, Springer, Berlin.

PFEIFER, D. (2014): Stellungnahme zum Regierungsentwurf eines Gesetzes zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen, Dokument zur öffentlichen Anhörung des „Entwurfs eines Gesetzes zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen“ im Finanzausschuss des Deutschen Bundestages, Dezember 2014.