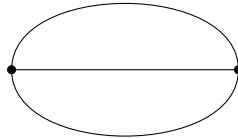


Beispielaufgaben zum Zertifikat
null problemo – Mathematisches Problemlösen
2027

Aufgabe 1.

Wir betrachten Graphen, bei denen von jeder Ecke genau drei Kanten ausgehen (man sagt auch, jede Ecke hat den Grad 3). Dabei sollen Mehrfachkanten erlaubt sein, aber keine Schleifen (d.h. keine Kanten, die eine Ecke mit sich selbst verbinden). Außerdem sollen die Graphen zusammenhängend sein.

Beispiel:



1. Zeichnen Sie ein Beispiel eines solchen Graphen mit 4 Ecken und eines mit 6 Ecken.
2. Gibt es auch einen solchen Graphen mit 3 Ecken?
3. Zeigen Sie: für jeden solchen Graphen muss die Anzahl der Kanten durch 3 teilbar sein.
4. Zeigen Sie: hat man einen *ebenen* solchen Graphen (d.h. Kanten kreuzen sich nicht, außer in Ecken des Graphen), so hat er genau $2f - 4$ Ecken, wobei f die Anzahl der Flächen ist, in die der Graph die Ebene zerteilt.

Aufgabe 2.

1. Sei $a_n = 5^n - 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie a_1, a_2, a_3, a_4 .
2. Beweisen Sie, zum Beispiel mit Hilfe vollständiger Induktion, dass a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist.
3. Betrachten Sie nun die Zahlen $b_n = 2^n + 1$. Berechnen Sie diese für einige Werte von n und untersuchen Sie sie auf Teilbarkeit durch 3. Versuchen Sie, ein Muster zu erkennen und zu beweisen, dass dieses immer gilt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass es unter 7 beliebigen natürlichen Zahlen immer zwei gibt, deren Summe oder Differenz durch 10 teilbar ist. Stimmt das auch, wenn man 7 durch 6 ersetzt? (vgl. Buch A. 9.10)