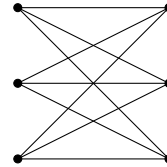
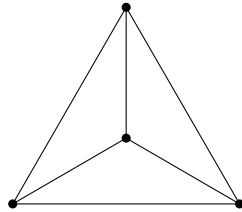


Lösungen zu den Beispielaufgaben zum Zertifikat
null problemo – Mathematisches Problemlösen
2027

Lösung zu Aufgabe 1.

1. Beispiele:



2. Nein.

1. Beweis: Angenommen, es gäbe einen solchen Graphen. Betrachte eine Ecke E . Von ihr gehen drei Kanten aus. Da es nur zwei weitere Ecken gibt, müssen 2 davon zu einer der Ecken (nenne wir sie E') und eine zu der anderen (E'') gehen (denn gingen alle drei zur selben Ecke, dann wäre der Graph nicht zusammenhängend). Damit E' den Grad drei hat, muss es eine Kante von E' nach E'' geben. Nun kann es aber keine weiteren Kanten geben, und E'' hat erst den Grad zwei.

2. Beweis: Für jeden solchen Graphen muss

$$3e = 2k \tag{1}$$

gelten, wobei e die Anzahl der Ecken und k die Anzahl der Kanten ist. Denn zählt man für jede Ecke die Anzahl der ausgehenden Kanten, so hat man insgesamt $3e$ Kanten gezählt. Dabei hat man aber jede Kante doppelt gezählt, einmal von jedem ihrer Endpunkte aus. Also folgt $3e = 2k$. (Dies ist die ‚Ecken-Kanten-Formel‘.)

Daraus folgt, dass e gerade sein muss.

3. Das folgt aus $3e = 2k$, siehe oben.

4. Für ebene zusammenhängende Graphen gilt die Eulersche Polyederformel:

$$e - k + f = 2.$$

Setzt man hierin nun $k = \frac{3}{2}e$ ein (folgt aus (1)), erhält man $-\frac{1}{2}e + f = 2$. Multipliziert man nun mit zwei, folgt $-e + 2f = 4$, also $e = 2f - 4$.

Lösung zu Aufgabe 2.

1. $a_1 = 3$, $a_2 = 21$, $a_3 = 117$, $a_4 = 609$.

2. Beweis mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Da $a_1 = 3$ durch 3 teilbar ist, gilt die Behauptung für $n = 1$.

Induktionsschritt: Angenommen, die Behauptung gilt für eine Zahl n , d.h. a_n ist durch 3 teilbar. Es ist

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 5^{n+1} - 2^{n+1} \\&= 5 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n \\&= 3 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n = 3 \cdot 5^n + 2 \cdot (5^n - 2^n) \\&= 3 \cdot 5^n + 2a_n\end{aligned}$$

Da sowohl $3 \cdot 5^n$ als auch a_n (nach Induktionsvoraussetzung) durch 3 teilbar sind, ist auch a_{n+1} durch 3 teilbar.

3. $b_1 = 3, b_2 = 5, b_3 = 9, b_4 = 17, b_5 = 33, b_6 = 65$. Offenbar sind b_1, b_3, b_5 durch 3 teilbar, die anderen nicht. Dies legt die Vermutung nahe:

Behauptung: b_n ist allgemein für ungerades n durch 3 teilbar, aber nicht für gerades n .

Beweis mit vollständiger Induktion: Zunächst gilt

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= 2^{n+1} + 1 = 2 \cdot 2^n + 1 \\&= 2 \cdot (b_n - 1) + 1 = 2b_n - 2 + 1 \\&= 2b_n - 1\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}b_{n+2} &= 2b_{n+1} - 1 = 2(2b_n - 1) - 1 \\&= 4b_n - 3\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung für ungerade n mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $b_1 = 3$ ist durch 3 teilbar.

Induktionsschluss (hier von n auf $n + 2$): Angenommen, b_n ist durch 3 teilbar (n ungerade). Dann ist auch $b_{n+2} = 4b_n - 3$ durch 3 teilbar, weil b_n und 3 es sind.

Also ist b_n für alle ungeraden n durch 3 teilbar. Ist n gerade, so ist $n - 1$ ungerade, also b_{n-1} durch 3 teilbar. Damit ist $b_n = 2b_{n-1} - 1$ nicht durch 3 teilbar, da -1 nicht durch 3 teilbar ist.

Bemerkung: Es gibt auch andere Beweise für die Aussagen in 2 und 3. Z.B. kann man die Formel

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

verwenden, die die dritte binomische Formel (der Fall $n = 2$) verallgemeinert. Dass die Formel allgemein gilt, sieht man leicht durch Ausmultiplizieren. Nimmt man $a = 5, b = 2$, folgt die Behauptung in 2.

Ersetzt man in dieser Formel b durch $-b$, so folgt für *ungerades* n mittels $b^n = -(-b)^n$, dass

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots \pm b^{n-1})$$

Setzt man $a = 2, b = 1$, so folgt, dass $2^n + 1$ durch $2 + 1 = 3$ teilbar ist, falls n ungerade ist. Das liefert zumindest einen Teil der in 3 zu zeigenden Aussage.

Lösung zu Aufgabe 3.

Falls zwei der Zahlen dieselbe Endziffer haben, ist ihre Differenz durch 10 teilbar. Falls nicht, so treten 7 verschiedene Endziffern auf. Die Endziffern können 0 oder 5 sein oder in einer der Zweiergruppen $\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}$ liegen. Da dies nur 6 Möglichkeiten sind, muss eine doppelt auftreten. Die Summe dieser beiden Zahlen ist dann durch 10 teilbar, weil $0 + 0 = 0, 5 + 5 = 10, 1 + 9 = 10$ usw.

Für 6 Zahlen stimmt das nicht unbedingt, z.B. für 10, 11, 12, 13, 14, 15.