

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Studiengang: Fach-Master Mathematik
Sommersemester 2018

MASTERARBEIT

Martingalzerlegung von Verbindlichkeiten in der Personenversicherung

Betreuender Gutachter: Prof. Dr. Marcus C. Christiansen

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Alexey Chernov

vorgelegt von: Julian Jetses

Oldenburg, den 27.09.2018

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlegende Definitionen und Notationen	4
3	\mathbb{F}^X-doppelt stochastische Markovketten	5
3.1	Definition und zentrale Eigenschaften	5
3.2	Martingaleigenschaften und Sprungzeiten	10
4	Sinnvolle Risikozerlegungen	13
4.1	Voraussetzungen für die Risikozerlegung	13
4.2	Kriterien sinnvoller Risikozerlegungen	14
5	MRT-Zerlegung im Kontext der Personenversicherung	16
5.1	Modellrahmen in der Personenversicherung	16
5.2	Definition der MRT-Zerlegung	19
6	Analyse der MRT-Zerlegung	23
6.1	Eigenschaften der MRT-Zerlegung	23
6.2	Berechnung im allgemeinen Fall	27
6.3	Berechnung im Markovfall	35
7	MRT-Zerlegung am Beispiel der privaten Krankenversicherung	41
8	Fazit und Ausblick	45
	Literaturverzeichnis	48
	Anhang	52

1 Einleitung

„Die Versicherungswirtschaft befindet sich in einer Phase veränderter gesetzlicher/regulatorischer Rahmenbedingungen, zunehmender Dynamik der Kapitalmärkte sowie schärfer werdender Wettbewerbsverhältnisse“ (Pfeifer, 2006, S. 7). Spätestens seit der Verabschiedung des Gesetzes zur Kontrolle und Transparenz im Unternehmensbereich (KontraG, 1998) auf nationaler Ebene sowie des Inkrafttretens der Solvency-II-Richtlinie (2016) auf Ebene der Europäischen Union „sind Versicherungsunternehmen gefordert, ein ganzheitliches und integriertes Risikomanagement zu implementieren, um Risiken zu erkennen, zu beurteilen und aktiv zu steuern“ (Pfeifer, 2006, S. 7). Um adäquate Strategien für das Risikomanagement entwickeln zu können, ist es daher von großer praktischer Relevanz, alle signifikanten Risiken identifizieren und deren Einfluss auf das Versicherungsunternehmen quantifizieren zu können. Hierbei kann die Zerlegung der Verbindlichkeiten in Risikofaktoren, die den Beitrag einzelner Risikoquellen am Gesamtrisiko indizieren, für das Versicherungsunternehmen somit von großem Nutzen sein. Zum einen ermöglicht sie die Berechnung von Kapitalallokationen z. B. mithilfe des Eulerschen Allokationsprinzips (vgl. Karabey et al., 2014) sowie die Ableitung strategischer Konsequenzen für das Produktdesign. Zum anderen können Risikozerlegungen, im Rahmen von Solvency II, bei der Berechnung der Solvenzkapitalanforderung und der dazu erforderlichen Bewertung einzelner Risikoquellen verwendet werden (vgl. Solvency II-Rahmenrichtlinie 2009/138/EC, Art. 104).

Allerdings sind Versicherungsunternehmen einer Vielzahl von Marktrisiken (z. B. Zinsrisiko, Aktienrisiko usw.) und versicherungsspezifischen Risiken (z. B. Sterblichkeits- bzw. Langlebighkeitsrisiko, Morbiditätsrisiko usw.) ausgesetzt, die in komplexen Wechselwirkungen zueinander stehen. Speziell in der Personenversicherung hängen Auszahlungen, welche Jahrzehnte nach Vertragsabschluss fällig werden können, von dem Zusammenspiel finanzieller Faktoren, demographischer Trends sowie dem tatsächlichen Auftreten von Krankheit und Tod ab. Daher ist der individuelle Risikobeitrag der verschiedenen Risikoquellen keineswegs offensichtlich oder leicht verfügbar. (vgl. Schilling et al., 2017, S. 2)

Das große Interesse an Risikozerlegungen in der Praxis spiegelt sich auch in der finanz- und versicherungsmathematischen Literatur wider, in der eine Vielzahl verschiedener Möglichkeiten zur Bestimmung der Risikofaktoren diskutiert wird. Bühlmann (2000), Fischer (2004), Christiansen und Helwich (2008) sowie Martin und Tasche (2007) studieren im Kontext der Lebensversicherung bzw. des Kreditrisikos die auf bedingten Erwartungswerten basierende *Varianzzerlegung*. Ein ähnlicher Ansatz, ebenfalls aufbauend auf bedingten Erwartungswerten, ist die *Hoeffding-Zerlegung*, welche von Rosen und Saunders (2010) im Zusammenhang mit dem Kreditrisiko untersucht wird. Christiansen (2007) fasst den Verlust des Versicherers als Funktional in den Risikoquellen auf und bestimmt die Risikofaktoren mithilfe partieller Ableitungen (*Taylorentwicklungsmethode*). Demgegenüber „schalten“ Gatzert und Wesker (2014) sowie Artinger (2010) für die Bestimmung

des Einflusses *einer* Risikoquelle die Zufälligkeit aller *übrigen* Risikoquellen aus (*Solvency-II-Ansatz*¹). (vgl. Schilling et al., 2017, S. 2)

Trotz der zahlreich vorgeschlagenen Methoden zur Risikozerlegung fehlte es an einem systematischen Vergleich der verschiedenen Ansätze. Schilling et al. (2017) schlossen diese Lücke im Rahmen ihres Artikels „Decomposing life insurance liabilities into risk factors“, der die zentrale Grundlage dieser Arbeit darstellt. Im genannten Artikel werden sechs Kriterien einer *sinnvollen Risikozerlegung* eingeführt, die eine Gegenüberstellung obiger konventioneller Ansätze möglich machen.² Genauer fordern Schilling et al. (2017), dass die Zerlegung aus eindeutig bestimmten (zufälligen) Risikofaktoren besteht, deren Aggregation das (normalisierte) Gesamtrisiko ergibt. Zusätzlich wird verlangt, dass sich jeder Risikofaktor genau einer Risikoquelle zuordnen lässt. Außerdem sollen die Risikofaktoren unabhängig von der Anordnung der Risikoquellen sowie invariant bzgl. der Skala der Risikoquellen sein. Schilling et al. (2017) stellen fest, dass keiner der oben aufgeführten Ansätze alle Kriterien erfüllt.

Zugleich präsentieren Schilling et al. (2017) im zweiten Teil ihres Artikels einen neuen Ansatz zur Zerlegung der Verbindlichkeiten einer Lebensversicherung, welcher allen Kriterien genügt. Die vorgeschlagene Methode basiert auf dem Martingaldarstellungssatz (vgl. z. B. Protter, 2005, Abschnitt IV, Theorem 43) und wurde daher – in Anlehnung an die englische Übersetzung – unter der Bezeichnung *MRT-Zerlegung* eingeführt. Hierbei wird das (normalisierte) Gesamtrisiko in eine Summe von Integralen zerlegt, dessen Integranden die kompensierten Risikoquellen sind. Der genannte Artikel diskutiert die MRT-Zerlegung für ein endliches Versicherungsportfolio, das aus einer homogenen Gruppe von Versicherungsnehmern besteht. Dabei werden die systematischen Risikoquellen durch Itô- bzw. Diffusionsprozesse (getrieben von einer mehrdimensionalen Brownschen Bewegung) in das Modell eingebunden. Demgegenüber wird das unsystematische Risiko durch einen Zählprozess modelliert, der die Anzahl der tatsächlichen aufgetretenen Todesfälle im Portfolio angibt. Die zufälligen Todeszeitpunkte der einzelnen Versicherungsnehmer werden dabei als erste Sprungzeit eines Cox-Prozesses bestimmt, dessen Intensität vom Verlauf der systematischen Risikoquellen abhängt.

Um die Reichweite der MRT-Zerlegung zu vergrößern und eine Anwendbarkeit in allgemeineren Kontexten zu ermöglichen, wird im Rahmen dieser Arbeit die Martingalzerlegung von Verbindlichkeiten in der Personenversicherung vorgestellt. Hierzu orientieren sich der zugrundeliegende Modellrahmen sowie die Beweisideen und technischen Herleitungen an Schilling et al. (2017). Die in dieser Arbeit präsentierte Verallgemeinerung besteht darin, dass, anstelle des klassischen Aktiv-Tod-Modells in der Lebensversicherung, beliebige Mehrzustandsmodelle betrachtet werden

¹Da diese Methode auch Teil des Solvency-II-Standardansatzes ist, sind Schilling et al. (2017) zur Bezeichnung „Solvency-II-Ansatz“ übergegangen.

²Schilling et al. (2017, S. 3) weisen darauf hin, dass Fischer (2004) bereits wünschenswerte Eigenschaften einer Risikozerlegung diskutierte. Allerdings fokussierte er sich auf die Zerlegung von Verbindlichkeiten einer Lebensversicherung in Marktrisiko und unsystematisches Sterblichkeitsrisiko, sodass einige dieser Eigenschaften trivial sind.

können. Genauer wird eine endliche Anzahl an Versicherungsnehmern modelliert, die zu endlich vielen Zeitpunkten zwischen endlich vielen Zuständen wechselt (vgl. Milbrodt und Helbig, 1999, S. 136). Entsprechend wird das Versicherungsportfolio nicht mehr durch einen, sondern durch endlich viele Zählprozesse abgebildet, die die Anzahl der Übergänge von einem in einen anderen Zustand angeben.

Um den Einfluss der unsicheren Entwicklung systematischer Risikoquellen auf die Übergangswahrscheinlichkeiten modellieren zu können, wird der Zustandsverlauf eines einzelnen Versicherungsnehmers durch einen stochastischen Prozess abgebildet, dessen bedingte Verteilung zu gegebenem Verlauf der systematischen Risikoquellen markovsch ist. In der Literatur werden bereits verschiedene, teilweise miteinander verwobene Ansätze diskutiert, eine bedingte Markoveigenschaft (gegeben einen Prozess $X = (X(t))_{t \geq 0}$ oder allgemeiner eine Filtration \mathbb{F}) als geeignete Generalisierung der klassischen Markoveigenschaft zu definieren. Nachdem Bielecki und Rutkowski (2002, Definition 11.3.1) zunächst eine sehr allgemeine Definition der bedingten Markoveigenschaft hervorbrachten, untersuchten später unter anderem Jakubowski und Niewęłowski (2010) sowie Bielecki et al. (2015) verschiedene Spezialfälle davon. Um die für unsere Anwendung in der MRT-Zerlegung notwendigen Eigenschaften garantieren zu können, wird im Rahmen dieser Arbeit eine alternative Definition der bedingten Markoveigenschaft vorgestellt und die Klasse der \mathbb{F}^X -doppelt stochastischen Markovketten eingeführt. Darüber hinaus wird in dieser Ausarbeitung die explizite Konstruktion einer \mathbb{F}^X -doppelt stochastischen Markovkette (bei gegebener Intensität) dargelegt. Insbesondere wird gezeigt, dass die konstruierten Prozesse der Definition von Jakubowski und Niewęłowski (2010) und somit auch der (ursprünglichen) Definition von Bielecki und Rutkowski (2002) genügen.

Zum Aufbau der vorliegenden Arbeit: Zunächst werden in Kapitel 2 grundlegende Definitionen und Notationen dieser Arbeit eingeführt. Das Kapitel 3 dient der Definition \mathbb{F}^X -doppelt stochastischer Markovketten, der Einführung des Intensitätsprozesses sowie der Darlegung einiger zentraler Eigenschaften dieser Prozesse, auf die im weiteren Verlauf der Arbeit noch zurückgegriffen wird. Im Anschluss erfolgt in Kapitel 4 eine ausführlichere Betrachtung der von Schilling et al. (2017) vorgeschlagenen Kriterien einer *sinnvollen Risikozerlegung*. Das Kapitel 5 widmet sich der Konkretisierung des Modellrahmens sowie einer anschließenden Definition der MRT-Zerlegung im Kontext der Personenversicherung. Die Eigenschaften der MRT-Zerlegung sowie deren Berechnung sowohl im allgemeinen Fall als auch im Markov-Fall werden in Kapitel 6 diskutiert. Darauf folgend wird in Kapitel 7 die MRT-Zerlegung am Beispiel der privaten Krankenversicherung bestimmt. Im abschließenden Kapitel 8 werden die Ergebnisse resümiert und die sich hieraus ergebenden Forschungsfragen formuliert.

2 Grundlegende Definitionen und Notationen

Durchgängig sei in dieser Arbeit ein vollständiger, filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ gegeben, dessen Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ den üblichen Voraussetzungen der Rechtsstetigkeit und \mathbb{P} -Vollständigkeit genüge. In der technischen Herleitung der MRT-Zerlegung stellen die Theorie der stochastischen Integration bzw. der Umgang mit stochastischen Integralen sowie das Rechnen mit bedingten Erwartungswerten die wichtigsten Hilfsmittel dar. Um die Beweise möglichst übersichtlich zu gestalten, führen wir daher in beiden Bereichen einige Notationen ein.

Für einen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definierten stochastischen Prozess $X = (X(t))_{t \geq 0}$ bezeichne \mathbb{F}^X die Augmentation der von X erzeugten Filtration. Ist X ein Semimartingal und zusätzlich $H = (H(t))_{t \geq 0}$ ein vorhersagbarer stochastischer Prozess, der bzgl. X integrierbar ist (vgl. Protter, 2005, S. 165), so verwenden wir für das Itô-Integral von H bzgl. X über $(0, t]$ die Notation

$$\int_0^t H(s) dX(s) := \int_{(0, t]} H(s) dX(s).$$

Ist $H = (H_1, \dots, H_n)$ vektorwertig, so ist das Itô-Integral komponentenweise definiert, d. h.

$$\int_0^t H(s) dX(s) := \left(\int_0^t H_1(s) dX(s), \dots, \int_0^t H_n(s) dX(s) \right).$$

Sind sowohl $X = (X_1, \dots, X_n)$ als auch $H = (H_1, \dots, H_n)$ vektorwertig, so ist das Itô-Integral als Summe definiert, d. h.

$$\int_0^t H(s) dX(s) := \sum_{i=1}^n \int_0^t H_i(s) dX_i(s).$$

Bezüglich bedingter Erwartungswerte betrachten wir nun eine reellwertige, integrierbare Zufallsvariable Y sowie eine Sub- σ -Algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Wie üblich ist $E^{\mathbb{P}}(Y|\mathcal{G})$ als die \mathbb{P} -fast sicher eindeutig bestimmte \mathcal{G} -messbare Zufallsvariable Y_0 definiert, die der Radon-Nikodym-Gleichung

$$\int_G Y_0 d\mathbb{P} = \int_G Y d\mathbb{P}$$

für alle $G \in \mathcal{G}$ genügt (Klenke, 2013, Def. 8.11). Weiter seien $X = (X(t))_{t \geq 0}$ und $Z = (Z(t))_{t \geq 0}$ beliebige stochastische Prozesse. In Anlehnung an die übliche Notation $E^{\mathbb{P}}(Y|Z(s)) := E^{\mathbb{P}}(Y|\sigma(Z(s)))$ schreiben wir im Folgenden

$$E^{\mathbb{P}}(Y|\mathcal{F}_t^X, Z(s)) := E^{\mathbb{P}}(Y|\mathcal{F}_t^X \vee \sigma(Z(s))),$$

wobei $\sigma(Z(s)) \vee \mathcal{F}_t^X$ als die kleinste σ -Algebra definiert ist, die $\sigma(Z(s))$ und \mathcal{F}_t^X enthält. Insbesondere existiert nach dem Faktorisierungslemma eine messbare Funktion g , sodass $E^{\mathbb{P}}(Y|Z(s), \mathcal{F}_t^X) = g(Z(s), X|_{[0, t]})$ ist. Ist z ein Wert, den die Zufallsvariable $Z(s)$ annimmt, so definieren wir die teilfaktorisierte Verteilung von Y gegeben $Z(s) = z$ und $X|_{[0, t]}$ durch

$$E^{\mathbb{P}}(Y|\mathcal{F}_t^X, Z(s) = z) = g(X|_{[0, t]}, z).$$

Für die bedingte Verteilung $\mathbb{P}(Y \in \cdot | \mathcal{G}) := E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Y \in \cdot\}} | \mathcal{G})$ verwenden wir entsprechend dieselben Notationen. Insbesondere sei angemerkt, dass für eine reellwertige Zufallsvariable Y nach Klenke (2013, Satz 8.37) stets eine reguläre Version der bedingten Verteilung $\mathbb{P}(Y \in \cdot | \mathcal{G})$ existiert. Ferner sei für einen Zufallsvektor $\bar{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ der bedingte Erwartungswert komponentenweise definiert, d. h.

$$E^{\mathbb{P}}(\bar{Y} | \mathcal{G}) := (E^{\mathbb{P}}(Y_1 | \mathcal{G}), \dots, E^{\mathbb{P}}(Y_n | \mathcal{G})).$$

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass die Gleichheit von Zufallsvariablen stets im fast sicheren Sinn zu verstehen ist.

3 \mathbb{F}^X -doppelt stochastische Markovketten

In diesem Kapitel führen wir die Klasse der \mathbb{F}^X -doppelt stochastischen Markovketten ein. Wir stellen eine Definition der bedingten Markoveigenschaft vor, die die für unsere Anwendung relevanten Prozesseigenschaften, wie beispielsweise die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen³, aufweist. Die explizite Konstruktion \mathbb{F}^X -doppelt stochastischer Markovketten wird zeigen, dass es hinlänglich viele stochastische Prozesse gibt, die diese Definition erfüllen. Insbesondere besitzen die konstruierten Prozesse die bedingte Markoveigenschaft nach Jakubowski und Niewęłowski (2010, Def. 2.1), die wiederum ein Spezialfall der (ursprünglichen) Definition bedingter Markovketten von Bielecki und Rutkowski (2002, Def. 11.3.1) ist. Die Bedeutung dieser Ansätze in finanz- und versicherungsmathematischen Anwendungen zeigt sich z. B. in Biagini et al. (2013b, 2016), Bielecki und Rutkowski (2000, 2003, 2004), Eberlein und Özkan (2003), Eberlein und Grbac (2013) sowie Buchardt (2014). Es sei darauf hingewiesen, dass sowohl der zugrundegelegte Aufbau als auch die dargelegten Resultate dieses Kapitels an Jakubowski und Niewęłowski (2010) angelehnt sind.

3.1 Definition und zentrale Eigenschaften

Wir setzen den in Kapitel 2 eingeführten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ voraus und erinnern zu Beginn des Abschnitts an die Definition einer gewöhnlichen zeitstetigen Markovkette.

Definition 3.1. Ein càdlàg-Prozess $C = (C(t))_{t \geq 0}$ mit endlichem Zustandsraum $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}$, der die elementare Markoveigenschaft $\mathbb{P}(C(t) \in B | \mathcal{F}_s^C) = \mathbb{P}(C(t) \in B | C(s))$, $s \leq t$, $B \subseteq \mathcal{S}$ besitzt, heißt *Markovkette (mit Zustandsraum \mathcal{S})*.

³An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass der Beweis der Prop. 3.6 in Jakubowski und Niewęłowski (2010) fehlerhaft ist. Anstelle der behaupteten Chapman-Kolmogorov-Gleichung, zeigt der Beweis nur die abgeschwächte Form $H_s^\top P(s, u) = H_s^\top P(s, t)P(t, u)$.

Im Folgenden betrachten wir einen stetigen Prozess $X = (X(t))_{t \geq 0}$, $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathfrak{X})$, wobei der Bildraum durch $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{[0, \infty)}$ und $\mathfrak{X} := \mathcal{X} \cap (\mathcal{B}(\mathbb{R}))^{[0, \infty)}$ definiert ist. Die Filtration \mathbb{F}^X wird im Folgenden als *Referenzfiltration* dienen (vgl. Jakubowski und Niewęłowski, 2010, S. 1745).

Definition 3.2. Ein càdlàg-Prozess Z heißt \mathbb{F}^X -doppelt stochastische Markovkette mit Zustandsraum $\mathcal{S} = \{1, \dots, K\}$, $K \in \mathbb{N}$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i) Für jedes $x \in \mathcal{X}$ existiert eine Markovkette Z^x mit Zustandsraum \mathcal{S} , sodass

$$\mathbb{P}((Z(t)) \in \cdot | X = x) = \mathcal{L}((Z^x(t)) | \mathbb{P})$$

ist. D. h. entlang eines Pfades $X = x$ ist Z eine Markovkette mit Zustandsraum \mathcal{S} und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{kl}(s, t, x) := \begin{cases} \mathbb{P}(Z^x(t) = l | Z^x(s) = k), & 0 \leq s < t, \mathbb{P}(Z^x(s) = k) > 0, \\ \delta_{kl}, & 0 \leq s = t, \mathbb{P}(Z^x(s) = k) = 0, \\ \mathbb{P}(Z^x(t) = l) & 0 \leq s < t, \mathbb{P}(Z^x(s) = k) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

ii) Für die Familie von stochastischen Matrizen $P(s, t) = (p_{kl}(s, t))_{k, l \in \mathcal{S}}$, definiert durch $p_{kl}(s, t) := p_{kl}(s, t, X)$, gilt:

- die Matrix $P(s, t)$ ist \mathcal{F}_t^X -messbar,
- $P(s, \cdot)$ ist \mathbb{F}^X -progressiv messbar.

Wir nennen $P = (P(s, t))_{0 \leq s \leq t}$ den *Prozess der bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten*.

Im Folgenden schreiben wir verkürzt „ \mathbb{F}^X -DS Markovketten“ anstelle von „ \mathbb{F}^X -doppelt stochastischen Markovketten“. Die Definition (3.2) beinhaltet die Klasse der zeitstetigen Markovketten (für \mathcal{F}_∞^X trivial) und verallgemeinert diese dahingehend, dass zwei Quellen der Unsicherheit modelliert werden. In Anlehnung an die Cox-Prozesse, die auch als doppelt stochastische Poisson-Prozesse bekannt sind, wurde daher die Bezeichnung „ \mathbb{F}^X -DS Markovkette“ gewählt (vgl. Jakubowski und Niewęłowski, 2010, S. 1744). Hierbei ist zu betonen, dass \mathbb{F}^X -DS Markovketten im Allgemeinen selbst nicht markovsch sind (vgl. Christiansen, 2007, Bemerkung 1.3.4).

Nach Milbrodt und Helbig (1999, Hilfssatz 4.21) erfüllen die in (3.1) definierten Übergangswahrscheinlichkeiten $P(r, t, x) = (p_{kl}(s, t, x))_{k, l \in \mathcal{S}}$ die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen (ohne Ausnahmenullmengen)

$$P(t, t, x) = \mathbb{I}, \quad t \geq 0,$$

$$P(r, t, x) = P(r, s, x)P(s, t, x), \quad r \leq s \leq t.$$

für alle $x \in \mathcal{X}$. Entsprechend gilt auch für den Prozess der bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(t, t) = \mathbb{I}, \quad t \geq 0,$$

$$P(r,t) = P(r,s)P(s,t), \quad r \leq s \leq t, \quad (3.2)$$

bzw. komponentenweise

$$p_{kl}(r,t) = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{kj}(r,s)p_{jl}(s,t), \quad r \leq t \leq s. \quad (3.3)$$

Nachstehend legen wir einige zentrale Eigenschaften der \mathbb{F}^X -DS Markovketten dar, auf wir im weiteren Verlauf der Arbeit noch zurückgreifen werden. Dafür nehmen wir im Folgenden an, dass $Z(0) = k_0$ für ein $k_0 \in \mathcal{S}$ gilt.

Satz 3.3. Sei Z eine \mathbb{F}^X -DS Markovkette. Dann gilt

$$\mathbb{P}(Z(u_n) = k_n, \dots, Z(u_1) = k_1 | \mathcal{F}_\infty^X) = p_{k_0, k_1}(0, u_1) \prod_{i=0}^{n-1} p_{k_i, k_{i+1}}(u_i, u_{i+1}) \quad (3.4)$$

und

$$\mathbb{P}(Z(u_n) = k_n, \dots, Z(u_1) = k_1 | \mathcal{F}_\infty^X) = \mathbb{P}(Z(u_n) = k_n, \dots, Z(u_1) = k_1 | \mathcal{F}_t^X) \quad (3.5)$$

für beliebige $0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq t$ und $(k_1, \dots, k_n) \in \mathcal{S}^n$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage pfadweise, d. h., es sei $x \in \mathcal{X}$ beliebig. Nach Definition 3.2 existiert eine Markovkette Z^x mit $\mathbb{P}((Z(t)) \in \cdot | X = x) = \mathcal{L}((Z^x(t)) | \mathbb{P})$. Insbesondere folgt aus der vorausgegangenen Annahme auch $\mathbb{P}(Z^x(0) = k_0) = 1$. O. E. sei $\mathbb{P}(Z^x(u_j) = k_j) > 0$ für $1 \leq j \leq n$ (andernfalls verschwinden in (3.4) auf der Teilmenge $\{X = x\}$ beide Seiten der Gleichung). Mit der Markoveigenschaft von Z^x erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z(u_n) = k_n, \dots, Z(u_1) = k_1 | X = x) &= \mathbb{P}(Z^x(u_n) = k_n, \dots, Z^x(u_1) = k_1) \\ &= \mathbb{P}(Z^x(u_{n-1}) = k_{n-1}, \dots, Z^x(u_1) = k_1) \mathbb{P}(Z^x(u_n) = k_n | Z^x(u_{n-1}) = k_{n-1}, \dots, Z^x(u_1) = k_1) \\ &= \mathbb{P}(Z^x(u_{n-1}) = k_{n-1}, \dots, Z^x(u_1) = k_1) \mathbb{P}(Z^x(u_n) = k_n | Z^x(u_{n-1}) = k_{n-1}) \\ &= \dots = \mathbb{P}(Z^x(u_1) = k_1) \mathbb{P}(Z^x(u_2) = k_2 | Z^x(u_1) = k_1) \cdots \mathbb{P}(Z^x(u_n) = k_n | Z^x(u_{n-1}) = k_{n-1}) \\ &= p_{k_0, k_1}(0, u_1, x) \prod_{i=0}^{n-1} p_{k_i, k_{i+1}}(u_i, u_{i+1}, x). \end{aligned}$$

Also gilt (3.4), woraus mit der \mathbb{F}^X -Adaptiertheit von $P(s, \cdot)$ auch (3.5) folgt. \square

Damit erhalten wir die für Anwendungen nützliche Martingalinvarianzeigenschaft.

Satz 3.4. Sei Z eine \mathbb{F}^X -DS Markovkette. Dann gelten die folgenden äquivalenten Aussagen:
i) Die H-Hypothese ist erfüllt, d. h. für jede beschränkte, \mathcal{F}_∞^X -messbare Zufallsvariable Y und für jedes $t \geq 0$ ist

$$E^{\mathbb{P}}(Y | \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^Z) = E^{\mathbb{P}}(Y | \mathcal{F}_t^X).$$

ii) Jedes \mathbb{F}^X -Martingal ist auch ein $\mathbb{F}^X \vee \mathbb{F}^Z$ -Martingal (Martingalinvarianzeigenschaft).

iii) Für jedes $t \geq 0$ und jede beschränkte, $\mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^Z$ -messbare Zufallsvariable η gilt

$$E^{\mathbb{P}}(\eta | \mathcal{F}_t^X) = E^{\mathbb{P}}(\eta | \mathcal{F}_\infty^X). \quad (3.6)$$

Beweis. Nach Jakubowski und Niewęłowski (2008, Lemma 2.2) ist die Gleichung (3.5) äquivalent zu i), d. h., der erste Teil folgt aus Satz 3.3. Für einen Beweis, dass die Formulierungen ii) und iii) äquivalent zur H-Hypothese sind, siehe z. B. Bielecki und Rutkowski (2002, Lemma 6.1.1). \square

Wie bei den gewöhnlichen Markovketten, spielt auch hier das Konzept der Intensität eine große Rolle. Hierzu bezeichnen wir im Folgenden mit $\mathcal{J} := \{(k, l) \in \mathcal{S}^2 : k \neq l\}$ die Menge der möglichen Übergänge.

Definition 3.5. Wir sagen, dass eine \mathbb{F}^X -DS Markovkette Z eine *Intensität* besitzt, falls es einen produktmessbaren, \mathbb{F}^X -adaptierten, matrixwertigen Prozess $\Lambda = (\Lambda(s))_{s \geq 0} = (\lambda^{kl}(s))_{s \geq 0}$ gibt, sodass:

i) Λ erfüllt die folgenden Bedingungen:

$$\lambda^{kl}(s) \geq 0 \quad \forall (k, l) \in \mathcal{J}, \quad \lambda^{kk}(s) = - \sum_{l \neq k} \lambda^{kl}(s) \quad \forall k \in \mathcal{S}. \quad (3.7)$$

ii) Λ ist lokal integrierbar, d. h. für alle $T > 0$ ist

$$\int_0^T \sum_{k \in \mathcal{S}} |\lambda^{kk}(s)| ds < \infty. \quad (3.8)$$

iii) Λ löst die Kolmogorov-Rückwärtsgleichungen,

$$P(v, t) - \mathbb{I} = \int_v^t \Lambda(u) P(u, t) du, \quad v \leq t, \quad (3.9)$$

und die Kolmogorov-Vorwärtsgleichungen

$$P(v, t) - \mathbb{I} = \int_v^t P(v, u) \Lambda(u) du, \quad v \leq t. \quad (3.10)$$

Ein Prozess Λ , der diese Bedingungen erfüllt, heißt *Intensität* der \mathbb{F}^X -DS Markovkette Z .

Tatsächlich existiert für jeden lokalintegrierbaren, matrixwertigen Prozess Λ eine Lösung P , die sowohl den Kolmogorov-Rückwärtsgleichungen als auch den Kolmogorov-Vorwärtsgleichungen genügt. Genauer gilt das folgende Resultat:

Satz 3.6. Sei $\Lambda = (\Lambda(s))_{s \geq 0}$ ein produktmessbarer, \mathbb{F}^X -adaptierter, matrixwertiger Prozess, für den (3.7) und (3.8) erfüllt ist. Die (zufälligen) gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$dX(t) = -\Lambda(t)X(t)dt, \quad X(0) = \mathbb{I},$$

$$dY(t) = Y(t)\Lambda(t)dt, \quad Y(0) = \mathbb{I},$$

sind eindeutig lösbar und es gilt $X(t) = Y^{-1}(t)$. Insbesondere ergibt sich für den Prozess der bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten:

i) Die Familie von stochastischen Matrizen $P = (P(s, t))$, $0 \leq s \leq t$ mit $P(s, t) := X(s)Y(t)$ definiert eine eindeutige Lösung der Kolmogorov-Rückwärtsgleichungen (3.9) und der Kolmogorov-Vorwärtsgleichungen (3.10). Ferner ist $P(s, t)$ gegeben durch

$$P(s, t) = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t \int_s^{u_1} \cdots \int_s^{u_{n-1}} \Lambda(u_n) \cdots \Lambda(u_1) du_n \cdots du_1. \quad (3.11)$$

ii) Für jedes $s \in [0, t]$ ist $P(s, t)$ invertierbar mit inverser Matrix $Q(s, t) := X(t)Y(s)$. Insbesondere definiert $Q = (Q(s, t))$, $0 \leq s \leq t$ eine eindeutige Lösung der Integralrückwärtsgleichungen

$$dQ(s, t) = Q(s, t)\Lambda(s)ds, \quad Q(t, t) = \mathbb{I}, \quad (3.12)$$

sowie der Integralvorwärtsgleichungen

$$dQ(s, t) = -\Lambda(t)Q(s, t)dt, \quad Q(s, s) = \mathbb{I}. \quad (3.13)$$

Ferner ist $Q(s, t)$ gegeben durch

$$Q(s, t) = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_s^t \int_s^{u_1} \cdots \int_s^{u_{n-1}} \Lambda(u_1) \cdots \Lambda(u_n) du_n \cdots du_1. \quad (3.14)$$

Für einen Beweis des Satzes 3.6 siehe Jakubowski und Niewęłowski (2010, Theorem 3.8 und Prop. 3.11). Die Reihenentwicklungen (3.11) und (3.14) von P bzw. Q werden auch als Peano-Reihendarstellung des Produktintegrals bezeichnet (vgl. Gill und Johansen, 1990, Theorem 5; Milbrodt und Helbig, 1999, Satz 12.15). Insbesondere resultiert aus den Produktintegraldarstellungen die \mathcal{F}_t^X -Messbarkeit von $P(s, t)$ und $Q(s, t)$. Außerdem implizieren die Integralgleichungen (3.9) und (3.10) sowie (3.12) und (3.13), dass P und Q in beiden Argumenten stetig sind. Also sind $P(s, \cdot)$ und $Q(s, \cdot)$ auch \mathbb{F}^X -progressiv messbar. Ferner können wir für eine \mathbb{F}^X -DS Markovkette mit Intensität Λ die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen (3.2) äquivalent umformen zu

$$P(s, t) = Q(r, s)P(r, t), \quad r \leq s \leq t \quad (3.15)$$

bzw. komponentenweise zu

$$p_{kl}(s, t) = \sum_{j \in \mathcal{S}} q_{kj}(r, s) p_{jl}(r, t), \quad r \leq s \leq t. \quad (3.16)$$

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Existenzaussage, welche sicherstellt, dass es genügend Prozesse gibt, die die Definition einer \mathbb{F}^X -DS Markovkette erfüllen. D. h. unter dem Blickwinkel der Existenz, liefert die Definition 3.2 eine geeignete und sinnvolle Einführung des Begriffs der \mathbb{F}^X -DS Markovkette.

Satz 3.7. Sei $\Lambda = (\Lambda(t))_{t \geq 0}$ ein matrixwertiger Prozess, für den eine produktmessbare Abbildung $f: [0, T] \times \mathcal{X} \rightarrow (L, \mathfrak{L})$ existiert, sodass $\Lambda(t) = f(t, X|_{[0,t]})$, $t \geq 0$ ist. Hierbei seien $L \subseteq \mathbb{R}^{|\mathcal{S}| \times |\mathcal{S}|}$ und $\mathfrak{L} := L \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^{|\mathcal{S}| \times |\mathcal{S}|})$. Ferner gelten die Bedingungen (3.7) und (3.8). Dann existiert zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, auf dem \mathcal{F}_∞^X -bedingt unabhängige \mathbb{F}^X -DS Markovketten Z_i , $i = 1, \dots, m$, mit Intensität Λ definiert sind. Insbesondere erfüllen diese die Gleichungskette

$$\mathbb{P}(Z_i(t) = l | \mathcal{F}_\infty^X \vee \mathcal{F}_{s-}^{Z_i}, Z_i(s) = k) = \mathbb{P}(Z_i(t) = l | \mathcal{F}_\infty^X, Z_i(s) = k) = p_{kl}(s, t), \quad s \leq t, \quad (3.17)$$

für alle $k, l \in \mathcal{S}$.

Die Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsraums sowie der Prozesse Z_i , $i = 1, \dots, m$ kann dem Abschnitt A.1 im Anhang entnommen werden.

Bemerkung 3.8. Die Gleichung (3.17) impliziert insbesondere

$$\mathbb{1}_{\{Z_i(s)=k\}} \mathbb{P}(Z_i(t) = l | \mathcal{F}_\infty^X \vee \mathcal{F}_s^{Z_i}) = \mathbb{1}_{\{Z_i(s)=k\}} p_{kl}(s, t), \quad s \leq t, \quad (3.18)$$

für alle $k, l \in \mathcal{S}$. Daher erfüllen die im Satz 3.7 konstruierten \mathbb{F}^X -DS Markovketten Z_i , $i = 1, \dots, m$, mit Intensität Λ auch die von Jakubowski und Niewęglowski (2010, Definition 2.1) eingeführte Definition einer bedingten Markovkette mit Intensität Λ (vgl. Einführung in diesem Kapitel).

Im nächsten Abschnitt stellen wir einerseits, unter der Voraussetzung von Gleichung (3.17), die Martingaleigenschaften einiger Prozesse heraus, die mit einer \mathbb{F}^X -DS Markovkette Z eng verbunden sind und auf die wir im weiteren Verlauf der Arbeit noch zurückgreifen werden. Andererseits werden wir zeigen, dass für je zwei \mathcal{F}_∞^X -bedingt unabhängige \mathbb{F}^X -DS Markovketten \mathbb{P} -fast sicher keine Sprünge zur selben Zeit stattfinden.

3.2 Martingaleigenschaften und Sprungzeiten

Wir definieren zunächst die Prozesse H^k , $i \in \mathcal{S}$ durch

$$H^k(t) := \mathbb{1}_{\{Z(t)=k\}}.$$

D. h., der Prozess $H^k(t)$ gibt an, ob der Prozess Z zur Zeit t im Zustand k ist oder nicht. Ferner sei $H(t) := (H^1(t), \dots, H^K(t))^\top$. Insbesondere erhalten wir die zu (3.18) äquivalente Formulierung

$$H^k(s) E^{\mathbb{P}}(H^l(t) | \mathcal{F}_\infty^X \vee \mathcal{F}_s^Z) = H^k(s) p_{kl}(s, t),$$

welche wiederum äquivalent ist zu

$$E^{\mathbb{P}}(H^l(t)|\mathcal{F}_{\infty}^X \vee \mathcal{F}_s^Z) = \sum_{k \in \mathcal{S}} H^k(s) p_{kl}(s,t), \quad (3.19)$$

bzw. in der Vektor-Notation zu

$$E^{\mathbb{P}}(H(t)|\mathcal{F}_{\infty}^X \vee \mathcal{F}_s^Z) = P(s,t)^{\top} H(s). \quad (3.20)$$

Weiter definieren wir für $(k,l) \in \mathcal{J}$ den Prozess

$$H^{kl}(t) := \#\{u \leq t : Z(u-) = k, Z(u) = l\} = \int_0^t H^k(s-) dH^l(s),$$

der die Anzahl der Übergänge des Prozesses Z von k nach l im Zeitraum von 0 bis t angibt. Es gilt das folgende Resultat.

Satz 3.9. Sei $(Z(t))_{t \geq 0}$ eine \mathbb{F}^X -DS Markovkette mit Intensität Λ , die die Gleichung (3.18) erfüllt. Dann gilt:

i) Die Prozesse

$$M^k(t) := H^k(t) - \int_0^t \lambda^{Z_u^k}(u) du, \quad k \in \mathcal{S}, \quad (3.21)$$

sind lokale $\mathbb{F}^X \vee \mathbb{F}^Z$ -Martingale.

ii) Die Prozesse

$$M^{kl}(t) := H^{kl}(t) - \int_0^t H^k(s-) \lambda^{kl}(s) ds, \quad (k,l) \in \mathcal{J}$$

sind lokale $\mathbb{F}^X \vee \mathbb{F}^Z$ -Martingale.

iii) Der Prozess D , definiert durch

$$D(t) := Q(0,t)^{\top} H(t),$$

wobei $Q(0,t)$ die eindeutige Lösung der Integralgleichung

$$dQ(0,t) = -\Lambda(t)Q(0,t)dt, \quad Q(0,0) = \mathbb{I} \quad (3.22)$$

sei, ist ein lokales $\mathbb{F}^X \vee \mathbb{F}^Z$ -Martingal.

Unter Berücksichtigung von Bemerkung 3.8 verweisen wir für einen Beweis auf Jakubowski und Niewęłowski (2010, Lemma 4.3 und 4.4 sowie Korollar 4.5). Im Folgenden bezeichne $A^{kl}(t) = \int_0^t H^k(s-) \lambda^{kl}(s) ds$ den $\mathbb{F}^X \vee \mathbb{F}^Z$ -Kompensator von H^{kl} . Mit (3.7) gilt

$$\begin{aligned} H^k(t) &= H^k(0) + \sum_{l \neq k} \left(H^{lk}(t) - H^{kl}(t) \right) \\ &= H^k(0) + \sum_{l \neq k} \left(M^{lk}(t) - M^{kl}(t) \right) + \sum_{l \neq k} \left(A^{lk}(t) - A^{kl}(t) \right) \\ &= H^k(0) + \sum_{l \neq k} \left(M^{lk}(t) - M^{kl}(t) \right) + \int_0^t \sum_{l=1}^K H^l(s) \lambda^{lk}(s) ds \end{aligned}$$

$$= H^k(0) + \sum_{l \neq k} \left(M^{lk}(t) - M^{kl}(t) \right) + \int_0^t \lambda^{Z_u^k}(u) du,$$

wobei wir beim Übergang von $s-$ zu s im Integral verwendet haben, dass Z ein càdlàg-Prozess ist. Ein Vergleich mit (3.21) zeigt

$$M^k(t) = H^k(0) + \sum_{l \neq k} \left(M^{lk}(t) - M^{kl}(t) \right). \quad (3.23)$$

Zum Abschluss dieses Kapitels wenden wir uns den Sprungzeiten einer \mathbb{F}^X -DS Markovkette zu. Diese definieren wir durch

$$\begin{aligned} \tau_0 &:= 0, \\ \tau_k &:= \inf\{t > \tau_{k-1} : Z(t) \neq Z(\tau_{k-1}), Z(t-) = Z(\tau_{k-1})\}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ferner führen wir die Notation

$$\lambda^k := -\lambda^{kk} = \sum_{l \neq k} \lambda^{kl}, \quad k \in \mathcal{S}$$

ein. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass zwei \mathbb{F}^X -DS Markovketten, die gegeben \mathcal{F}_∞^X bedingt unabhängig sind, \mathbb{P} -fast sicher keine gemeinsamen Sprünge haben. Hierfür benötigen wir zunächst die folgende Aussage.

Lemma 3.10. *Sei Z eine \mathbb{F}^X -DS Markovkette mit Intensität Λ , welche Gleichung (3.18) erfüllt. Ist $\tau_k < \infty$ \mathbb{P} -f. s., so ist die Zufallsvariable*

$$E_k := \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \lambda^{Z(\tau_{k-1})}(u) du \quad (3.25)$$

unabhängig von $\mathcal{F}_\infty^X \vee \mathcal{F}_{\tau_{k-1}}^Z$. Außerdem ist $(E_i)_{1 \leq i \leq k}$ eine Folge unabhängiger exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter 1.

Unter erneuter Berücksichtigung von Bemerkung 3.8 verweisen wir für den Beweis der Aussage auf Jakubowski und Niewęłowski (2010, Prop. 5.1). Damit können wir jetzt das angesprochene Resultat beweisen.

Satz 3.11. *Seien Z_1 und Z_2 zwei \mathcal{F}_∞^X -bedingt unabhängige \mathbb{F}^X -DS Markovketten mit stetiger Intensität Λ . Die Sprungzeiten von Z_1 bzw. Z_2 seien durch τ_k bzw. σ_k , $k \in \mathbb{N}$ gegeben (vgl. (3.24)). Ist $\tau_k < \infty$ \mathbb{P} -f. s. oder $\sigma_j < \infty$ \mathbb{P} -f. s., so gilt $\mathbb{P}(\tau_k = \sigma_j) = 0$. D. h., zwei \mathcal{F}_∞^X -bedingt unabhängige \mathbb{F}^X -DS Markovketten haben \mathbb{P} -fast sicher keine gemeinsamen Sprünge.*

Beweis. Seien $k, j \in \mathbb{N}$ fest. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $X = x$ \mathbb{P} -fast sicher für ein $x \in \mathcal{X}$ gilt. In diesem Fall sind Z_1 und Z_2 unabhängige Markovketten. O. E. sei $\tau_k < \infty$ \mathbb{P} -f. s. und es bezeichne $E_k = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \lambda^{Z_1(\tau_{k-1})}(u) du$ (wie in Satz 3.25). Im ersten Schritt stellen wir die Unabhängigkeit von E_k und $\mathcal{F}_{\tau_{k-1}}^{Z_1} \vee \mathcal{F}_{\sigma_j}^{Z_2}$ fest: Da das Mengensystem $\{A \cap B : A \in \mathcal{F}_{\tau_{k-1}}^{Z_1}, B \in \mathcal{F}_{\sigma_j}^{Z_2}\}$

ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_{\tau_{k-1}}^{Z_1} \vee \mathcal{F}_{\sigma_j}^{Z_2}$ ist, genügt es unter Verwendung von Lemma 3.10 und der Unabhängigkeit von Z_1 und Z_2 festzustellen, dass für alle $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{F}_{\tau_{k-1}}^{Z_1}$ und $B \in \mathcal{F}_{\sigma_j}^{Z_2}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{E_k \in C\} \cap A \cap B) &= \mathbb{P}(\{E_k \in C\} \cap A) \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(\{E_k \in C\}) \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(\{E_k \in C\}) \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

gilt.

Sei nun $T := \{\sigma_j < \infty\} \in \mathcal{F}_{\sigma_j}^{Z_2}$. Offenbar ist dann $\mathbb{P}(\{\tau_k = \sigma_j\} \cap T^c) = 0$. Außerdem erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\tau_k = \sigma_j\} \cap T) &= \mathbb{P}\left(\left\{\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \lambda^{Z_1(\tau_{k-1})}(u) du = \int_{\tau_{k-1}}^{\sigma_j} \lambda^{Z_1(\tau_{k-1})}(u) du\right\} \cap T\right) \\ &= E^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_T E^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_{\{E_k=x\}} \middle| \mathcal{F}_{\tau_{k-1}}^{Z_1} \vee \mathcal{F}_{\sigma_j}^{Z_2}\right) \middle|_{x=\int_{\tau_{k-1}}^{\sigma_j} \lambda^{Z_1(\tau_{k-1})}(u) du}\right) \\ &= E^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_T E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{E_k=x\}}) \middle|_{x=\int_{\tau_{k-1}}^{\sigma_j} \lambda^{Z_1(\tau_{k-1})}(u) du}\right) = 0. \end{aligned}$$

Für einen Beweis der ersten Gleichheit sei auf Korollar A.2.2 im Anhang verwiesen. Die zweite Gleichheit folgt aus der Messbarkeit von $\int_{\tau_{k-1}}^{\sigma_j} \lambda^{Z_1(\tau_{k-1})}(u) du$ bzgl. $\mathcal{F}_{\tau_{k-1}}^{Z_1} \vee \mathcal{F}_{\sigma_j}^{Z_2}$. Die dritte Gleichheit verwendet die oben bewiesene Unabhängigkeit von E_k und $\mathcal{F}_{\tau_{k-1}}^{Z_1} \vee \mathcal{F}_{\sigma_j}^{Z_2}$. Des Weiteren ist $\mathbb{P}(E_k = x) = 0$, da E_k nach Lemma 3.10 exponentialverteilt ist. Also folgt die Behauptung für triviales X .

Im allgemeinen Fall gilt unter Anwendung des trivialen Falls

$$\mathbb{P}(\tau_k = \sigma_j) = E^{\mathbb{P}}(\mathbb{P}(\tau_k = \sigma_j | \mathcal{F}_{\infty}^X)) = 0,$$

womit die Aussage bewiesen ist. □

4 Sinnvolle Risikozerlegungen

Auf Basis des vorherigen Kapitels können wir uns jetzt der Martingalzerlegung von Verbindlichkeiten in der Personenversicherung zuwenden. Dazu diskutieren wir zunächst die von Schilling et al. (2017, Kapitel 2) vorgeschlagenen Mindestanforderungen, die eine Risikozerlegung erfüllen sollte, um innerhalb des Risikomanagements anwendbar zu sein.

4.1 Voraussetzungen für die Risikozerlegung

Im Folgenden setzen wir einen endlichen Zeithorizont T sowie den in Kapitel 2 eingeführten filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ voraus. Hierbei beschreibt \mathcal{F}_t die zur Zeit t

verfügbare Information, wobei wir \mathcal{F}_0 als trivial und $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ annehmen. Obwohl die technischen Resultate nicht an ein bestimmtes Maß gebunden sind, interpretieren wir im Folgenden \mathbb{P} als das physikalische Maß. Des Weiteren modellieren wir die Summe der zukünftigen aggregierten Verluste des Versicherers in $[0, T]$, d. h. gezahlte Leistungen minus erhaltene Prämien (möglicherweise auf die Zeit $t = 0$ abgezinst), durch die Zufallsvariable $L = L_{0,T}$. Hierbei interpretieren wir negative Verluste als Gewinne. Das *Gesamtrisiko des Versicherers* zur Zeit $t = 0$ fassen wir als die zufällige Abweichung des Verlustes vom Erwartungswert auf, d. h. wir definieren $R = L - E^{\mathbb{P}}(L)$.

Im Folgenden betrachten wir k Risikoquellen, die wir durch \mathbb{F} -adaptierte stochastische Prozesse $Q_i = (Q_i(t))_{0 \leq t \leq T}$, $i = 1, \dots, k$ modellieren. Wir nehmen an, dass das Gesamtrisiko R eine $\sigma(Q)$ -messbare Zufallsvariable ist, wobei $Q = (Q(t))_{0 \leq t \leq T}$ durch $Q(t) := (Q_1(t), \dots, Q_k(t))^{\top}$ definiert ist. Im Rahmen dieser Arbeit soll das Risiko R in Risikofaktoren R_i zerlegt werden, die den Risikoquellen Q_i eindeutig zugeordnet werden können. Dafür nehmen wir an, dass der Risikofaktor R_i selbst eine $\sigma(Q)$ -messbare Zufallsvariable ist, die die durch Q_i verursachte Zufälligkeit in R bemisst. Hierbei seien der Zeithorizont T und die aktuelle Zeit Null fest, sodass R nicht zeitabhängig ist. Das heißt, wir betrachten eine *statische* Zerlegung, obwohl das zugrundeliegende Modell *dynamisch* ist.

4.2 Kriterien sinnvoller Risikozerlegungen

In der aktuariellen Literatur werden zahlreiche Zerlegungen unter den oben beschriebenen Voraussetzungen vorgeschlagen (vgl. Einleitung). Um diese auch systematisch miteinander vergleichen zu können, stellen Schilling et al. (2017) Mindestanforderungen an die Relation zwischen den Risikoquellen Q_1, \dots, Q_k und den aus der Zerlegung resultierenden zugehörigen Risikofaktoren R_1, \dots, R_k heraus, welche die Zweckmäßigkeit der Zerlegung sicherstellen. Sind die nachstehenden Kriterien erfüllt, sprechen wir von einer *sinnvollen Risikozerlegung*.

P1 Zufälligkeit

Die Risikofaktoren sind durch Zufallsvariablen R_1, \dots, R_k gegeben, wobei wir R_i mit dem Risiko i identifizieren ($i = 1, \dots, k$). Wir führen die Relation \leftrightarrow ein und schreiben $(R, Q_1, \dots, Q_k) \leftrightarrow (R_1, \dots, R_k)$, um anzuzeigen, dass das Risiko R , welches von den Risikoquellen (Q_1, \dots, Q_k) abhängt, mit der Zerlegung (R_1, \dots, R_k) korrespondiert.

P2 Zuteilung

Der Risikofaktor R_i bemisst die durch die Risikoquelle Q_i verursachte Zufälligkeit in R . Formal fordern wir: Falls R $\sigma(Q_i)$ -messbar und Q_i unabhängig von $(Q_1, \dots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \dots, Q_k)$ ist, gilt $R_j = 0$ für alle $j \neq i$.

P3 *Eindeutigkeit*

Die Zerlegungsmethodik führt zu einer eindeutigen Zerlegung. Formal fordern wir: Aus $(R, Q_1, \dots, Q_k) \leftrightarrow (R_1, \dots, R_k)$ und $(R, Q_1, \dots, Q_k) \leftrightarrow (\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_k)$ folgt $R_i = \tilde{R}_i$ für alle $i = 1, \dots, k$.

P4 *Ordnungsinvarianz*

Die Zerlegung ist invariant bzgl. der Anordnung der Risikoquellen $1, 2, \dots, k$. Genauer sei $\pi : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ eine Permutation und es gelte $(R, Q_1, \dots, Q_k) \leftrightarrow (R_1, \dots, R_k)$. Dann fordern wir:

$$(R, Q_{\pi(1)}, \dots, Q_{\pi(k)}) \leftrightarrow (R_{\pi(1)}, \dots, R_{\pi(k)}). \quad (4.1)$$

P5 *Skaleninvarianz*

Die Zerlegung ist invariant bzgl. der Skala der Risikoquellen. Hierzu gelte $(R, Q_1, \dots, Q_k) \leftrightarrow (R_1, \dots, R_k)$. Ferner sei $\tilde{Q}_i(t) := f_i(Q_i(t))$, $i = 1, \dots, k$, $t \in [0, T]$, wobei $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes i eine glatte, invertierbare Funktion ist. Falls $(R, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_k) \leftrightarrow (\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_k)$ ist, so fordern wir $R_i = \tilde{R}_i$ für alle $i = 1, \dots, k$.

P6 *Aggregation*

Die Risikofaktoren aggregieren sich zum Gesamtrisiko des Versicherers. Formal fordern wir, dass es für jedes Risiko R und Risikoquellen Q mit $(R, Q_1, \dots, Q_k) \leftrightarrow (R_1, \dots, R_k)$ eine Funktion $A_{(R,Q)} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$R = A_{(R,Q)}(R_1, R_2, \dots, R_k)$$

ist.

P6* *Additive Aggregation*

Ein Spezialfall von P6 ist die additive Aggregationsfunktion. D. h., in diesem Fall ist R gegeben durch die Summe der einzelnen Risikofaktoren:

$$R = \sum_{i=1}^k R_i.$$

Für eine ausführliche Diskussion obiger Kriterien verweisen wir an dieser Stelle auf Schilling et al. (2017). Wie einleitend erläutert, zeigen Schilling et al. (2017), dass keiner der konventionellen Ansätze (Varianz-Zerlegung, Hoeffding-Zerlegung, Taylorentwicklungsmethode, Solvency-Ansatz) alle Kriterien erfüllt. Daher präsentierten sie im Kontext der Lebensversicherung die auf dem Martingaldarstellungssatz basierende *MRT-Zerlegung*, die Gegenstand des folgenden Kapitels sein wird.

5 MRT-Zerlegung im Kontext der Personenversicherung

In diesem Kapitel erfolgt eine Verallgemeinerung der MRT-Zerlegung auf den Rahmen der Personenversicherung sowie eine anschließende Diskussion ihrer Existenz und Eindeutigkeit. Dies erfordert zunächst eine Konkretisierung unseres Modells.

5.1 Modellrahmen in der Personenversicherung

Auf Basis der in Kapitel 4 beschriebenen Voraussetzungen spezifizieren wir in diesem Abschnitt die Risikoquellen Q_1, \dots, Q_k und den Verlust L im Kontext der Personenversicherung. Wir nehmen an, dass die Unsicherheit des Verlustes L einerseits auf die unsichere Entwicklung finanzieller und demographischer Faktoren sowie andererseits auf den unsicheren Zustandsverlauf der Versicherungsnehmer im Portfolio zurückzuführen ist (vgl. Schilling et al., 2017, S. 10). Zur Berücksichtigung der erstgenannten Risikoquellen führen wir einen n -dimensionalen, lokalbeschränkten Prozess $X = ((X_1(t), \dots, X_n(t))^T)_{0 \leq t \leq T}$ ein. Hierbei entspricht jedes X_i einer Risikoquelle. Wir nehmen an, dass die finanziellen und demographischen Faktoren Funktionen in X sind. Der Prozess X sei getrieben von einer n -dimensionalen Brownschen Bewegung $W = ((W_1(t), \dots, W_n(t))^T)_{0 \leq t \leq T}$.

Annahme 5.1. *Der Prozess $X = ((X_1(t), \dots, X_n(t))^T)_{0 \leq t \leq T}$ ist ein n -dimensionaler Itô-Prozess, der die Gleichung*

$$dX(t) = \theta(t)dt + \sigma(t)dW(t) \quad (5.1)$$

für einen deterministischen Startwert $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ erfüllt. Der n -dimensionale Drift-Vektor $\theta = (\theta(t))_{0 \leq t \leq T}$ und die $n \times n$ -dimensionale Volatilitätsmatrix $\sigma = (\sigma(t))_{0 \leq t \leq T}$ sind \mathbb{F}^W -adaptiert mit stetigen Pfaden. Ferner nehmen wir an, dass $\det \sigma(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, T]$ \mathbb{P} -f. s. ist.

Im Folgenden betrachten wir m homogene Versicherungsnehmer vom Alter x zur Zeit $t = 0$, deren Zustandsraum durch $\mathcal{S} = \{1, \dots, K\}$, $K \in \mathbb{N}$ gegeben ist. Wir modellieren den Zustandsverlauf der Versicherungsnehmer durch \mathcal{F}_T^X -bedingt unabhängige \mathbb{F}^X -DS Markovketten $(Z_i(t))_{0 \leq t \leq T}$, $i = 1, \dots, m$ mit Zustandsraum \mathcal{S} und stetigem Intensitätsprozess $\Lambda = (\Lambda(t))_{0 \leq t \leq T}$. Es existiere eine produktmessbare Abbildung $f: [0, T] \times \mathcal{X} \rightarrow (L, \mathfrak{L})$, sodass $\Lambda(t) = f(t, X|_{[0,t]})$, $t \geq 0$ ist. Aufgrund der Konstruktion in Satz 3.7 können wir daher o. E. annehmen, dass die Gleichung (3.17) für alle $i = 1, \dots, m$ gilt. Des Weiteren seien die Anfangszustände $Z_i(0) \in \mathcal{S}$, $i = 1, \dots, m$ deterministisch. Im Folgenden beschreibt also $Z_i(t)$ den Zustand des i -ten Versicherungsnehmers zur Zeit t . Das Portfolio entspricht dem vektorwertigen Prozess $(Z(t))_{0 \leq t \leq T}$, definiert durch $Z(t) := (Z_1(t), \dots, Z_m(t))$. Die Gesamtheit an Informationen sei gegeben durch den Verlauf der Risiken X und Z , d. h. es gelte $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X \vee \mathbb{F}^Z$. Insbesondere sei an dieser Stelle bemerkt, dass aufgrund der Invertierbarkeit von σ (vgl. Annahme 5.1) die von X und W erzeugten Filtrationen übereinstimmen, d. h. $\mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_t^W$ für alle $0 \leq t \leq T$, und daher auch $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_t^Z$ für alle $0 \leq t \leq T$

gilt. In Analogie zu Kapitel 3 definieren wir für den i -ten Versicherungsnehmer die Prozesse

$$H_i^k(t) := \mathbb{1}_{\{Z_i(t)=k\}}, \quad t \in [0, T], \quad k \in S, \quad i = 1, \dots, m,$$

und

$$H_i(t) := (H_i^1(t), \dots, H_i^K(t))^\top, \quad t \in [0, T],$$

sowie für das Portfolio

$$H^k(t) := \sum_{i=1}^m H_i^k(t) = \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{\{Z_i(t)=k\}}, \quad t \in [0, T], \quad k \in S,$$

und

$$H(t) := (H^1(t), \dots, H^K(t))^\top, \quad t \in [0, T].$$

Außerdem definieren wir für $(k, l) \in \mathcal{J}$ die Anzahl der Übergänge des i -ten Versicherungsnehmers von k nach l in $[0, t]$ durch

$$H_i^{kl}(t) := \#\{u \leq t : Z_i(u-) = k, Z_i(u) = l\} = \int_0^t H_i^k(u-) dH_i^l(u), \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, m,$$

sowie für das Portfolio durch

$$H^{kl}(t) := \sum_{i=1}^m H_i^{kl}(t), \quad t \in [0, T].$$

Die obigen Definitionen lassen sich über die Beziehung

$$H^k(t) = H^k(0) + \sum_{l \neq k} (H^{lk}(t) - H^{kl}(t)) \quad (5.2)$$

miteinander verknüpfen. Die modellierten Risiken sind daher vollständig durch die Prozesse $H^{kl} = (H^{kl}(t))_{0 \leq t \leq T}$, $(k, l) \in \mathcal{J}$ und X_i , $i = 1, \dots, n$ gegeben. Weiter bezeichne $G = (G(t))_{0 \leq t \leq T}$ den multivariaten Zählprozess $G(t) = ((H^{kl}(t))_{(k,l) \in \mathcal{J}})$. Wir definieren $\mathbb{F}^{X,G} = (\mathcal{F}_t^{X,G})_{0 \leq t \leq T}$ als die Augmentation der von den Prozessen X und G erzeugten Filtration und stellen fest, dass $\mathbb{F}^{X,G}$ eine Subfiltration von \mathbb{F} ist.

Um eine spätere Berechnung der MRT-Zerlegung zu ermöglichen, konkretisieren wir zunächst in Anlehnung an Schilling et al. (2017, S.11) den Verlust L und halten die Voraussetzungen dabei möglichst allgemein. Wir betrachten sowohl Cashflows unabhängig vom Zustand des Versicherungsnehmers als auch Cashflows bedingt durch den Zustand des Versicherungsnehmers. Außerdem unterscheiden wir zwischen diskreten und stetigen Cashflows, wobei jeder Cashflow sowohl erhaltene als auch getätigte Zahlungen enthalten kann. Dabei interpretieren wir, jeweils aus Sicht des Versicherers, positive Zahlungen als getätigte Zahlungen (z. B. Versicherungsleistungen) sowie negative Zahlungen als erhaltene Zahlungen (z. B. Prämien). Insgesamt lässt sich der Verlust

des Versicherers charakterisieren durch

$$\begin{aligned}
 L &= C_{0,T} + \sum_{k \in \mathcal{S}} \sum_{j=0}^d H^k(t_j) C_{k,j} + \sum_{k \in \mathcal{S}} \int_0^T H^k(t) C_k(t) dt + \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}} \int_0^T C_{kl}(t) dH^{kl}(t) \\
 &= C_{0,T} + \sum_{j=0}^d H(t_j)^\top C_j + \int_0^T H(t)^\top C(t) dt + \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}} \int_0^T C_{kl}(t) dH^{kl}(t),
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

wobei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_d = T$, $d \in \mathbb{N}$ diskrete Zeitpunkte sind. Ferner bezeichne $C_j = (C_{j,1}, \dots, C_{j,K})^\top$ und $C(t) = (C_1(t), \dots, C_K(t))^\top$. Die einzelnen Bestandteile in (5.3) sind wie folgt zu interpretieren:

$C_{t,T}$ die Summe aller (evtl. diskontierten) Zahlungen in $[t, T]$, die nicht vom Zustand des Versicherungsnehmers i ($i = 1, \dots, m$) abhängen (z. B. Renditen aus Investmentfonds, Leistungen einer Termfixversicherung usw.).

$C_{k,j}$ die Summe aller (evtl. diskontierten) Zahlungen zur Zeit t_j oder später, die dadurch bedingt sind, dass der Versicherungsnehmer zur Zeit t_j , $j = 0, \dots, d$ im Zustand k ist (z. B. Einmalprämien, diskrete Prämienzahlungen, Leistungen einer Erlebensfallversicherung).

$C_k(t)$ die Zeit- t -Intensität aller stetigen Zahlungen, die dadurch bedingt sind, dass der Versicherungsnehmer zur Zeit t im Zustand k ist, d. h. $C_k(t)dt$ ist die Summe aller Zahlungen an aktive Versicherungsnehmer im infinitesimalen Zeitabschnitt $[t, t + dt]$ (z. B. stetige Prämienzahlungen, stetige Rentenzahlungen).

$C_{kl}(t)$ die Summe aller (evtl. diskontierten) Zahlungen zur Zeit t , die durch Übergang von k nach l zur Zeit t bedingt sind, $t \in [0, T]$ (z. B. Todesfallleistungen unmittelbar nach dem Tod).

Wir nehmen an, dass $C_{0,T}$ und $C_{k,j}$ \mathcal{F}_T^X -messbar sind, d. h., die Cashflows sind erst zur Zeit T vollständig bekannt. Demgegenüber seien $C_k(t)$ und $C_{kl}(t)$ \mathcal{F}_t^X -messbar. Diese Annahme ist ein wesentlicher Grund dafür, dass wir zwischen stetigen und diskreten Cashflows unterscheiden. Mithilfe von (5.2) stellen wir fest, dass der Gesamtverlust L $\mathcal{F}_T^{X,G}$ -messbar ist.

Ferner definieren wir (unter Berücksichtigung der bedingten Markoveigenschaft) das auf den Zeitpunkt 0 diskontierte (prospektive) Deckungskapital eines Versicherungsnehmers zur Zeit $t \in [0, T]$ durch

$$V(t) := E^{\mathbb{P}} \left(\sum_{t_j \geq t} H_1(t_j)^\top C_j + \int_t^T H_1(t)^\top C(t) dt + \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}} \int_t^T C_{kl}(t) dH_1^{kl}(t) \middle| Z_1(t), X \right). \tag{5.4}$$

Nach dem Faktorisierungslemma ist $V(t) = \tilde{V}(Z(t), X)$ für eine messbare Abbildung \tilde{V} . Damit können wir zu den (teil)faktorierten bedingten Verteilungen übergehen und das auf den Zeitpunkt 0 diskontierte (prospektive) Deckungskapital eines Versicherungsnehmers zur Zeit $t \in [0, T]$ im

Zustand $k \in \mathcal{S}$ durch

$$V_k(t) := \tilde{V}(k, X)$$

definieren. Hierbei ist zu betonen, dass das oben definierte Deckungskapital für einen vorgegebenen Pfad $X = x$ wieder der klassischen Definition des Deckungskapitals entspricht (vgl. Milbrodt und Helbig, 1999, Kapitel 10).

5.2 Definition der MRT-Zerlegung

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die von Schilling et al. (2017) eingeführte MRT-Zerlegung auf den Kontext der Personenversicherung. Hierzu werden wir ebenfalls auf Basis des Martingaldarstellungssatzes eine Zerlegung in stochastische Integrale bzgl. kompensierter Risikoquellen einführen und jedes Integral als Risikofaktor der entsprechenden Risikoquelle interpretieren. Anschließend werden wir zeigen, dass diese Definition tatsächlich die gewünschten Charakteristika P1 – P6 aufweist und damit eine *sinnvolle* Zerlegung liefert.

Im Rahmen der Personenversicherung identifizieren wir hierbei die Risikoquellen einerseits mit den (systematischen) Risiken $X_i = (X_i(t))_{0 \leq t \leq T}$ und andererseits mit den Übergangsprozessen $H^{kl}(t)$, $(k, l) \in \mathcal{J}$. In Anlehnung an Schilling et al. (2017, S.12) bezeichnen wir die zugehörigen kompensierten Prozesse, d. h. die Prozesse abzüglich ihres \mathbb{F} -Kompensators, im Folgenden mit $M^{X_i} = (M^{X_i}(t))_{0 \leq t \leq T}$, $i = 1, \dots, n$ und $M^{kl} = (M^{kl}(t))_{0 \leq t \leq T}$, $(k, l) \in \mathcal{J}$. Wir definieren die *MRT-Zerlegung* wie folgt:

Definition 5.2. Sei L eine $\mathcal{F}_T^{X, G}$ -messbare Zufallsvariable und $R = L - E^{\mathbb{P}}(L)$. Eine Zerlegung der Form

$$R = \sum_{i=1}^n \int_0^T \psi^{X_i}(t) dM^{X_i}(t) + \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}} \int_0^T \psi^{kl}(t) dM^{kl}(t) \quad (5.5)$$

mit \mathbb{F} -vorhersagbaren Prozessen $\psi^{X_i}(t)$, $i = 1, \dots, n$ und ψ^{kl} , $(k, l) \in \mathcal{J}$ heißt *MRT-Zerlegung* von R . Die zugehörigen *MRT-Risikofaktoren* sind gegeben durch

$$R_i = \int_0^T \psi^{X_i}(t) dM^{X_i}(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$R_{kl} = \int_0^T \psi^{kl}(t) dM^{kl}(t), \quad (k, l) \in \mathcal{J}.$$

Wir schreiben $(R, (X_i)_i, (H^{kl})_{k,l}) \xrightarrow{MRT} (R_1, \dots, R_n, (R_{kl})_{k,l})$.

Wir interpretieren jedes Integral in (5.5) als denjenigen Anteil an der gesamten Zufälligkeit von R , der durch die zum Kompensator assoziierte Risikoquelle verursacht wird (vgl. Christiansen, 2017, S. 13). Eine ähnliche Interpretation von stochastischen Integralen findet man z. B. in Christiansen (2013) für unsystematisches Risiko und in Biagini et al. (2013a) unter dem risikoneutralen Maß.

Bemerkung 5.3. In dieser Arbeit betrachten wir die Verbindlichkeiten des Versicherers zum Zeitpunkt $t = 0$. Mit geeigneten Modifikationen können jedoch alle Definitionen und Ergebnisse auf einen beliebigen zukünftigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$ übertragen werden: Bei entsprechender Anpassung der Diskontierungsfaktoren können die Verbindlichkeiten $L_{t,T}$ zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ analog zu (5.3) als Summe zukünftiger Cashflows definiert werden. Falls sich das Risiko des Versicherers $L_{t,T} - E^{\mathbb{P}}(L_{t,T})$ wie in (5.5) zerlegen lässt, erhalten wir wegen der Martingaleigenschaft der Integrale

$$L_{t,T} - E^{\mathbb{P}}(L_{t,T} | \mathcal{F}_t) = \sum_{i=1}^n \int_t^T \psi^{X_i}(t) dM^{X_i}(t) + \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}} \int_t^T \psi^{kl}(t) dM^{kl}(t).$$

Hierbei betonen wir, dass der Einfachheit halber für die Integranden zwar dieselbe Notation verwendet wurde, diese aber nicht notwendigerweise mit den ursprünglichen Integranden zum Zeitpunkt $t = 0$ übereinstimmen. Folglich können alle Resultate auf zukünftige Zeitpunkte t verallgemeinert werden. Insbesondere liefert die MRT-Zerlegung, im Gegensatz zu den konventionellen Zerlegungsansätzen (vgl. Einleitung), eine dynamische Zerlegung. (vgl. Schilling et al., 2017, Bemerkung 3.2 und 3.4)

Das folgende Lemma präzisiert die kompensierten Prozesse.

Lemma 5.4.

i) Der eindeutige \mathbb{F} -Kompensator von X_i ist gegeben durch $A^{X_i} = (A^{X_i}(t))_{0 \leq t \leq T}$ mit $A^{X_i}(t) = \int_0^t \theta_i(s) ds$, $i = 1, \dots, n$. Somit ist

$$M^{X_i}(t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_{ij}(s) dW_j(s), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, n.$$

ii) Der eindeutige \mathbb{F} -Kompensator von H^{kl} ist gegeben durch $A^{kl} = (A^{kl}(t))_{0 \leq t \leq T}$ mit $A^{kl}(t) = \int_0^t H^k(s-) \lambda^{kl}(s) ds$, $(k, l) \in \mathcal{J}$. Somit ist

$$M^{kl}(t) = H^{kl}(t) - \int_0^t H^k(s-) \lambda^{kl}(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (k, l) \in \mathcal{J}.$$

Beweis.

i) Aufgrund der Annahme 5.1 ist der Drift-Vektor θ ein \mathbb{F}^X -adaptierter Prozess mit stetigen Pfaden. Also ist A^{X_i} ein vorhersagbarer Prozess endlicher Variation. Außerdem ist M^{X_i} ein lokales \mathbb{F} -Martingal und $X_i(t) = X_i(0) + M^{X_i}(t) + A^{X_i}(t)$ für alle $t \in [0, T]$. Folglich ist A^{X_i} ein Kompensator von X_i . Die Eindeutigkeit folgt mit Protter (2005, Abschnitt III, Theorem 34).

ii) Da $H^k(s-) \lambda^{kl}(s)$ \mathbb{F} -adaptiert ist und λ^{kl} stetige Pfade hat, ist A^{kl} ein vorhersagbarer Prozess endlicher Variation. Nach Satz 3.9 ist der Prozess $M_i^{kl} = (M_i^{kl}(t))_{0 \leq t \leq T}$ mit $M_i^{kl}(t) := H_i^{kl}(t) - \int_0^t H_i^k(s-) \lambda^{kl}(s) ds$, $(k, l) \in \mathcal{J}$ ein lokales \mathbb{F}^i -Martingal, wobei $\mathbb{F}^i = (\mathcal{F}_t^i)_{0 \leq t \leq T} := \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^{Z_i}$ ist. Aus der bedingten Unabhängigkeit der Z_i gegeben \mathcal{F}_t^X resultiert mit dem Satz von Fubini, dass $E^{\mathbb{P}}(M_i^{kl}(s) | \mathcal{F}_t) = E^{\mathbb{P}}(M_i^{kl}(s) | \mathcal{F}_t^i)$, $s, t \in [0, T]$ ist

(vgl. Satz A.3.1 im Anhang). Hierbei genügt es für die Vertauschung von Integral und bedingtem Erwartungswert festzustellen, dass für jeden Pfad $(X_{[0,t]}, Z_{[0,t]}) = (z, x)$ die Abschätzung

$$\int_{\Omega} \int_0^T |H_i^k(s-) \lambda^{kl}(s)| ds \mathbb{P}(d\omega | X_{[0,t]} = x, Z_{[0,t]} = z) \leq \int_0^T \lambda^{kl}(s, x |_{[0,s]}) ds < \infty$$

gilt, da λ^{kl} lokal integrierbar ist. Daher ist M_i^{kl} ein lokales \mathbb{F} -Martingal. Als Summe von lokalen \mathbb{F} -Martingalen ist also auch $M^{kl} = \sum_{i=1}^m M_i^{kl}$ ein lokales \mathbb{F} -Martingal. Aus $H^{kl} = A^{kl} + M^{kl}$ folgt, dass A^{kl} der Kompensator von H^{kl} ist. Die Eindeutigkeit folgt erneut mit Protter (2005, Abschnitt III, Theorem 34). \square

Die nachstehende Proposition zeigt, dass sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit der MRT-Zerlegung auf dem Martingaldarstellungssatz fußt.

Proposition 5.5. *Der Verlust L sei $\mathcal{F}_T^{X,G}$ -messbar und quadratisch integrierbar. Dann existieren $\mathbb{F}^{X,G}$ -vorhersagbare Prozesse $\psi^{X_i}, \psi^{kl} : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $(k, l) \in \mathcal{J}$ derart, dass die in 5.2 definierte MRT-Zerlegung von $R = L - E^{\mathbb{P}}(L)$ existiert. Die Darstellung ist in dem Sinne eindeutig, dass die Integranden ψ^{X_i} , $i = 1, \dots, n$ bzw. ψ^{kl} , $(k, l) \in \mathcal{J}$ auf $[0, T] \times \Omega$ bzw. auf $\{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega : H^k(t-) \lambda^{kl}(t) \neq 0\}$ fast sicher eindeutig bzgl. $m^1 \otimes \mathbb{P}$ sind, wobei m^1 das Lebesgue-Maß auf $[0, T]$ bezeichne. Für $(k, l) \in \mathcal{J}$ ist außerdem*

$$E^{\mathbb{P}} \left(\left[\int_0^T \psi^{kl}(t) dM^{kl}(t) \right]^2 \right) < \infty. \quad (5.6)$$

Beweis. Zunächst wenden wir den Martingaldarstellungssatz für Punktprozesse in Kombination mit Brownschen Bewegungen (Björk 2011, Theorem 4.1.2) auf das Martingal $M(t) := E^{\mathbb{P}}(L - E^{\mathbb{P}}(L) | \mathcal{F}_t^{X,G})$, $0 \leq t \leq T$ an. Mit der $\mathcal{F}_T^{X,G}$ -Messbarkeit von L folgt, unter Beachtung von $\mathbb{F}^X = \mathbb{F}^W$, dass $\mathcal{F}_t^{X,G}$ -vorhersagbare Prozesse $\tilde{\psi}^{X_i}, \psi^{kl} : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $(k, l) \in \mathcal{J}$ existieren mit

$$R = L - E^{\mathbb{P}}(L) = \int_0^T \tilde{\psi}^X(t) dW(t) + \int_0^T \psi^G(t) dM^G(t), \quad (5.7)$$

wobei $\tilde{\psi}^X := (\tilde{\psi}^{X_1}, \dots, \tilde{\psi}^{X_n})$, $\psi^G := ((\psi^{kl})_{(k,l) \in \mathcal{J}})$ und $M^G := ((M^{kl})_{(k,l) \in \mathcal{J}})^{\top}$. Die letzten beiden Vektoren seien in identischer Reihenfolge definiert. Die exakte Reihenfolge ist hierbei unerheblich, sodass wir im Sinne der Lesbarkeit auf eine Präzisierung verzichten. Da wir $\det \sigma(t) \neq 0$ (vgl. Annahme 5.1) angenommen haben, existiert eine eindeutige Inverse σ^{-1} . Bezeichnen wir mit $\psi^{X_i}(t) := \sum_{j=1}^n \tilde{\psi}^{X_j}(t) \sigma_{ji}^{-1}(t)$, $i = 1, \dots, n$ den i -ten Eintrag des Vektors $\tilde{\psi}^X(t) \sigma^{-1}(t)$, so können wir den ersten Summand in (5.7) umformen zu

$$\int_0^T \tilde{\psi}^X(t) dW(t) = \int_0^T \tilde{\psi}^X(t) \sigma^{-1}(t) \sigma(t) dW(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^T \psi_i^X(t) dM^{X_i}(t).$$

Dies beweist gemeinsam mit (5.7) die Existenz der MRT-Zerlegung.

Wegen $\langle W_i, W_j \rangle(t) = 0$ für alle $i \neq j$ (Meyer, 2001, S. 167), $\langle W_i, M^{kl} \rangle(t) = 0$ für $i = 1, \dots, n$, $(k, l) \in \mathcal{J}$ (vgl. Protter, 2005, Theorem 28) sowie $\langle M^{kl}, M^{mj} \rangle(t) = 0$ für $(k, l) \neq (m, j)$ (Andersen et al., 1997, S. 74) liefert die Itô-Isometrie (Meyer, 2001, Kapitel III, Theorem 2.f.3.)

$$E^{\mathbb{P}} \left((L - E^{\mathbb{P}}(L))^2 \right) = \sum_{j=1}^n E^{\mathbb{P}} \left(\left(\int_0^T \tilde{\psi}_i^W(t) dW_i(t) \right)^2 \right) + \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}} E^{\mathbb{P}} \left(\left(\int_0^T \psi^{kl}(t) dM^{kl}(t) \right)^2 \right).$$

Daher folgt aus der Quadratintegrierbarkeit von L , dass alle Integrale in (5.7) quadratintegrierbar sind. Also gilt insbesondere (5.6).

Für den Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, es gäbe weitere $\mathbb{F}^{X,G}$ -vorhersagbare Prozesse $\tilde{\xi}^{X_i}, \xi^{kl} : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $(k, l) \in \mathcal{J}$ mit

$$L - E^{\mathbb{P}}(L) = \sum_{i=1}^n \int_0^T \tilde{\xi}^{X_i}(t) dW_i(t) + \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}} \int_0^T \xi^{kl}(t) dM^{kl}(t).$$

Dann ist $\sum_{i=1}^n \int_0^T (\tilde{\psi}^{X_i}(t) - \tilde{\xi}^{X_i}(t)) dW_i(t) + \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}} \int_0^T (\psi^{kl}(t) - \xi^{kl}(t)) dM^{kl}(t) = 0$. Nach Andersen et al. (1997, S. 74) gilt für die vorhersagbare quadratische Variation von $M^{kl}(t)$, $(k, l) \in \mathcal{J}$ die Gleichheit $\langle M^{kl}, M^{kl} \rangle(t) = \int_0^t H^k(s-) \lambda^{kl}(s) ds$. Gemeinsam mit der Itô-Isometrie (Meyer, 2001, Kapitel III, Theorem 2.f.3.) erhalten wir

$$0 = \sum_{i=1}^n E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T (\tilde{\psi}^{X_i}(t) - \tilde{\xi}^{X_i}(t))^2 dt \right) + \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}} E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T (\psi^{kl}(t) - \xi^{kl}(t))^2 H^k(t-) \lambda^{kl}(t) dt \right).$$

Also ist $\tilde{\psi}^{X_i} = \tilde{\xi}^{X_i}$ $m^1 \otimes \mathbb{P}$ -f. s., $i = 1, \dots, n$ und $\psi^{kl} = \xi^{kl}$ $m^1 \otimes \mathbb{P}$ -f. s. auf $\{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega : H^k(t-) \lambda^{kl}(t) \neq 0\}$, $(k, l) \in \mathcal{J}$. Abschließend folgt die Eindeutigkeit von $\psi^{X_i}, \psi^{kl} : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $(k, l) \in \mathcal{J}$ aus der Eindeutigkeit von $\tilde{\psi}^{X_i}, \psi^{kl} : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $(k, l) \in \mathcal{J}$ und der Eindeutigkeit der Inversen von σ . \square

Bemerkung 5.6. In der Definition von L (vgl. (5.3)) haben wir angenommen, dass jeder Versicherungsvertrag dieselben Cashflows nach sich zieht. Um diese Annahme zu relativieren, genügt es, das Portfolio in Teilportfolios mit identischen Cashflows zu untergliedern und das obige Resultat auf jedes Teilportfolio einzeln anzuwenden. (vgl. Schilling et al., 2017, Bemerkung 3.7)

Bemerkung 5.7. Im Beweis zeigte sich, dass wir ψ^{X_i} finden müssen, sodass die Gleichung $\tilde{\psi}^{X_i}(t) = \psi^{X_i}(t) \sigma(t)$ erfüllt ist. Die Existenz und Eindeutigkeit von $\tilde{\psi}^{X_i}$ folgt hierbei aus dem Martingaldarstellungssatz. Falls die Volatilitätsmatrix σ nicht quadratisch ist (vgl. Annahme 5.1), d. h. $\sigma \in \mathbb{R}^{n \times d}$ für $n \neq d$, ist die Existenz und Eindeutigkeit der MRT-Zerlegung (5.5) nicht notwendigerweise gegeben. Falls $n > d$ ist, sind es weniger Gleichungen als Unbekannte, sodass die Eindeutigkeit nicht sichergestellt ist. Ist $n < d$, gibt es mehr Gleichungen als Unbekannte, sodass möglicherweise keine Lösung existiert. Dies ist ein wesentlicher Grund dafür, dass wir uns in dieser Arbeit auf den Fall $n = d$ fokussieren. Insbesondere nehmen wir an, dass entweder durch Entfernen redundanter Prozesse oder durch künstliches Hinzufügen zusätzlicher Prozesse stets $n = d$ erreicht werden kann. Allerdings müssen Anpassungen dieser Art bei der Interpretation der Risikofaktoren

berücksichtigt werden. (vgl. Schilling et al., 2017, S. 15)

6 Analyse der MRT-Zerlegung

In diesem Kapitel erfolgt zunächst eine detaillierte Analyse der MRT-Zerlegung (5.5) hinsichtlich der in Kapitel 4 herausgestellten Kriterien P1 – P6. Wir werden zeigen, dass die MRT-Zerlegung in dieser Hinsicht eine *sinnvolle* Zerlegung ist. Anschließend diskutieren wir die Berechnung der MRT-Zerlegung einerseits unter den bisher erläuterten Voraussetzungen (*allgemeiner Fall*) und andererseits unter der zusätzlichen Annahme, dass X markovsch ist (*Markov-Fall*).

6.1 Eigenschaften der MRT-Zerlegung

Proposition 6.1. *Der Prozess $X = (X_1, \dots, X_n)$ sei definiert wie in der Annahme 5.1. Weiter sei $L \mathcal{F}_T^{X,G}$ -messbar und quadratisch integrierbar. Dann erfüllt die durch (5.5) definierte MRT-Zerlegung*

$$(R, (X_i)_i, (H^{kl})_{k,l}) \xleftrightarrow{MRT} (R_1, \dots, R_n, (R_{kl})_{k,l})$$

die Eigenschaften P1, P2, P3, P4, P5, P6 und P6.*

Beweis. Offensichtlich sind die Risikofaktoren R_1, \dots, R_n sowie $R_{kl}, (k, l) \in \mathcal{J}$ Zufallsvariablen, die sich zu R aufsummieren; also sind P1 und P6* (also auch P6) erfüllt. Die Eindeutigkeit (P3) folgt direkt aus Proposition 5.5 und der Tatsache, dass auf $\{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega : H^k(t-) \lambda^{kl}(t) = 0\}$ auch $\Delta M^{kl}(t) = 0$ für alle $(k, l) \in \mathcal{J}$ ist: Falls $H^k(t-) = 0$ ist, so ist auch $H_i^k(t-) = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ und folglich gilt

$$\Delta M^{kl}(t) = \Delta H^{kl}(t) = \sum_{i=1}^m H_i^k(t-) \Delta H_i^l(t) = 0.$$

Andererseits ist $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \exists t \in [0, T] : \Delta H^{kl}(t) > 0 \text{ und } \lambda^{kl}(t) = 0\}) = 0, (k, l) \in \mathcal{J}$ (vgl. Satz A.2.1 im Anhang). Somit sind die Risikofaktoren \mathbb{P} -fast sicher eindeutig bestimmt. Um den Beweis der übrigen Eigenschaften zu vereinfachen, schreiben wir im Folgenden $N := n + K^2 - K$ und

$$\begin{aligned} (\Psi_1, \dots, \Psi_n, \Psi_{n+1}, \dots, \Psi_N) &:= (\Psi^{X_1}, \dots, \Psi^{X_n}, (\Psi^{kl})_{(k,l) \in \mathcal{J}}), \\ (\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n, \mathcal{M}_{n+1}, \dots, \mathcal{M}_N) &:= (M^{X_1}, \dots, M^{X_n}, (M^{kl})_{(k,l) \in \mathcal{J}}), \\ (Q_1, \dots, Q_n, Q_{n+1}, \dots, Q_N) &:= (X_1, \dots, X_n, (H^{kl})_{(k,l) \in \mathcal{J}}), \\ (R_1, \dots, R_n, R_{n+1}, \dots, R_N) &:= (R_1, \dots, R_n, (R_{kl})_{(k,l) \in \mathcal{J}}), \end{aligned}$$

wobei wie im vorherigen Beweis die Anordnung der Übergänge aus \mathcal{J} keine Rolle spielt. Es sei angenommen, dass $(R, Q_1, \dots, Q_N) \xleftrightarrow{MRT} (R_1, \dots, R_N)$ gilt.

P2: Sei $i \in \{1, \dots, N\}$. Es sei R $\sigma(Q_i)$ -messbar und Q_i unabhängig von

$Q_{i-} := (Q_1, \dots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \dots, Q_N)$. Dies impliziert, dass R unabhängig von Q_{i-} ist. Bezeichnen $\mathbb{F}^{Q_i} = (\mathcal{F}_t^{Q_i})_{0 \leq t \leq T}$ und $\mathbb{F}^{Q_{i-}} = (\mathcal{F}_t^{Q_{i-}})_{0 \leq t \leq T}$ die von Q_i und Q_{i-} erzeugten (augmentierten) Filtrationen, so erhalten wir

$$R(t) := \sum_{j=1}^N \int_0^t \psi_j(s) d\mathcal{M}_j(s) = E^{\mathbb{P}} \left(R | \mathcal{F}_t^{X,G} \right) = E^{\mathbb{P}} \left(R | \mathcal{F}_t^{Q_i} \vee \mathcal{F}_t^{Q_{i-}} \right) = E^{\mathbb{P}} \left(R | \mathcal{F}_t^{Q_i} \right),$$

woraus folgt, dass der Prozess $(R(t))_{0 \leq t \leq T}$ unabhängig von den Prozessen Q_j , $j \neq i$ ist. Für den vorhersagbaren Kovariationsprozess gilt daher $\langle R, Q_j \rangle(t) = 0$ für alle $j \neq i$, $0 \leq t \leq T$: Falls $i > n$ ist, d. h. $Q_i = H^{kl}$ für ein $(k, l) \in \mathcal{J}$, folgt dies aus der Martingaldarstellung von $(R(t))$ bzgl. M^{kl} und den Gleichungen $\langle W_i, M^{kl} \rangle(t) = 0$, $i = 1, \dots, n$ sowie $\langle M^{kl}, M^{mj} \rangle(t) = 0$ für $(m, j) \neq (k, l)$ (vgl. Beweis zu Satz 5.5). Ist andererseits $i \leq n$, so ist $\sigma_{ik} \neq 0$ für höchstens ein $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ (andernfalls wäre σ nicht invertierbar). Wegen der Unabhängigkeit muss dann $\sigma_{jk_0} = 0$, $j \neq i$ sein. Mit der Martingaldarstellung von $(R(t))$ bzgl. W_{i_0} und den Gleichungen $\langle W_{k_0}, M^{kl} \rangle(t) = 0$, $(k, l) \in \mathcal{J}$ sowie $\langle W_{k_0}, W_j \rangle(t) = 0$ für alle $j \neq k_0$ (vgl. Beweis zu Satz 5.5), erhalten wir auch in diesem Fall $\langle R, Q_j \rangle(t) = 0$ für alle $j \neq i$, $0 \leq t \leq T$. Im Folgenden betrachten wir zwei Fälle.

(a) Sei $i > n$, o. E. $i = n + 1$. Falls $j \in \{1, \dots, n\}$ ist, gilt

$$d\langle \mathcal{M}_k, Q_j \rangle(t) = 0 \tag{6.1}$$

für alle $k > n$ und somit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= d\langle R, Q_j \rangle(t) = \sum_{k=1}^N \psi_k(t) d\langle \mathcal{M}_k, Q_j \rangle(t) = \sum_{k=1}^n \psi_k(t) d\langle \mathcal{M}_k, Q_j \rangle(t) \\ &= \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \sigma_{k,\cdot}(t) \sigma_{j,\cdot}^\top(t) dt, \quad j \neq i, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \tag{6.2}$$

wobei $\sigma_{k,\cdot}(t)$ die k -te Zeile von $\sigma(t)$ bezeichne. Dies liefert für $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))^\top$ und $A(t) = \sigma(t) \sigma(t)^\top$ das lineare Gleichungssystem $A(t) \psi(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$. Es ist $\det A(t) = (\det \sigma(t))^2 \neq 0$ für alle $t \in [0, T]$ \mathbb{P} -f. s., also ist $\psi(t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$ \mathbb{P} -f. s. Folglich ist auch $R_j = \int_0^T \psi_j(t) d\mathcal{M}_j(t) = 0$ \mathbb{P} -f. s. für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Für $j > n + 1$ gilt andererseits $d\langle \mathcal{M}_k, Q_j \rangle(t) = 0$ für alle $k \neq j$. Also ist

$$\begin{aligned} 0 &= d\langle R, Q_j \rangle(t) = \sum_{k=1}^N \psi_k(t) d\langle \mathcal{M}_k, Q_j \rangle(t) = \psi_j(t) d\langle \mathcal{M}_j, Q_j \rangle(t) \\ &= \psi_j(t) d\langle \mathcal{M}_j, \mathcal{M}_j \rangle(t). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Mit der Itô-Isometrie (Meyer, 2001, Kapitel III, Theorem 2.f.3.) erhalten wir

$$E^{\mathbb{P}} \left(\left[\int_0^T \psi_j(t) d\mathcal{M}_j(t) \right]^2 \right) = E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T \psi_j^2(t) d\langle \mathcal{M}_j, \mathcal{M}_j \rangle(t) \right) = 0, \tag{6.4}$$

und folglich ist $R_j = \int_0^T \psi_j(t) d\mathcal{M}_j(t) = 0$ \mathbb{P} -f. s.

(b) Sei $i \leq n$, o. E. $i = 1$. Dann folgt für $j > n$ analog zu (6.3) und (6.4), dass $R_j = \int_0^T \psi_j(t) d\mathcal{M}_j(t) = 0$ \mathbb{P} -f. s. ist. Nach Voraussetzung ist Q_1 unabhängig von Q_{1-} und somit unabhängig von Q_j für alle $j = 2, \dots, N$. Also ist $\sigma_{1,\cdot}(t) \sigma_{j,\cdot}(t)^\top dt = d\langle Q_1, Q_j \rangle(t) = 0$ für alle $j \in \{2, \dots, n\}$ (vgl. obige Argumentation). Für $A(t) = \sigma(t) \sigma(t)^\top$ erhalten wir

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{1,\cdot}(t) \sigma_{1,\cdot}(t)^\top & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A}_t & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{2,\cdot}(t) \sigma_{2,\cdot}(t)^\top & \dots & \sigma_{2,\cdot}(t) \sigma_{n,\cdot}(t)^\top \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n,\cdot}(t) \sigma_{2,\cdot}(t)^\top & \dots & \sigma_{n,\cdot}(t) \sigma_{n,\cdot}(t)^\top \end{pmatrix}$$

ist. Wegen $0 \neq \det A(t) = \sigma_{1,\cdot}(t) \sigma_{1,\cdot}(t)^\top \det \tilde{A}(t)$ ist auch $\det \tilde{A}(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, T]$ \mathbb{P} -f. s. Mit denselben Rechnungen wie in (6.2) für $j \in \{2, \dots, n\}$ und unter Verwendung von $\langle \mathcal{M}_1, Q_j \rangle(t) = \langle Q_1, Q_j \rangle(t) = 0$ sowie $\langle \mathcal{M}_k, Q_j \rangle(t) = 0$, $k > n$, $j \in \{2, \dots, n\}$, erhalten wir das lineare System $\tilde{A}(t)^\top \tilde{\psi}(t) = 0$, wobei $\tilde{\psi}(t) = (\psi_2(t), \dots, \psi_n(t))^\top$ bezeichne. Aus $\det \tilde{A}(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, T]$ \mathbb{P} -f. s. folgt $\tilde{\psi}(t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$ \mathbb{P} -f. s. Also ist insbesondere auch $R_j = \int_0^T \psi_j(t) d\mathcal{M}_j(t) = 0$ \mathbb{P} -f. s. für alle $j \in \{2, \dots, n\}$.

P4: Es sei eine Permutation $\pi: \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ gegeben. Außerdem gelte $(R, Q_{\pi(1)}, \dots, Q_{\pi(N)}) \stackrel{MRT}{\leftrightarrow} (\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_N)$ für $\tilde{R}_i = \int_0^T \tilde{\psi}_i(t) d\mathcal{M}_{\pi(i)}(t)$, $i = 1, \dots, N$ mit \mathbb{F} -vorhersagbaren Prozessen $\tilde{\psi}_i$. Wegen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^T \tilde{\psi}_i(t) d\mathcal{M}_{\pi(i)}(t) &= \sum_{i=1}^N \tilde{R}_i \stackrel{P6^*}{=} R \stackrel{P6^*}{=} \sum_{i=1}^N R_i = \sum_{i=1}^N \int_0^T \psi_i(t) d\mathcal{M}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^T \psi_{\pi(i)}(t) d\mathcal{M}_{\pi(i)}(t), \end{aligned}$$

folgt P4 aus der Eindeutigkeit der MRT-Zerlegung.

P5: Seien $\tilde{Q}_i(t) := f_i(Q_i(t))$, $i = 1, \dots, N$ für glatte, invertierbare Funktionen $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und es gelte $(R, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_N) \stackrel{MRT}{\leftrightarrow} (\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_N)$. Für jedes $i \leq n$ liefert Itô's Lemma (Protter, 2005, Theorem 33)

$$d\tilde{Q}_i(t) = f'_i(X_i(t)) \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t) dW_j(t) + \left(f'_i(X_i(t)) \theta_i(t) + \frac{1}{2} f''_i(X_i(t)) \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(t) \right) dt.$$

Also ist $(\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n)$ wieder ein Itô-Prozess (vgl. Annahme 5.1). Daher gilt nach Lemma 5.4

für die kompensierten Risikoprozesse

$$d\widetilde{\mathcal{M}}_i(t) = f'_i(X_i(t))d\mathcal{M}_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Für die MRT-Risikofaktoren resultiert hieraus

$$\widetilde{R}_i = \int_0^T \widetilde{\psi}_i(t) d\widetilde{\mathcal{M}}_i(t) = \int_0^T \widetilde{\psi}_i(t) f'_i(X_i(t)) d\mathcal{M}_i(t). \quad (6.5)$$

Andererseits sei $i > n$ und o. E. gelte $Q_i = H^{kl}$ für ein fixiertes $(k, l) \in \mathcal{J}$. D. h., wir identifizieren i mit dem Tupel $(i_1, i_2) := (k, l)$ und schreiben verkürzt $H^i := H^{kl}$, $\lambda^i := \lambda^{kl}$ sowie $H^{i_1} := H^k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_i &= f_i(H^i(0)) + \sum_{0 < s \leq t} (f_i(H^i(s)) - f_i(H^i(s-))) \\ &= f_i(H^i(0)) + \sum_{0 < s \leq t} \underbrace{\left[\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{H^i(s-) = j\}} (f_i(j+1) - f_i(j)) \right]}_{=: a_i(s)} (H^i(s) - H^i(s-)) \\ &= f_i(H^i(0)) + \int_0^t a_i(s) dH^i(s) \\ &= f_i(H^i(0)) + \int_0^t a_i(s) d\mathcal{M}_i(s) + \int_0^t a_i(s) H^{i_1}(s-) \lambda^i(s) ds, \end{aligned}$$

wobei wir bei der zweiten Gleichheit ausgenutzt haben, dass \mathbb{P} -fast sicher keine Sprünge zur selben Zeit stattfinden (vgl. Satz 3.11). Insbesondere sind die Summen über $[0, t]$ wohldefiniert, da H^i auf $[0, t]$ nur endlich viele Sprünge macht. Da $a_i(s)$ vorhersagbar und $\lambda^i(s)$ stetig ist, ist $\widetilde{A}_i(t) := \int_0^t a_i(s) H^{i_1}(s-) \lambda^i(s) ds$ ein vorhersagbarer Prozess endlicher Variation und $\widetilde{\mathcal{M}}_i(t) := \int_0^t a_i(s) d\mathcal{M}_i(s)$ ein lokales \mathbb{F} -Martingal. Somit gilt

$$\widetilde{R}_i = \int_0^T \widetilde{\psi}_i(t) d\widetilde{\mathcal{M}}_i(t) = \int_0^T \widetilde{\psi}_i(t) a_i(t) d\mathcal{M}_i(t). \quad (6.6)$$

Die Eindeutigkeit der MRT-Zerlegung sowie die Gleichungen (6.5) und (6.6) implizieren $R_i = \widetilde{R}_i$ \mathbb{P} -f. s., $i = 1, \dots, N$, und damit P5.

□

Bemerkung 6.2. Formal haben wir die MRT-Zerlegung in (5.5) bzgl. des Itô-Prozesses X und der Zählprozesse H^{kl} , $(k, l) \in \mathcal{J}$ definiert. Im Beweis von P5 sind wir jedoch zu einer allgemeineren Betrachtungsweise übergegangen, in der wir den Itô-Prozess X und Sprungprozesse $\int_0^\cdot a(s) dH^{kl}(s)$ zugelassen haben. Um eine kurze Darstellung der Ergebnisse in diesem Kapitel sicherzustellen, akzeptieren wir diese kleine Inkonsistenz. (vgl. Schilling et al., 2017, Bemerkung 4.2)

6.2 Berechnung im allgemeinen Fall

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Berechnung der MRT-Zerlegung innerhalb des Modellrahmens der Personenversicherung (vgl. Abschnitt 5.1). Im Beweis der Proposition 5.5 haben wir gesehen, dass die Berechnung der MRT-Zerlegung darin mündet, die Integranden $\tilde{\psi}^{X_1}, \dots, \tilde{\psi}^{X_n}, (\psi_{kl})_{k,l}$ der Martingaldarstellung (5.7) zu bestimmen. Die nachfolgenden Lemmata vereinfachen dieses Problem dahingehend, dass die Martingaldarstellung eines \mathbb{F}^X -Martingals anstelle eines \mathbb{F} -Martingals ermittelt werden muss. Dies wird uns einerseits ermöglichen, die MRT-Zerlegung unter der Annahme, dass X markovsch ist, zu berechnen (vgl. Abschnitt 6.3). Andererseits stellt die Reduzierung auf die ausschließlich von (unabhängigen) Brownschen Bewegungen erzeugte Filtration die Grundlage dafür dar, im allgemeinen Fall die MRT-Zerlegung mithilfe der Clark-Ocone-Formel (Di Nunno et al., 2009, S. 196) zu bestimmen. Die Clark-Ocone-Formel basiert auf dem Malliavin-Kalkül (vgl. Nualart, 2006; Di Nunno et al., 2009). Dessen Einführung ist im Umfang dieser Arbeit jedoch nicht realisierbar. Daher wird der interessierte Leser an dieser Stelle auf Schilling et al. (2017) verwiesen. Dort erfolgt die Berechnung der MRT-Zerlegung mithilfe der Clark-Ocone-Formel im Kontext der Lebensversicherung.

Im Folgenden thematisieren wir nacheinander die diskrete Verbleibsleistung, die stetige Verbleibsleistung sowie die stetige Übergangsleistung. Die Zerlegung der zustandsunabhängigen Zahlung $C_{0,T}$ bleibt in diesem Abschnitt unberücksichtigt, da sie sowohl im allgemeinen Fall (mithilfe der Clark-Ocone-Formel) als auch im Markovfall (vgl. Abschnitt 6.3) direkt bestimmt werden kann. In Anlehnung an Schilling et al. (2017) bestimmen wir, im Gegensatz zur Definition 5.2 der MRT-Zerlegung, in den Lemmata Zerlegungen in Integrale bzgl. der kompensierten Prozesse M^{kl} sowie der Brownschen Bewegungen W_j . Dies ist darin begründet, dass die Lemmata eine direkte Anwendung der Clark-Ocone-Formel ermöglichen sollen. Eine Umrechnung der W_j -Integrale in Integrale bzgl. der kompensierten Prozesse M^{X_j} erfolgt im Zuge der Berechnungen im Markovfall (vgl. (6.21)). Ferner sei darauf hingewiesen, dass in den nachstehenden Zerlegungen die Deckungskapitalien zwar identisch bezeichnet werden, sich aber auf die jeweils relevante Versicherungsleistung beziehen (bei Betrachtung eines einzelnen Leistungstyps verschwinden die übrigen Summanden in (5.4)).

In Analogie zum Kapitel 3 bezeichne im Folgenden $M_i^k(t)$ und $M_i^{kl}(t)$ die kompensierten Prozesse

$$M_i^k(t) = H_i^k(t) - \int_0^t \lambda^{Z_i(u)k}(u) du, \quad k \in \mathcal{S},$$

$$M_i^{kl}(t) = H_i^{kl}(t) - \int_0^t H_i^k(s-) \lambda^{kl}(s) ds, \quad (k, l) \in \mathcal{J},$$

sowie M_i den Vektor $M_i := (M_i^1, \dots, M_i^K)$.

Lemma 6.3 (Diskrete Verbleibszahlung). Sei L eine Zufallsvariable der Form $L = H(S)^\top C$, $S \in [0, T]$, wobei $C = (C_1, \dots, C_K)^\top$ ein \mathcal{F}_T^X -messbarer und integrierbarer Zufallsvektor ist. Dann existieren \mathbb{F}^X -vorhersagbare Prozesse $(\varphi_j(t))_{0 \leq t \leq T}$, $j = 1, \dots, n$ mit $\varphi_j(t) = (\varphi_j^1(t), \dots, \varphi_j^K(t))^\top$, sodass

$$E^\mathbb{P}(P(0, S)C | \mathcal{F}_t^X) = E^\mathbb{P}(P(0, S)C) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \varphi_j(u) dW_j(u), \quad t \leq T \quad (6.7)$$

gilt.

Ferner ist die Martingaldarstellung von L gegeben durch

$$\begin{aligned} L = & E^\mathbb{P}(L) + \sum_{j=1}^n \int_0^T [H(t-)^\top Q(0, t) \mathbb{1}_{[0, S]}(t) + H(S)^\top Q(0, S) \mathbb{1}_{(S, T]}(t)] \varphi_j(t) dW_j(t) \\ & + \sum_{(k, l) \in \mathcal{J}} \int_0^S E^\mathbb{P}(V_l(t) - V_k(t) | \mathcal{F}_t^X) dM^{kl}(t) \end{aligned}$$

mit $V_k(t) = E^\mathbb{P}(H_1(S)C | \mathcal{F}_t^X, Z_1(t) = k)$, $k \in \mathcal{S}$, $t \leq S$.

Beweis. Da $U = (U(t))_{0 \leq t \leq T}$ mit $U(t) := E^\mathbb{P}(P(0, S)C | \mathcal{F}_t^X)$ ein \mathbb{F}^X -Martingal ist, existieren nach dem Martingaldarstellungssatz \mathbb{F}^X -vorhersagbare Prozesse $(\varphi_j(t))_{0 \leq t \leq T}$, $j = 1, \dots, n$, mit $\varphi_j(t) = (\varphi_j^1(t), \dots, \varphi_j^K(t))^\top$, sodass

$$E^\mathbb{P}(P(0, S)C | \mathcal{F}_t^X) = E^\mathbb{P}(P(0, S)C) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \varphi_j(u) dW_j(u), \quad t \leq T$$

gilt. Damit folgt (6.7).

Wir zeigen die Aussage zunächst für einen einzelnen Versicherungsnehmer, d. h. es gelte $m = 1$ und $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X \vee \mathbb{F}^{Z_i}$ für ein beliebiges, aber festes $i \in \{1, \dots, m\}$. Wir definieren $D_i(t) := Q(0, t)^\top H_i(t)$ und $\tilde{D}_i(t) := E^\mathbb{P}(D_i(S) | \mathcal{F}_t)$. Da $D_i(t)$ ein \mathbb{F} -Martingal (vgl. Satz 3.9) ist, folgt $\tilde{D}_i(t) = D_i(t)$ für $t \leq S$ und $\tilde{D}_i(t) = D_i(S)$ für $t \geq S$. Aus $U(T) = P(0, S)C$ und $P(0, S)Q(0, S) = \mathbb{I}$ folgt $L_i := H_i(S)^\top C = \tilde{D}_i(T)^\top U(T)$. Mit der Formel der partiellen Integration (Protter, 2005, S. 68), angewandt auf das Produkt $\tilde{D}_i(t)^\top U(t)$, und der Stetigkeit von $U(t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} L_i = & \tilde{D}_i(T)^\top U(T) \\ = & \tilde{D}_i(0)^\top U(0) + \int_0^T \tilde{D}_i(t-)^\top dU(t) + \int_0^T U(t)^\top d\tilde{D}_i(t) + \sum_{j=1}^K \int_0^T d[\tilde{D}_{i,j}, U_j](t) \\ = & D_i(0)^\top U(0) + \int_0^T [D_i(t-)^\top \mathbb{1}_{[0, S]}(t) + D_i(T)^\top \mathbb{1}_{(S, T]}(t)] dU(t) \\ & + \int_0^S U(t)^\top dD_i(t) + \sum_{j=1}^K \int_0^S d[D_{i,j}, U_j](t), \end{aligned} \quad (6.8)$$

wobei die letzte Gleichheit aus der oben genannten Beziehung zwischen \tilde{D}_i und D_i folgt. Im Folgenden spezifizieren wir die einzelnen Summanden. Wegen der \mathcal{F}_T^X -Messbarkeit von C und der

Gleichung (3.20) ist

$$\begin{aligned}
 D_i(0)^\top U(0) &= \tilde{D}_i(0)^\top U(0) = E^\mathbb{P}(H_i(S)^\top Q(0,S))E^\mathbb{P}(P(0,S)C) \\
 &= E^\mathbb{P}(E^\mathbb{P}(H_i(S)^\top | \mathcal{F}_T^X \vee \mathcal{F}_0^{Z_i})Q(0,S))E^\mathbb{P}(P(0,S)C) \\
 &= E^\mathbb{P}(H_i(0)^\top P(0,S)Q(0,S))E^\mathbb{P}(P(0,S)C) \\
 &= E^\mathbb{P}(H_i(0)^\top P(0,S)C) = E^\mathbb{P}(E^\mathbb{P}(H_i(S)^\top | \mathcal{F}_T^X \vee \mathcal{F}_0^{Z_i})C) \\
 &= E^\mathbb{P}(H_i(S)^\top C) = E^\mathbb{P}(L_i).
 \end{aligned}$$

Mithilfe der Formel der partiellen Integration (ebd.) sowie der Integralgleichung (3.13) erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned}
 dD_i(t) &= d(Q(0,t)^\top H_i(t)) = (dQ(0,t))^\top H_i(t) + Q(0,t)^\top dH_i(t) \\
 &= -Q(0,t)^\top \Lambda(t)^\top H_i(t)dt + Q(0,t)^\top dH_i(t) \\
 &= Q(0,t)^\top dM_i(t).
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $d[q_{kl}(0, \cdot), H_i^k](t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$ und $k, l \in \mathcal{S}$ gilt (vgl. Protter, 2005, Theorem 28). Außerdem ist $d[D_{i,j}, U_j](t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$ und $j \in \mathcal{S}$ (vgl. ebd.). Unter Verwendung der Martingaldarstellung von $U(t)$ ergibt sich für (6.8) insgesamt also

$$\begin{aligned}
 L_i &= E^\mathbb{P}(L_i) + \sum_{j=1}^n \int_0^T [H_i(t-)^\top Q(0,t) \mathbb{1}_{[0,S]}(t) + H_i(S)^\top Q(0,S) \mathbb{1}_{(S,T]}(t)] \varphi_j(t) dW_j(t) \\
 &\quad + \int_0^S E^\mathbb{P}(C^\top P(t,S)^\top | \mathcal{F}_t^X) dM_i(t).
 \end{aligned}$$

Aus der Beziehung $dM_i^k(t) = \sum_{l \neq k} dM_i^{lk}(t) - dM_i^{kl}(t)$ (vgl. (3.23)) resultiert durch Umsortieren

$$\begin{aligned}
 L_i &= E^\mathbb{P}(L_i) + \sum_{j=1}^n \int_0^T [H_i(t-)^\top Q(0,t) \mathbb{1}_{[0,S]}(t) + H_i(S)^\top Q(0,S) \mathbb{1}_{(S,T]}(t)] \varphi_j(t) dW_j(t) \\
 &\quad + \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}} \int_0^S E^\mathbb{P}((p_{l\cdot}(t,S) - p_{k\cdot}(t,S))C | \mathcal{F}_t^X) dM_i^{kl}(t),
 \end{aligned}$$

wobei $p_{k\cdot}(t,S) := (p_{k1}(t,S), \dots, p_{kK}(t,S))$, $k \in \mathcal{S}$ ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
 &E^\mathbb{P}((p_{l\cdot}(t,S) - p_{k\cdot}(t,S))C | \mathcal{F}_t^X) \\
 &= E^\mathbb{P}(E^\mathbb{P}(H_1(S)C | Z_1(t) = l, \mathcal{F}_T^X) | \mathcal{F}_t^X) - E^\mathbb{P}(E^\mathbb{P}(H_1(S)C | Z_1(t) = k, \mathcal{F}_T^X) | \mathcal{F}_t^X) \\
 &= E^\mathbb{P}(V_l(t) - V_k(t) | \mathcal{F}_t^X),
 \end{aligned}$$

womit die Behauptung für den einzelnen Versicherungsnehmer folgt.

Abschließend betrachten wir den Portfoliofall, d. h. es gelte $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X \vee \bigvee_{i=1}^m \mathbb{F}^{Z_i}$. Die bedingte Unabhängigkeit der Z_i , $i = 1, \dots, m$ impliziert $E^\mathbb{P}(L_i | \mathcal{F}_t) = E^\mathbb{P}(L_i | \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^{Z_i})$ (für einen Beweis dieser Aussage siehe Satz A.3.1 im Anhang). Berücksichtigen wir also, dass die Z_i , $i = 1, \dots, m$ bedingt identisch verteilt sind, so folgt die Aussage im Portfoliofall durch Anwendung des ersten Teils auf die einzelnen Summanden L_i und der anschließenden Addition. \square

Lemma 6.4 (Stetige Verbleibszahlung). Sei L eine Zufallsvariable der Form $L = \int_0^T H(v)^\top C(v)dv$, wobei $C = (C(t))_{0 \leq t \leq T} = (C^1(t), \dots, C^K(t))_{0 \leq t \leq T}^\top$ ein \mathbb{F}^X -vorhersagbarer Prozess mit $E^\mathbb{P}(\sup_{t \in [0, T]} \sum_{i=1}^K |C_i(t)|) < \infty$ ist. Weiter sei angenommen, dass die C_i , $i = 1, \dots, K$ Funktionen in X sind, d. h. $C_i(t) = C_i(t, X|_{[0, t]})$. Dann existieren \mathbb{F}^X -vorhersagbare Prozesse $(\varphi_j(t))_{0 \leq t \leq T}$ mit $\varphi_j(t) = (\varphi_j^1(t), \dots, \varphi_j^K(t))^\top$, sodass

$$E^\mathbb{P} \left(\int_0^T P(0, v) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X \right) = E^\mathbb{P} \left(\int_0^T P(0, v) C(v) dv \right) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \varphi_j(u) dW_j(u)$$

für $t \leq T$ gilt. Ferner ist die Martingaldarstellung von L gegeben durch

$$\begin{aligned} L &= E^\mathbb{P}(L) + \sum_{j=1}^n \int_0^T H(s-)^\top Q(0, s) \varphi_j(s) dW_j(s) \\ &\quad + \sum_{(k, l) \in \mathcal{J}} \int_0^T E^\mathbb{P}(V_l(s) - V_k(s) | \mathcal{F}_s^X) dM^{kl}(s), \end{aligned}$$

mit $V_k(t) = E^\mathbb{P} \left(\int_t^T H_1(v) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X, Z_1(t) = k \right)$, $k \in \mathcal{S}$, $t \leq T$. Falls zusätzlich $\sup_{t \in [0, T]} E^\mathbb{P}((\sum_{i=1}^K C_i(t))^2) < \infty$ ist, so ist

$$\varphi_i(t) = \int_t^T \varphi_i^v(t) dv, \quad t \leq T, \quad (6.10)$$

wobei $\varphi_i^v = (\varphi_i^{v,1}, \dots, \varphi_i^{v,K})$, $i = 1, \dots, d$, $v \in [0, T]$ die \mathbb{F}^X -vorhersagbaren Integranden der Martingaldarstellung von $P(0, v)C(v)$ sind (vgl. (6.7)).

Beweis. Da $U = (U(t))_{0 \leq t \leq T}$ mit $U(t) := E^\mathbb{P}(\int_0^T P(0, v)C(v)dv | \mathcal{F}_t^X)$ ein \mathbb{F}^X -Martingal ist, existieren nach dem Martingaldarstellungssatz \mathbb{F}^X -vorhersagbare Prozesse $(\varphi_j(t))_{0 \leq t \leq T}$ mit $\varphi_j(t) = (\varphi_j^1(t), \dots, \varphi_j^K(t))^\top$, sodass

$$E^\mathbb{P} \left(\int_0^T P(0, v) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X \right) = E^\mathbb{P} \left(\int_0^T P(0, v) C(v) dv \right) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \varphi_j(u) dW_j(u), \quad t \leq T \quad (6.11)$$

gilt.

Wir zeigen die Aussage wieder zuerst für einen einzelnen Versicherungsnehmer, d. h. es gelte $m = 1$ und $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X \vee \mathbb{F}^{Z_i}$ für ein beliebiges aber festes $i \in \{1, \dots, m\}$. Mit der \mathcal{F}_t -Messbarkeit von $\int_0^t H_i(v)^\top C(v)dv$ erhalten wir

$$E^\mathbb{P} \left(\int_0^T H_i(v)^\top C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t \right) = \int_0^t H_i(v)^\top C(v) dv + E^\mathbb{P} \left(\int_t^T H_i(v)^\top C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t \right). \quad (6.12)$$

Mithilfe des Satzes von Fubini für bedingte Erwartungswerte (Schilling 2017, Theorem 27.17), den Gleichungen (3.2) und (3.20) sowie der H-Hypothese (Satz 3.4) lässt sich der zweite Summand in (6.12) umformen zu

$$\begin{aligned}
 E^{\mathbb{P}} \left(\int_t^T H_i(v)^\top C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t \right) &= E^{\mathbb{P}} \left(\int_t^T E^{\mathbb{P}}(H_i(v)^\top | \mathcal{F}_T^X \vee \mathcal{F}_t^{Z_i}) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
 &= E^{\mathbb{P}} \left(\int_t^T H_i(t)^\top P(t, v) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t \right) = H_i(t)^\top Q(0, t) E^{\mathbb{P}} \left(\int_t^T P(0, v) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X \right) \\
 &= -D_i(t)^\top \int_0^t P(0, v) C(v) dv + D_i(t)^\top E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T P(0, v) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X \right),
 \end{aligned}$$

wobei $D_i(t)^\top := H_i(t)^\top Q(0, t)$ ist. Also erhalten wir in (6.12)

$$\begin{aligned}
 E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T H_i(v)^\top C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t \right) &= \int_0^t H_i(v)^\top C(v) dv - D_i(t)^\top \int_0^t P(0, v) C(v) dv \\
 &\quad + D_i(t)^\top E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T P(0, v) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X \right). \tag{6.13}
 \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Lemma 6.3 folgt für die letzten beiden Summanden aus der Formel der partiellen Integration (Protter, 2005, S. 68) und (6.9)

$$D_i(t)^\top \int_0^t P(0, v) C(v) dv = \int_0^t H_i(s)^\top C(s) ds + \int_0^t \left(\int_0^s C(v)^\top P(0, v)^\top dv \right) Q(0, s)^\top dM_i(s)$$

und unter zusätzlicher Verwendung von (6.11)

$$\begin{aligned}
 D_i(t)^\top E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T P(0, v) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X \right) &= E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T H_i(v)^\top C(v) dv \right) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n \int_0^t H_i(s-)^\top Q(0, s) \varphi_j(s) dW_j(s) + \int_0^t E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v)^\top P(0, v)^\top dv \middle| \mathcal{F}_s^X \right) Q(0, s)^\top dM_i(s),
 \end{aligned}$$

wobei wir uns die Gleichheit

$$H_i(0)^\top E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T P(0, v) C(v) dv \right) = E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T H_i(v)^\top C(v) dv \right)$$

zu Nutze gemacht haben, welche mithilfe des Satzes von Fubini für bedingte Erwartungswerte (Schilling 2017, Theorem 27.17) und (3.20) folgt. Damit lässt sich (6.13) für $t = T$ mit der \mathcal{F}_T -Messbarkeit von $\int_0^T H_i(v)^\top C(v) dv$ und der Gleichung $dM_i^k(t) = \sum_{l \neq k} dM_i^{lk}(t) - dM_i^{kl}(t)$ (vgl. (3.23)) umformen zu

$$\begin{aligned}
 \int_0^T H_i(v)^\top C(v) dv &= E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T H_i(v)^\top C(v) dv \right) + \sum_{j=1}^n \int_0^T H_i(s-)^\top Q(0, s) \varphi_j(s) dW_j(s) \\
 &\quad + \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}} \int_0^T E^{\mathbb{P}} \left(\int_s^T (p_{l\cdot}(s, v) - p_{k\cdot}(s, v)) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_s^X \right) dM_i^{kl}(s),
 \end{aligned}$$

wobei $p_k(t, S) := (p_{k1}(s, T), \dots, p_{kK}(s, T))$, $k \in S$ ist. Mit dem Satz von Fubini ist

$$\begin{aligned}
 &E^{\mathbb{P}} \left(\int_s^T (p_{l\cdot}(s, v) - p_{k\cdot}(s, v)) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_s^X \right) \\
 &= E^{\mathbb{P}} \left(E^{\mathbb{P}} \left(\int_s^T H_1(v) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_T^X, Z_1(s) = l \right) \middle| \mathcal{F}_s^X \right) \\
 &\quad - E^{\mathbb{P}} \left(E^{\mathbb{P}} \left(\int_s^T H_1(v) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_T^X, Z_1(s) = k \right) \middle| \mathcal{F}_s^X \right)
 \end{aligned}$$

$$= E^{\mathbb{P}}(V_l(s) - V_k(s) | \mathcal{F}_s^X).$$

Hierbei genügt es für die Vertauschung von Erwartungswert und Integral festzustellen, dass für jeden Pfad $(X, Z_1(s)) = (x, l)$ die Abschätzung

$$\int_s^T \int_{\Omega} |H_1(v)C(v)| \mathbb{P}(d\omega | X = x, Z_1(s) = l) dv \leq \int_s^T \sum_{i=1}^K |C_i(v, x|_{[0,v]})| dv < \infty$$

gilt, da C_i , $i = 1, \dots, K$ beschränkte Pfade hat. Damit folgt die Behauptung für einen einzelnen Versicherungsnehmer.

Abschließend zeigen wir (6.10). Für jedes $v \in [0, T]$ existieren nach dem Martingaldarstellungssatz \mathbb{F}^X -vorhersagbare Prozesse φ_i^v , $i = 1, \dots, n$, mit $\varphi_i^v = (\varphi_i^{v,1}, \dots, \varphi_i^{v,K})^\top$, sodass

$$E^{\mathbb{P}}(P(0, v)C(v) | \mathcal{F}_t^X) = E^{\mathbb{P}}(P(0, v)C(v)) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \varphi_j^v(u) \mathbb{1}_{[0,v]}(u) dW_j(u), \quad t \leq T$$

gilt. Mit dem Satz von Fubini-Tonelli und der stochastischen Version des Fubini-Theorems (Protter, 2005, Theorem 65) folgt

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}\left(\int_0^T P(0, v)C(v)dv | \mathcal{F}_t^X\right) &= \int_0^T E^{\mathbb{P}}(P(0, v)C(v) | \mathcal{F}_t^X) dv \\ &= \int_0^T E^{\mathbb{P}}(P(0, v)C(v)) dv + \sum_{j=1}^n \int_0^T \int_0^t \varphi_j^v(u) \mathbb{1}_{[0,v]}(u) dW_j(u) dv \\ &= E^{\mathbb{P}}\left(\int_0^T P(0, v)C(v)dv\right) + \sum_{j=1}^n \int_0^T \int_0^t \varphi_j^v(u) \mathbb{1}_{[0,v]}(u) dv dW_j(u). \end{aligned}$$

Für die Anwendung des stochastischen Fubini-Theorems genügt es,

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}\left(\int_0^t \int_0^T [\varphi_j^{v,k}(u)]^2 \mathbb{1}_{[0,v]}(u) dv du\right) &\leq \int_0^T E^{\mathbb{P}}\left(\int_0^t [\varphi_j^{v,k}(u)]^2 \mathbb{1}_{[0,v]}(u) du\right) dv \\ &\leq T \sup_{v \in [0, T]} E^{\mathbb{P}}\left(\int_0^T [\varphi_j^{v,k}(u)]^2 \mathbb{1}_{[0,v]}(u) du\right) \leq T \sup_{v \in [0, T]} E^{\mathbb{P}}\left([\int_0^T (P(0, v)C(v))_k]^2\right) \\ &\leq T \sup_{v \in [0, T]} E^{\mathbb{P}}\left(\left[\sum_{l=1}^K C_l(v)\right]^2\right) < \infty \end{aligned}$$

festzustellen (vgl. ebd.). Mit der Eindeutigkeit der Martingaldarstellung folgt also (6.10).

Abschließend betrachten wir den Portfoliofall, d.h. es gelte $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X \vee \bigvee_{i=1}^m \mathbb{F}^{Z_i}$. Die bedingte Unabhängigkeit der Z_i , $i = 1, \dots, m$ sowie der Satz von Fubini für bedingte Erwartungswerte (Schilling, 2017, Theorem 27.17) implizieren $E^{\mathbb{P}}(\int_0^T H_i(v)^\top C(v)dv | \mathcal{F}_t) = E^{\mathbb{P}}(\int_0^T H_i(v)^\top C(v)dv | \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^{Z_i})$ (vgl. Satz A.3.1 im Anhang). Berücksichtigen wir die bedingt identische Verteilung der Z_i , $i = 1, \dots, m$, so folgt die Aussage im Portfoliofall durch Anwendung des ersten Teils auf die einzelnen Summanden $\int_0^T H_i(v)^\top C(v)dv$ und der anschließenden Addition. \square

Lemma 6.5 (Stetige Übergangszahlung). Sei L eine Zufallsvariable der Form $L = \int_0^T C(v) dH^{\bar{k}\bar{l}}(v)$, $(\bar{k}, \bar{l}) \in \mathcal{J}$, wobei $C = (C(t))_{0 \leq t \leq T}$ ein stetiger und \mathbb{F}^X -vorhersagbarer Prozess mit $E^{\mathbb{P}}(\sup_{t \in [0, T]} |C(t)|) < \infty$ ist. Weiter sei angenommen, dass C eine Funktion in X ist, d. h. $C(t) = C(t, X|_{[0, t]})$. Dann gilt: Für jedes $l \in \mathcal{S}$ existieren \mathbb{F}^X -vorhersagbare Prozesse $(\varphi_j^l(t))_{0 \leq t \leq T}$, $j = 1, \dots, n$, sodass

$$\begin{aligned} & E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v) p_{l\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}\bar{l}}(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X \right) \\ &= E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v) p_{l\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}\bar{l}}(v) dv \right) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \varphi_j^l(s) dW_j(s), \quad t \leq T. \end{aligned}$$

Ferner ist die Martingaldarstellung von L gegeben durch

$$\begin{aligned} L = & E^{\mathbb{P}}(L) + \int_0^T C(v) dM^{\bar{k}\bar{l}}(v) + \sum_{(k, l) \in \mathcal{J}} \int_0^T E^{\mathbb{P}} \left(V_l(s) - V_k(s) \middle| \mathcal{F}_s^X \right) dM^{kl}(s) \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{k, l \in \mathcal{S}} \int_0^T H^k(s-) q_{kl}(0, s) \varphi_j^l(s) dW_j(s) \end{aligned}$$

mit $V_k(t) = E^{\mathbb{P}} \left(\int_t^T C(v) dH_1^{\bar{k}\bar{l}}(v) \middle| \mathcal{F}_t^X, Z_1(t) = k \right)$, $k \in \mathcal{S}$, $t \leq T$. Falls zusätzlich $\sup_{t \in [0, T]} E^{\mathbb{P}}([C(t)]^4) < \infty$ und $\sup_{t \in [0, T]} E^{\mathbb{P}}([\lambda^{\bar{k}\bar{l}}(t)]^4) < \infty$ ist, so gilt

$$\varphi_j^l(t) = \int_t^T \varphi_j^{v, l}(t) dv, \quad t \leq T, \quad (6.14)$$

wobei $\varphi_j^{v, l}$, $j = 1, \dots, n$, $v \in [0, T]$ die \mathbb{F}^X -vorhersagbaren Integranden der Martingaldarstellung von $C(v) p_{l\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}\bar{l}}(v)$ sind (vgl. (6.7)).

Beweis. Da $U = (U(t))_{0 \leq t \leq T}$ mit $U(t) := E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v) p_{l\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}\bar{l}}(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X \right)$ für $l \in \mathcal{S}$ ein \mathbb{F}^X -Martingal ist, existieren nach dem Martingaldarstellungssatz \mathbb{F}^X -vorhersagbare Prozesse $(\varphi_j^l(t))_{0 \leq t \leq T}$, $l \in \mathcal{S}$, $j = 1, \dots, n$ sodass

$$\begin{aligned} & E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v) p_{l\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}\bar{l}}(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X \right) \\ &= E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v) p_{l\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}\bar{l}}(v) dv \right) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \varphi_j^l(s) dW_j(s) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$ gilt.

Wieder zeigen wir die Aussage zunächst für einen einzelnen Versicherungsnehmer, d. h. es sei $m = 1$ und $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X \vee \mathbb{F}^{Z_i}$ für ein beliebiges, aber festes $i \in \{1, \dots, m\}$. Für $t \in [0, T]$ ist

$$E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v) dH_i^{\bar{k}\bar{l}}(v) \middle| \mathcal{F}_t \right) = \int_0^t C(v) dH_i^{\bar{k}\bar{l}}(v) + E^{\mathbb{P}} \left(\int_t^T C(v) dH_i^{\bar{k}\bar{l}}(v) \middle| \mathcal{F}_t \right). \quad (6.15)$$

Im Folgenden spezifizieren wir die beiden Summanden getrennt voneinander. Für den ersten

Summanden gilt

$$\int_0^t C(v) dH_i^{\bar{k}l}(v) = \int_0^t C(v) dM_i^{\bar{k}l}(v) + \int_0^t C(v) dA_i^{\bar{k}l}(v), \quad t \in [0, T],$$

wobei $A_i^{\bar{k}l} := \int_0^t H_i^{\bar{k}}(s-) \lambda^{\bar{k}l}(s) ds$ den Kompensator von $H_i^{\bar{k}l}$ bezeichne. Mithilfe der Gleichungen (3.19) und (3.16), dem Satz von Fubini für bedingte Erwartungswerte (Schilling, 2017, Theorem 27.17) und der H-Hypothese (Satz 3.4) lässt sich der zweite Summand umformen zu

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}} \left(\int_t^T C(v) dH_i^{\bar{k}l}(v) \middle| \mathcal{F}_t \right) &= E^{\mathbb{P}} \left(\int_t^T C(v) H_i^{\bar{k}}(v) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= E^{\mathbb{P}} \left(\int_t^T C(v) E(H_i^{\bar{k}}(v) | \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^{Z_i}) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= E^{\mathbb{P}} \left(\int_t^T C(v) \left(\sum_{k \in \mathcal{S}} H_i^k(t) p_{k\bar{k}}(t, v) \right) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= \sum_{k, l \in \mathcal{S}} H_i^k(t) q_{kl}(0, t) E^{\mathbb{P}} \left(\int_t^T C(v) p_{l\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X \right) \\ &= \sum_{k, l \in \mathcal{S}} H_i^k(t) q_{kl}(0, t) E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v) p_{l\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X \right) \\ &\quad - \sum_{k, l \in \mathcal{S}} H_i^k(t) q_{kl}(0, t) \int_0^t C(v) p_{l\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv. \end{aligned}$$

Hierbei genügt es für die Vertauschung von Erwartungswert und Integral festzustellen, dass für jeden Pfad $(X, Z)_{|[0, t]} = (x, z)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\int_s^T \int_{\Omega} |C(v) H_i^{\bar{k}}(v-) \lambda^{\bar{k}l}(v)| \mathbb{P}(d\omega | X = x, Z_{|[0, t]} = z) dv \\ &\leq \int_s^T |C(v, x_{|[0, v]}) \lambda^{\bar{k}l}(v, x_{|[0, v]})| dv < \infty \end{aligned} \tag{6.16}$$

gilt, da C beschränkte Pfade hat und $\lambda^{\bar{k}l}$ lokal integrierbar ist. Mit der Formel der partiellen Integration (Protter, 2005, S. 68) und der Gleichung (6.9) erhalten wir einerseits

$$\begin{aligned} &\sum_{k, l \in \mathcal{S}} H_i^k(t) q_{kl}(0, t) E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v) p_{l\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X \right) \\ &= E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v) dH_i^{\bar{k}l}(v) \right) + \sum_{j=1}^n \sum_{k, l \in \mathcal{S}} \int_0^t H_i^k(s-) q_{kl}(0, s) \phi_j^l(s) dW_j(s) \\ &\quad + \sum_{k, l \in \mathcal{S}} \int_0^t E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v) p_{l\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \middle| \mathcal{F}_s^X \right) q_{kl}(0, s) dM_i^k(s), \end{aligned}$$

wobei wir die aus dem Satz von Fubini resultierende Identität

$$\sum_{k, l \in \mathcal{S}} H_i^k(0) q_{kl}(0, 0) E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v) p_{l\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \right) = E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v) dH_i^{\bar{k}l}(v) \right)$$

verwendet haben.

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k,l \in \mathcal{S}} H_i^k(t) q_{kl}(0,t) \int_0^t C(v) p_{l\bar{k}}(0,v) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \\
 &= \sum_{k \in \mathcal{S}} \int_0^t H_i^k(v-) C(v) \delta_{k\bar{k}} \lambda^{\bar{k}l}(v) dv + \sum_{k,l \in \mathcal{S}} \int_0^t \left(\int_0^s C(v) p_{l\bar{k}}(0,v) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \right) q_{kl}(0,s) dM_i^k(s) \\
 &= \int_0^t C(v) dA_i^{\bar{k}l}(v) + \sum_{k,l \in \mathcal{S}} \int_0^t \left(\int_0^s C(v) p_{l\bar{k}}(0,v) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \right) q_{kl}(0,s) dM_i^k(s).
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir in (6.15) für $t = T$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T C(v) dH_i^{\bar{k}l}(v) &= E^{\mathbb{P}} \left(\int_0^T C(v) dH_i^{\bar{k}l}(v) \right) + \int_0^T C(v) dM_i^{\bar{k}l}(v) \\
 &+ \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}} \int_0^T E^{\mathbb{P}} \left(\int_s^T C(v) (p_{l\bar{k}}(s,v) - p_{k\bar{k}}(s,v)) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \middle| \mathcal{F}_s^X \right) dM_i^{kl}(s) \\
 &+ \sum_{j=1}^n \sum_{k,l \in \mathcal{S}} \int_0^T H_i^k(t-) q_{kl}(0,s) \varphi_j^l(s) dW_j(s).
 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir wie in den Beweisen zuvor die Gleichung $dM_i^k(t) = \sum_{l \neq k} dM_i^{lk}(t) - dM_i^{kl}(t)$ zum Einsatz gebracht. Abschließend gilt mit dem Satz von Fubini (vgl. (6.16))

$$\begin{aligned}
 & E^{\mathbb{P}} \left(\int_s^T C(v) (p_{l\bar{k}}(s,v) - p_{k\bar{k}}(s,v)) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \middle| \mathcal{F}_s^X \right) \\
 &= E^{\mathbb{P}} \left(\int_s^T C(v) E^{\mathbb{P}} \left(H_1^{\bar{k}}(v) \middle| \mathcal{F}_T^X, Z_1(s) = l \right) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \middle| \mathcal{F}_s^X \right) \\
 &\quad - E^{\mathbb{P}} \left(\int_s^T C(v) E^{\mathbb{P}} \left(H_1^{\bar{k}}(v) \middle| \mathcal{F}_T^X, Z_1(s) = k \right) \lambda^{\bar{k}l}(v) dv \middle| \mathcal{F}_s^X \right) \\
 &= E^{\mathbb{P}} (V_l(t) - V_k(t) | \mathcal{F}_t^X).
 \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für einen einzelnen Versicherungsnehmer. Der Beweis von (6.14) verläuft analog zum Beweis von (6.10) mit der Ausnahme, dass wir hier bei der Überprüfung, ob die stochastische Version des Fubini-Theorems verwendet werden darf, zusätzlich die Cauchy-Schwarz-Ungleichung benötigen.

Abschließend betrachten wir den Portfoliofall, d.h. es gelte $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X \vee \bigvee_{i=1}^m \mathbb{F}^{Z_i}$. Die bedingte Unabhängigkeit der Z_i , $i = 1, \dots, m$ sowie der Satz von Fubini implizieren $E^{\mathbb{P}}(\int_0^T C(v) dH_i^{\bar{k}l}(v) | \mathcal{F}_t) = E^{\mathbb{P}}(\int_0^T C(v) dH_i^{\bar{k}l}(v) | \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^{Z_i})$ (vgl. (6.16) bzw. Satz A.3.1 im Anhang). Berücksichtigen wir, dass die Z_i , $i = 1, \dots, m$ bedingt identisch verteilt sind, so folgt die Aussage im Portfoliofall durch Anwendung des ersten Teils auf die einzelnen Summanden $\int_0^T C(v) dH_i^{\bar{k}l}(v)$ und der anschließenden Addition. \square

6.3 Berechnung im Markovfall

In diesem Abschnitt berechnen wir die MRT-Zerlegung unter der zusätzlichen Annahme, dass der Zustandsprozess X ein Markovscher Diffusionsprozess ist und die Versicherungszahlungen Funktionen in X sind. Wir nehmen weiter an, dass $\det \sigma(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, T]$ \mathbb{P} -f. s. ist.

Ferner schreiben wir $f \in C_d^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ für eine Funktion $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, deren partielle Ableitungen $\frac{\partial f_k}{\partial t}, \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}, 1 \leq i, j \leq n, k = 1, \dots, d$ existieren und auf $(0, T) \times \mathbb{R}$ stetig sind.

Annahme 6.6. Der Zustandsprozess $X = ((X_1(t), \dots, X_n(t))^\top)_{0 \leq t \leq T}$ ist ein n -dimensionaler Diffusionsprozess, der die Gleichung

$$dX(t) = \theta(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \quad (6.17)$$

für einen deterministischen Startwert $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Hierbei seien der Driftvektor $\theta: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und die Volatilitätsmatrix $\sigma: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetige Funktionen derart, dass eine eindeutige starke Lösung für (6.17) existiert.

Proposition 6.7 (Markov-Fall). Sei X ein n -dimensionaler Diffusionsprozess, der die Annahme 6.6 erfüllt. Außerdem seien $g: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_0^T |g(s, X(s))| ds < \infty$ \mathbb{P} -f. s. und $h, h_j: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), j = 1, \dots, K$ messbare Funktionen. Im Folgenden bezeichne $\bar{h} := (h_1, \dots, h_K)^\top$.

i) **(Zustandsunabhängige Zahlung)** Sei $L = C_{0,T}$, wobei $C_{0,T}$ quadratintegrierbar und von der Form $C_{0,T} = e^{-\int_0^T g(s, X(s)) ds} h(X(T))$ ist. Falls $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto E^\mathbb{P} \left(e^{-\int_t^T g(s, X(s)) ds} h(X(T)) \middle| X(t) = x \right)$ in $C_1^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ ist, sind die eindeutigen Integranden der MRT-Zerlegung (5.5) von $R = L - E^\mathbb{P}(L)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi^{X_i}(t) &= e^{-\int_0^t g(s, X(s)) ds} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X(t)), \quad i = 1, \dots, n, \\ \psi^{kl}(t) &= 0, \quad (k, l) \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

ii) **(Diskrete Verbleibszahlung)** Sei $L = H(t_j)^\top C_j, t_j \in [0, T]$, wobei C_j quadratintegrierbar und von der Form $C_j = e^{-\int_0^t g(s, X(s)) ds} \bar{h}(X(T))$ ist. Weiter definiere

$$\begin{aligned} f^A: [0, t_j] \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^K, \quad (t, x) \mapsto E^\mathbb{P} \left(e^{-\int_t^{t_j} g(s, X(s)) ds} P(t, t_j) \bar{h}(X(T)) \middle| X(t) = x \right), \\ f^B: [0, T] \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^K, \quad (t, x) \mapsto E^\mathbb{P} \left(e^{-\int_t^T g(s, X(s)) ds} \bar{h}(X(T)) \middle| X(t) = x \right). \end{aligned}$$

Im Falle $f^A, f^B \in C_K^{1,2}((0, t_j) \times \mathbb{R}^n)$ sind die eindeutigen Integranden der MRT-Zerlegung (5.5) von $R = L - E^\mathbb{P}(L)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi^{X_i}(t) &= \mathbb{1}_{[0, t_j]}(t) H(t-)^\top e^{-\int_0^t g(s, X(s)) ds} \frac{\partial f^A}{\partial x_i}(t, X(t)) \\ &\quad + \mathbb{1}_{(t_j, T]}(t) H(t_j)^\top e^{-\int_0^t g(s, X(s)) ds} \frac{\partial f^B}{\partial x_i}(t, X(t)), \quad i = 1, \dots, n, \\ \psi^{kl}(t) &= E^\mathbb{P}(V_l(t) - V_k(t) | \mathcal{F}_t^X), \quad (k, l) \in \mathcal{J}, \end{aligned}$$

wobei $V_k(t) = E^\mathbb{P}(H_1(t_j) C_j | \mathcal{F}_t^X, Z_1(t) = k), k \in \mathcal{S}$.

iii) (**Stetige Verbleibszahlung**) Sei $L = \int_0^T H(t)^\top C(t) dt$, wobei $C(t)$ von der Form $C(t) = e^{-\int_0^t g(s, X(s)) ds} \bar{h}(X(t))$ ist. Zusätzlich gelte $E^\mathbb{P}(\sup_{t \in [0, T]} \sum_{i=1}^K |C_i(t)|) < \infty$ und $\sup_{t \in [0, T]} E^\mathbb{P}((\sum_{i=1}^K C_i(t))^2) < \infty$. Falls $f^v: [0, v] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^K$, $(t, x) \mapsto E^\mathbb{P}(e^{-\int_t^v g(s, X(s)) ds} P(t, v) \bar{h}(X(v)) | X(t) = x)$ für alle $v \in [0, T]$ in $C_K^{1,2}((0, v) \times \mathbb{R}^n)$ ist, sind die eindeutigen Integranden der MRT-Zerlegung (5.5) von $R = L - E^\mathbb{P}(L)$ gegeben durch

$$\psi^{X_i}(t) = H(t-)^\top e^{-\int_0^t g(s, X(s)) ds} \int_t^T \frac{\partial f^v}{\partial x_i}(t, X(t)) dv, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\psi^{kl}(t) = E^\mathbb{P}(V_l(t) - V_k(t) | \mathcal{F}_t^X), \quad (k, l) \in \mathcal{J},$$

$$\text{wobei } V_k(t) = E^\mathbb{P}\left(\int_t^T H_1(v) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_t^X, Z_1(t) = k\right), \quad k \in \mathcal{S}.$$

iv) (**Stetige Übergangszahlung**) Sei $L = \int_0^T C_{\bar{k}\bar{l}}(t) dH^{\bar{k}\bar{l}}(t)$, $(\bar{k}, \bar{l}) \in \mathcal{J}$, wobei $(C_{\bar{k}\bar{l}}(t))_{0 \leq t \leq T}$ ein stetiger Prozess von der Form $C_{\bar{k}\bar{l}}(t) = e^{-\int_0^t g(s, X(s)) ds} h(X(t))$ ist. Zusätzlich gelte $E^\mathbb{P}(\sup_{t \in [0, T]} |C_{\bar{k}\bar{l}}(t)|) < \infty$, $\sup_{t \in [0, T]} E^\mathbb{P}([C_{\bar{k}\bar{l}}(t)]^4) < \infty$ und $\sup_{t \in [0, T]} E^\mathbb{P}([\lambda^{\bar{k}\bar{l}}(t)]^4) < \infty$. Falls $f_k^v: [0, v] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto E^\mathbb{P}(e^{-\int_t^v g(s, X(s)) ds} h(X(v)) p_{\bar{k}\bar{k}}(t, v) \lambda^{\bar{k}\bar{l}}(v) | X(t) = x)$ für alle $v \in [0, T]$, $k \in \mathcal{S}$ in $C_1^{1,2}((0, v) \times \mathbb{R}^n)$ ist, sind die eindeutigen Integranden der MRT-Zerlegung (5.5) von $R = L - E^\mathbb{P}(L)$ gegeben durch

$$\psi^{X_i}(t) = \sum_{k \in \mathcal{S}} H^k(t-) e^{-\int_0^t g(s, X(s)) ds} \int_t^T \frac{\partial f_k^v}{\partial x_i}(t, X(t)) dv, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\psi^{\bar{k}\bar{l}}(t) = C_{\bar{k}\bar{l}}(t) + E^\mathbb{P}(V_{\bar{l}}(t) - V_{\bar{k}}(t) | \mathcal{F}_t^X),$$

$$\psi^{kl}(t) = E^\mathbb{P}(V_l(t) - V_k(t) | \mathcal{F}_t^X), \quad (k, l) \neq (\bar{k}, \bar{l}),$$

$$\text{wobei } V_k(t) = E^\mathbb{P}\left(\int_t^T C(v) dH_1^{\bar{k}\bar{l}}(v) \middle| \mathcal{F}_t^X, Z_1(t) = k\right), \quad k \in \mathcal{S}.$$

Beweis. Da L aufgrund der jeweiligen Voraussetzungen quadratintegrierbar ist, folgt die Eindeutigkeit der Zerlegung aus Proposition 5.5. Außerdem impliziert die Annahme 6.6, dass X ein Markov-Prozess ist (Øksendahl, 2013, Theorem 7.1.2). Gemeinsam mit dem Faktorisierungslemma folgt daher für die Fälle (i) bis (iv), dass

$$E^\mathbb{P}(\cdot | \mathcal{F}_t^X) = E^\mathbb{P}(\cdot | X(t)) \tag{6.18}$$

eine Funktion in $X(t)$ ist. Weiter definieren wir $G(t) := \int_0^t g(s, X(s)) ds$, $0 \leq t \leq T$ und stellen fest, dass

$$d[G, G](t) = d[G, p_{kl}(0, \cdot)](t) = d[p_{kl}(0, \cdot), p_{ij}(0, \cdot)](t) = d[G, X_i](t) = d[p_{kl}(0, \cdot), X_i](t) = 0 \tag{6.19}$$

für $(k, l), (i, j) \in \mathcal{J}$ gilt (Shreve, 2004, S. 480).

i) Die vorausgesetzte Form von $C_{0,T}$ sowie (6.18) liefern

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}(C_{0,T}|\mathcal{F}_t^X) &= e^{-G(t)} E^{\mathbb{P}}(e^{-\int_t^T g(s,X(s))ds} h(X(T))|\mathcal{F}_t^X) = e^{-G(t)} f(t, X(t)) \\ &=: \tilde{f}(t, G(t), X(t)). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist f eine glatte Funktion, also ist auch \tilde{f} eine glatte Funktion. Mit Itô's Lemma (Protter, 2005, Theorem 33) erhalten wir für $0 \leq t \leq T$

$$E^{\mathbb{P}}(C_{0,T}|\mathcal{F}_t^X) - E^{\mathbb{P}}(C_{0,T}) = \sum_{i=1}^n \int_0^t e^{-G(s)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X(s)) dM^{X_i}(s) + \int_0^t a(s) ds,$$

wobei $a = (a(t))_{0 \leq t \leq T}$ die Abkürzung für die Summe aller ds -Größen ist. Hierbei haben wir die Gleichheit (6.19) sowie die Tatsache, dass $(t, G(t), X(t))$ stetige Pfade hat, benutzt. Sowohl die linke Seite $E^{\mathbb{P}}(C_{0,T}|\mathcal{F}_t^X) - E^{\mathbb{P}}(C_{0,T})$ als auch die stochastischen Integrale bzgl. der kompensierten Prozesse M^{X_i} auf der rechten Seite sind Martingale. Daher folgt aus der Eindeutigkeit der Doob-Meyer-Zerlegung (ebd., Theorem 16), dass der ds -Term verschwindet. Mit der \mathcal{F}_T^X -Messbarkeit von $C_{0,T}$ ergibt sich die Behauptung.

ii) Wir leiten die Zerlegung mithilfe von Lemma 6.3 her und bestimmen dazu die Martingaldarstellung von $P(0, t_j)C_j$ abzüglich seines Erwartungswertes. Hierfür betrachten wir die Zerlegung

$$\begin{aligned} P(0, t_j)C_j - E^{\mathbb{P}}(P(0, t_j)C_j) \\ = \left[P(0, t_j)E^{\mathbb{P}}(C_j|\mathcal{F}_{t_j}^X) - E^{\mathbb{P}}(P(0, t_j)C_j) \right] + P(0, t_j) \left[C_j - E^{\mathbb{P}}(C_j|\mathcal{F}_{t_j}^X) \right] \end{aligned} \quad (6.20)$$

und ermitteln getrennt voneinander die Martingaldarstellungen beider Summanden. Die Annahme über die Form von C_j liefert für $0 \leq t \leq t_j$

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}(P(0, t_j)E^{\mathbb{P}}(C_j|\mathcal{F}_{t_j}^X)|\mathcal{F}_t^X) &= P(0, t) e^{-G(t)} E^{\mathbb{P}}(P(t, t_j) e^{-\int_t^{t_j} g(s,X(s))ds} h(X(T))|\mathcal{F}_t^X) \\ &= P(0, t) e^{-G(t)} f^A(t, X(t)) \\ &=: \tilde{f}^A(t, (p_{kl}(0, t))_{k,l}, G(t), X(t)). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist f^A eine glatte Funktion, also ist auch \tilde{f}^A eine glatte Funktion. Für $0 \leq t \leq t_j$ folgt mit Itô's Formel (ebd., Theorem 33) daher

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}(P(0, t_j)E^{\mathbb{P}}(C_j|\mathcal{F}_{t_j}^X)|\mathcal{F}_t^X) - E^{\mathbb{P}}(P(0, t_j)E^{\mathbb{P}}(C_j|\mathcal{F}_{t_j}^X)) \\ = \sum_{i=1}^n \int_0^t P(0, s) e^{-G(s)} \frac{\partial f^A}{\partial x_i}(s, X(s)) dM^{X_i}(s) + \int_0^t a(s) ds, \end{aligned}$$

wobei $a = (a(t))_{0 \leq t \leq T}$ die Abkürzung für die Summe aller ds -Größen ist. Hierbei haben wir (6.19) und die Tatsache, dass $(t, (p_{kl}(0, t))_{k,l}, G(t), X(t))$ stetige Pfade hat, benutzt. Mit denselben Argumenten wie in i) folgt, dass der ds -Term verschwindet. Da $P(0, t_j)E^{\mathbb{P}}(C_j|\mathcal{F}_{t_j}^X)$

$\mathcal{F}_{t_j}^X$ -messbar ist, erhalten wir also für $t = t_j$

$$P(0, t_j)E^{\mathbb{P}}(C_j | \mathcal{F}_{t_j}^X) - E^{\mathbb{P}}(P(0, t_j)C_j) = \sum_{i=1}^n \int_0^{t_j} P(0, s)e^{-G(s)} \frac{\partial f^A}{\partial x_i}(s, X(s)) dM^{X_i}(s).$$

Wenden wir außerdem den Teil i) auf C_j an, so gilt

$$P(0, t_j)[C_j - E^{\mathbb{P}}(C_j | \mathcal{F}_{t_j}^X)] = \sum_{i=1}^n \int_{t_j}^T P(0, t_j)e^{-G(s)} \frac{\partial f^B}{\partial x_i}(s, X(s)) dM^{X_i}(s).$$

Insgesamt bekommen wir in (6.20) also

$$P(0, t_j)C_j - E^{\mathbb{P}}(P(0, t_j)C_j) = \sum_{i=1}^n \int_0^T \left[P(0, s)e^{-G(s)} \frac{\partial f^A}{\partial x_i}(s, X(s)) \mathbb{1}_{[0, t_j]} + P(0, t_j)e^{-G(s)} \frac{\partial f^B}{\partial x_i}(s, X(s)) \mathbb{1}_{(t_j, T]} \right] dM^{X_i}(s).$$

Mithilfe der Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_0^t \tilde{\varphi}_i(u) dM^{X_i}(u) &= \int_0^t \tilde{\varphi}(u) dM^X(u) = \int_0^t \tilde{\varphi}(u) \sigma(u) dW(u) \\ &= \sum_{j=1}^d \int_0^t (\tilde{\varphi}(u) \sigma(u))_j dW_j(u), \end{aligned} \quad (6.21)$$

wobei $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n)$ einen beliebigen Vektor, $M^X := (M^{X_1}, \dots, M^{X_n})$ und $(\cdot)_j$ die j -te Komponente eines Vektors bezeichnet, erhalten wir die Zerlegung (6.7). Mit Lemma 6.3 folgt für die Integranden der MRT-Zerlegung

$$\begin{aligned} \psi^{X_i}(t) &= \mathbb{1}_{[0, t_j]}(t) H(t-)^\top e^{-\int_0^t g(s, X(s)) ds} \frac{\partial f^A}{\partial x_i}(t, X(t)) \\ &\quad + \mathbb{1}_{(t_j, T]}(t) H(t_j)^\top e^{-\int_0^t g(s, X(s)) ds} \frac{\partial f^B}{\partial x_i}(t, X(t)), \quad i = 1, \dots, n, \\ \psi^{kl}(t) &= E^{\mathbb{P}}(V_l(t) - V_k(t) | \mathcal{F}_t^X), \quad (k, l) \in \mathcal{J}, \end{aligned}$$

wobei $V_k(t) = E^{\mathbb{P}}(H_1(t_j)C_j | \mathcal{F}_t^X, Z_1(t) = k)$, $k \in \mathcal{S}$.

iii) Die vorausgesetzte Form von $C(v)$ und (6.18) liefern für jedes $v \in [0, T]$

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}(P(0, v)C(v) | \mathcal{F}_t^X) &= P(0, t)e^{-G(t)} E^{\mathbb{P}}(P(t, v)e^{-\int_t^v g(s, X(s)) ds} \bar{h}(X(t)) | \mathcal{F}_t^X) \\ &= P(0, t)e^{-G(t)} f^v(t, X(t)) \\ &=: \tilde{f}^v(t, X(t), G(t), (p_{kl}(0, t))_{k, l}). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist f^v eine glatte Funktion, also ist auch \tilde{f}^v eine glatte Funktion. Für $0 \leq t \leq T$ folgt mit Itô's Lemma (Protter, 2005, Theorem 33)

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}(P(0, v)C(v) | \mathcal{F}_t^X) - E^{\mathbb{P}}(P(0, v)C(v)) \\ = \sum_{i=1}^n \int_0^t P(0, s)e^{-G(s)} \frac{\partial f^v}{\partial x_i}(s, X(s)) dM^{X_i}(s) + \int_0^t a(s) ds, \end{aligned}$$

wobei $a = (a(t))_{0 \leq t \leq T}$ die Abkürzung für die Summe aller ds -Größen ist. Wir haben hierbei

benutzt, dass $(t, X(t), G(t), (p_{kl}(0, t))_{k,l})$ stetige Pfade hat. Mit denselben Argumenten wie in i) folgt, dass der ds -Term verschwindet. Unter Verwendung der Gleichung (6.21) erhalten wir mit Lemma 6.4 für die Integranden der MRT-Zerlegung

$$\begin{aligned}\psi^{X_i}(t) &= H(t-)^{\top} Q(0, t) \int_t^T \phi_i^v(t) dv \\ &= H(t-)^{\top} e^{-G(t)} \int_t^T \frac{\partial f^v}{\partial x_i}(t, X(t)) dv, \quad i = 1, \dots, n,\end{aligned}$$

und

$$\psi^{kl}(t) = E^{\mathbb{P}}(V_l(t) - V_k(t) | \mathcal{F}_t^X), \quad (k, l) \in \mathcal{J},$$

wobei $V_k(t) := E^{\mathbb{P}}\left(\int_t^T H_1(v) C(v) dv \middle| \mathcal{F}_T^X, Z_1(t) = k\right)$, $k \in \mathcal{S}$.

iv) Ähnlich wie im Teil iii) erhalten wir aufgrund der Form von $C_{\bar{k}l}(t)$ und $\lambda^{\bar{k}l}(t)$, dass für jedes $v \in [0, T]$ und jedes $k \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}& E^{\mathbb{P}}(C_{\bar{k}l}(v) p_{k\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}l}(v) | \mathcal{F}_t^X) \\ &= e^{-G(t)} E^{\mathbb{P}}(e^{-\int_t^v g(s, X(s)) ds} h(X(v)) \sum_{l \in \mathcal{S}} p_{kl}(0, t) p_{l\bar{k}}(t, v) \lambda^{\bar{k}l}(v) | \mathcal{F}_t^X) \\ &= \sum_{l \in \mathcal{S}} e^{-G(t)} p_{kl}(0, t) E^{\mathbb{P}}(e^{-\int_t^v g(s, X(s)) ds} h(X(v)) p_{l\bar{k}}(t, v) \lambda^{\bar{k}l}(v) | \mathcal{F}_t^X) \\ &= \sum_{l \in \mathcal{S}} e^{-G(t)} p_{kl}(0, t) f_l^v(t, X(t)) =: \tilde{f}_k^v(t, X(t), G(t), (p_{kl}(0, t))_l)\end{aligned}$$

gilt. Für $t \leq v$ liefert Itô's Lemma (Protter, 2005, Theorem 33)

$$\begin{aligned}& E^{\mathbb{P}}(C_{\bar{k}l}(v) p_{k\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}l}(v) | \mathcal{F}_t^X) - E^{\mathbb{P}}(C_{\bar{k}l}(v) p_{k\bar{k}}(0, v) \lambda^{\bar{k}l}(v)) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial \tilde{f}_k^v}{\partial x_i}((s, X(s), G(s), (p_{kl}(0, s))_u) dM^{X_i}(s) + \int_0^t a(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \sum_{l \in \mathcal{S}} e^{-G(t)} p_{kl}(0, t) \frac{\partial f_l^v}{\partial x_i}(s, X(s)) dM^{X_i}(s) + \int_0^t a(s) ds,\end{aligned}$$

wobei $a = (a(t))_{0 \leq t \leq T}$ die Abkürzung für die Summe aller ds -Größen ist. Mit derselben Begründung wie in den vorangegangenen Beweisen folgt, dass der ds -Term verschwindet. Mit Lemma 6.5 erhalten wir

$$\begin{aligned}\psi^{X_i}(t) &= \sum_{j,k,l \in \mathcal{S}} H^j(t-) q_{jk}(0, t) p_{kl}(0, t) e^{-G(t)} \int_t^T \frac{\partial f_l^v}{\partial x_i}(s, X(s)) dv \\ &= \sum_{j \in \mathcal{S}} H^j(t) e^{-G(t)} \int_t^T \frac{\partial f_j^v}{\partial x_i}(s, X(s)) dv\end{aligned}$$

und

$$\psi^{\bar{k}l}(t) = C_{\bar{k}l}(t) + E^{\mathbb{P}}(V_l(t) - V_{\bar{k}}(t) | \mathcal{F}_t^X),$$

$$\psi^{kl}(t) = E^{\mathbb{P}}(V_l(t) - V_k(t) | \mathcal{F}_t^X), \quad (k, l) \in \mathcal{J},$$

$$\text{wobei } V_k(t) = E^{\mathbb{P}} \left(\int_t^T C(v) dH_1^{\bar{k}\bar{l}}(v) \middle| \mathcal{F}_T^X, Z_1(t) = k \right), k \in \mathcal{S}.$$

□

Bemerkung 6.8. Für die oben definierten Funktionen f , f^A und f^B (in den diskreten Fällen (i) und (ii)) bzw. f^v und f_j^v (in den stetigen Fällen (iii) und (iv)) gibt der Funktionswert an der Stelle $(t, X(t))$ die bedingte Erwartung des auf t diskontierten, mit Übergangswahrscheinlichkeiten gewichteten Zahlungsstroms $h(X(T))$ bzw. $h(X(v))$ zu gegebenem Zustand $X(t)$ an. Entsprechend beschreibt der Prozess $\psi^{X_i}(t)$ die (über v summierten) durch die i -te Risikoquelle verursachten Änderungsraten dieser bedingten Erwartung, gewichtet mit der Aufteilung im Portfolio. Außerdem können wir die Integranden $\psi^{kl}(t)$ der (unsystematischen) Risikofaktoren als die bedingte Erwartung des *riskierten Kapitals* $C_{kl}(t) + V_l(t) - V_k(t)$ ⁴, zu gegebenem Verlauf des systematischen Risikos $X|_{[0,t]}$, interpretieren.

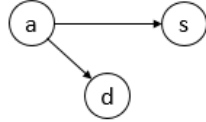
Im nächsten Kapitel wenden wir die bewiesenen Resultate auf das Beispiel der privaten Krankenversicherung an. Für eine exemplarische Modellierung im Rahmen der Lebensversicherung sei auf Schilling et al. (2017) verwiesen.

7 MRT-Zerlegung am Beispiel der privaten Krankenversicherung

Wir betrachten ein Portfolio, bestehend aus m homogenen Versicherungsnehmern vom Alter x , die mit identischen Versicherungsverträgen ausgestattet sind. Ferner bezeichne $\omega_x < \infty$ das rechnerische Endalter eines x -Jährigen. Entsprechend sei unser (endlicher) Zeithorizont durch $T = \omega_x - x$ gegeben. In der privaten Krankenversicherung übernimmt der Versicherer die zufälligen Krankheitskosten der Versicherungsnehmer. Außerdem sind private Krankenversicherungen seit Inkrafttretens des GKV-Wettbewerbsstärkungsgesetzes im Jahr 2009 dazu verpflichtet, den Versicherungsnehmern bei Wechsel der Krankenversicherung einen Teil der Alterungsrückstellung, den sogenannten *Übertragungswert*,⁵ mitzugeben (vgl. Wallner und Zwiesler, 2010). Dadurch soll ein Wechsel erleichtert und so der Wettbewerb zwischen den Krankenversicherungen gestärkt werden. Weitere Leistungen gegenüber den Versicherten seien im Vertrag nicht enthalten. Gemäß Christiansen (2012, Beispiel 2.4) wird in der privaten Krankenversicherung keine Unterscheidung zwischen verschiedenen Krankheitsarten und -stufen vorgenommen, sodass in unserem Modell die relevanten Zustände durch $\mathcal{S} := \{a = \text{aktiv}, s = \text{storniert}, d = \text{verstorben}\}$ sowie die möglichen Übergänge durch $a \rightarrow s$ und $a \rightarrow d$ gegeben sind.

⁴In den Fällen (ii), (iii) und (iv): $(k, l) \neq (\bar{k}, \bar{l})$ ist keine Übergangsleistung vorhanden, d. h. $C_{kl} = 0$.

⁵Für weitere Informationen zum Übertragungswert und dessen Auswirkungen auf die Prämienkalkulation sei auf Milbrodt und Röhrs (2016, Kapitel 13) sowie Becker (2017, Kapitel 9) verwiesen.



Wir nehmen an, dass dem Versicherungsnehmer bei Stornierung bzw. Aufhebung des Versicherungsvertrags zur Zeit t der Übertragungswert $U(t) \in \mathbb{R}$ mitgegeben wird, wobei die Übertragungswertfunktion $U: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ stetig sei. In Anlehnung an Christiansen et al. (2018) nehmen wir außerdem an, dass die erwarteten Krankheitskosten⁶ eines $x+t$ -Jährigen durch

$$Y(t) = \alpha(t) + \beta(t)\kappa(t), \quad t \in [0, T], \quad (7.1)$$

gegeben sind, wobei α und β zweimal stetig differenzierbar sind und $\beta(t) \neq 0, t \in [0, T]$ ist. Ferner sei $\kappa(t)$ getrieben von einer \mathbb{P} -Brownschen Bewegung $W_Y = (W_Y(t))_{0 \leq t \leq T}$, d. h.

$$d\kappa(t) = \theta_Y dt + \sigma_Y dW_Y(t), \quad t \in [0, T],$$

für $\theta_Y, \sigma_Y \in \mathbb{R}, \sigma_Y \neq 0$. Mit Itô's Formel (Protter, 2005, Abschnitt II, Theorem 33) und (7.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} dY(t) &= (\alpha'(t) + (\kappa(0) + \theta_Y t + \sigma_Y W_Y(t))\beta'(t) + \beta(t)\theta_Y)dt + \sigma_Y \beta(t)dW_Y(t) \\ &= (\alpha'(t) + \kappa(t)\beta'(t) + \beta(t)\sigma_Y)dt + \sigma_Y \beta(t)dW_Y(t) \\ &= \left(\alpha'(t) + \frac{Y(t) - \alpha(t)}{\beta(t)}\beta'(t) + \beta(t)\sigma_Y \right) dt + \sigma_Y \beta(t)dW_Y(t). \end{aligned}$$

Nach Øksendal (2013, Theorem 5.2.1) ist die Lösung der stochastischen Differentialgleichung eindeutig durch (7.1) gegeben. Des Weiteren stellen wir fest, dass Y eine Markovkette ist (ebd., Theorem 7.1.2). Außerdem nehmen wir an, dass die Prämie P stetig gezahlt wird. Der Gesamtverlust des Versicherers summiert sich also zu

$$L = \int_0^T (Y(t) - P)e^{-\int_0^t r(s)ds} dH^a(t) + \int_0^T U(t)e^{-\int_0^t r(s)ds} dH^{as}(t),$$

wobei $r(t)$ die Zinsrate bezeichnet.

Wie in der Finanzmathematik weit verbreitet, modellieren wir auch hier die Zinsrate $r = (r(t))_{0 \leq t \leq T}$ durch einen positiven Cox-Ingersoll-Ross-Prozess (CIR-Prozess), d. h.

$$dr(t) = \kappa_r(\theta_r - r(t))dt + \sigma_r \sqrt{r(t)}dW_r(t), \quad r(0) > 0,$$

wobei $\kappa_r, \theta_r, \sigma_r \in \mathbb{R}, 2\kappa_r\theta_r \geq \sigma_r^2, \sigma_r \neq 0$ und $W_r = (W_r(t))_{0 \leq t \leq T}$ eine \mathbb{P} -Brownsche Bewegung ist. Mit Brigo und Mercurio (2007, S. 66) folgt, dass r ein affiner Prozess ist, d. h.

$$E^{\mathbb{P}} \left(e^{-\int_t^T r(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t^X \right) = e^{\alpha_r(t,T) - \beta_r(t,T)r(t)}, \quad t \in [0, T], \quad (7.2)$$

⁶ Anders als in Christiansen et al. (2018) bezeichnet Y hier die *erwarteten* und nicht die *tatsächlichen* Krankheitskosten.

wobei

$$\alpha_r(t, T) = \frac{2\kappa_r\theta_r}{\sigma_r^2} \log \left(\frac{2h_r e^{(\kappa_r+h_r)\frac{T-t}{2}}}{2h_r + (\kappa_r + h_r)(e^{h_r(T-t)} - 1)} \right) \quad (7.3)$$

und

$$\beta_r(t, T) = \frac{2(e^{h_r(T-t)} - 1)}{2h_r + (\kappa_r + h_r)(e^{h_r(T-t)} - 1)}, \quad h_r = \sqrt{\kappa_r^2 + 2\sigma_r^2} \quad (7.4)$$

sind.

Aus den obigen Annahmen folgt für die Übergangintensitäten zunächst $\lambda^{sa} = \lambda^{da} = \lambda^{sd} = 0$. Wie zuvor für die Zinsintensität, nehmen wir auch für die Stornointensität $\lambda^{as} = (\lambda^{as}(t))_{0 \leq t \leq T}$ an, dass diese durch einen CIR-Prozess gegeben ist, d. h.

$$d\lambda^{as}(t) = \kappa_{as}(\theta_{as} - \lambda^{as}(t))dt + \sigma_{as}\sqrt{\lambda^{as}(t)}dW_{as}(t), \quad \lambda^{as}(0) > 0,$$

wobei $\kappa_{as}, \theta_{as}, \sigma_{as} \in \mathbb{R}$, $\sigma_{as} \neq 0$ und $W_{as} = (W_{as}(t))_{0 \leq t \leq T}$ eine \mathbb{P} -Brownsche Bewegung ist. Entsprechend ist auch λ^{as} ein affiner Prozess, für den

$$E^{\mathbb{P}} \left(e^{-\int_t^T \lambda^{as}(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t^X \right) = e^{\alpha_{as}(t, T) - \beta_{as}(t, T)\lambda^{as}(t)}, \quad t \in [0, T], \quad (7.5)$$

gilt, wobei $\alpha_{as}(t, T)$ und $\beta_{as}(t, T)$ erneut Darstellungen wie in (7.3) und (7.4) besitzen (Brigo und Mercurio, 2007, S. 66). Ferner nehmen wir aus technischen Gründen an, dass

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{n} \int_v^{v+\frac{1}{n}} \lambda^{as}(s)ds \right| < \infty, \quad v \in [0, T],$$

ist. In Anlehnung an Dahl und Møller (2006) setzen wir voraus, dass die Sterbeintensität $\lambda^{ad} = (\lambda^{ad}(t))_{0 \leq t \leq T}$ unter \mathbb{P} ein positiver zeitinhomogener CIR-Prozess ist, d. h.

$$d\lambda^{ad}(t, x) = (\gamma(t, x) - \delta(t, x)\lambda^{ad}(t, x))dt + \sigma_{ad}(t, x)\sqrt{\lambda^{ad}(t, x)}dW_{ad}(t), \quad \lambda^{ad}(0, x) = \lambda_0^{ad}(x),$$

wobei x das Alter des Versicherungsnehmers zur Zeit 0 und $W_{ad} = (W_{ad}(t))_{0 \leq t \leq T}$ eine \mathbb{P} -Brownsche Bewegung bezeichnet. Ferner nehmen wir an, dass die Anfangsintensitäten $\lambda_0^{ad}(x+t) = a + bc^{x+t}$ dem Gompertz-Makeham-Sterblichkeitsgesetz folgen und

$$\gamma(t, x) = \frac{1}{2}\hat{\sigma}\lambda_0^{ad}(x+t), \quad \delta(t, x) = \hat{\delta} - \frac{d}{dt}\lambda_0^{ad}(x+t), \quad \sigma_{ad}(t, x) = \hat{\sigma}\sqrt{\lambda_0^{ad}(x+t)}$$

für $a, b, c, \hat{\delta}, \hat{\sigma} \in \mathbb{R}$. Da in unserem Beispiel das Alter x fest ist, schreiben wir nur $\lambda^{ad}(t)$ und $\sigma_{ad}(t)$. Insbesondere nehmen wir an, dass die obigen Parameter so gewählt sind, dass $\sigma_{ad}(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$ ist. Auch λ^{ad} ist ein affiner Prozess, d. h., es ist

$$E^{\mathbb{P}} \left(e^{-\int_t^T \lambda^{ad}(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t^X \right) = e^{\alpha_{ad}(t, T) - \beta_{ad}(t, T)\lambda^{ad}(t)}, \quad t \in [0, T], \quad (7.6)$$

wobei α_{ad} und β_{ad} den in Prop. 3.1 von Dahl und Møller (2006, S. 197) spezifizierten gewöhnlichen Differentialgleichungen genügen. Außerdem seien die Brownschen Bewegungen W_Y, W_r, W_{ad} und W_{as} stochastisch unabhängig. Für $X := (Y, r, \lambda^{as}, \lambda^{ad})$ ist die Volatilitätsmatrix (vgl. Annahme 6.6)

gegeben durch $\sigma(t, x) = \text{diag}\{\sigma_Y \beta(t), \sigma_r \sqrt{x_2}, \sigma_{as} \sqrt{x_3}, \sigma_{ad}(t) \sqrt{x_4}\}$. Daher folgt aus unseren Annahmen, dass $\det \sigma(t, x) \neq 0$ für alle $t \in [0, T]$ und alle Werte x , die der Prozess $X(t)$, $t \in [0, T]$, annimmt. Außerdem ist X ein Markovscher Diffusionsprozess, der die Annahme 6.6 erfüllt. Wir definieren für $v \in [0, T]$ die Funktionen⁷

$$f^v: [0, v] \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto E^{\mathbb{P}} \left(e^{-\int_t^v r(s) ds} p_{aa}(t, v) (Y(v) - P) | X(t) = x \right),$$

und

$$f_a^v: [0, v] \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto E^{\mathbb{P}} \left(e^{-\int_t^v r(s) ds} U(v) p_{aa}(t, v) \lambda^{as}(v) | X(t) = x \right).$$

Im Folgenden verwenden wir die Identität $p_{aa}(t, v) = e^{-\int_t^v (\lambda^{as}(s) + \lambda^{ad}(s)) ds}$, welche aus den Kolmogorov-Gleichungen (3.9) und (3.10) resultiert. Aufgrund der Unabhängigkeit der Komponenten von X erhalten wir

$$\begin{aligned} & E^{\mathbb{P}} \left(e^{-\int_t^v r(s) ds} e^{-\int_t^v (\lambda^{as}(s) + \lambda^{ad}(s)) ds} (Y(v) - P) | X(t) = x \right) \\ &= E^{\mathbb{P}} \left(e^{-\int_t^v r(s) ds} | X(t) = x \right) E^{\mathbb{P}} \left(e^{-\int_t^v \lambda^{as}(s) ds} | X(t) = x \right) \\ & \quad \cdot E^{\mathbb{P}} \left(e^{-\int_t^v \lambda^{ad}(s) ds} | X(t) = x \right) (x_1 + \beta(t) \theta_Y(v-t) - P), \end{aligned}$$

wobei wir

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}} (Y(v) | X(t)) &= Y(t) + E^{\mathbb{P}} (Y(v) - Y(t) | X(t)) \\ &= Y(t) + \beta(t) \theta_Y(v-t) + \beta(t) \sigma_Y E^{\mathbb{P}} (W_Y(v) - W_Y(t) | X(t)) \\ &= Y(t) + \beta(t) \theta_Y(v-t) \end{aligned}$$

verwendet haben. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned} & E^{\mathbb{P}} \left(e^{-\int_t^v r(s) ds} U(v) e^{-\int_t^v (\lambda^{as}(s) + \lambda^{ad}(s)) ds} \lambda^{as}(v) | X(t) = x \right) \\ &= -U(v) E^{\mathbb{P}} \left(e^{-\int_t^v r(s) ds} | X(t) = x \right) E^{\mathbb{P}} \left(e^{-\int_t^v \lambda^{ad}(s) ds} | X(t) = x \right) \frac{d}{dv} E^{\mathbb{P}} \left(e^{-\int_t^v \lambda^{as}(s) ds} | X(t) = x \right). \end{aligned}$$

Für die Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz genügt es mithilfe der Ungleichung $|e^{-x} - 1| \leq x$, $x \geq 0$ (Lang et al., 2008, Aufgabe 1) und der obigen Annahme festzustellen, dass

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{n} \left(e^{-\int_t^{v+\frac{1}{n}} \lambda^{as}(s) ds} - e^{-\int_t^v \lambda^{as}(s) ds} \right) \right| &= e^{-\int_t^v \lambda^{as}(s) ds} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{n} \left(e^{-\int_v^{v+\frac{1}{n}} \lambda^{as}(s) ds} - 1 \right) \right| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{n} \int_v^{v+\frac{1}{n}} \lambda^{as}(s) ds \right| < \infty \end{aligned}$$

ist. Da die modellierten Prozesse affin sind (vgl. (7.2) - (7.5)), folgt, dass die Funktionen f^v und f_a^v in $C_1^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^4)$ sind. Des Weiteren implizieren die obigen Annahmen, dass die Verbleibs-

⁷Die übrigen Komponenten von f^v in Satz 6.7 (iii) bzw. die übrigen Funktionen f_s^v und f_d^v in Satz 6.7 (iv) sind in unserem Beispiel gleich 0 und werden daher zur besseren Lesbarkeit weggelassen.

leistung $C_a(t) := (Y(t) - P)e^{-\int_0^t r(s)ds}$ sowie die Übergangsleistung $C_{as}(t) := U(t)e^{-\int_0^t r(s)ds}$ den Voraussetzungen zur Integrierbarkeit in Satz 6.7 genügen. Somit können wir unsere im Markovfall ausgearbeiteten Formeln für die MRT-Zerlegung anwenden. Mit Teil iii) und iv) von Satz 6.7 erhalten wir

$$R = L - E^{\mathbb{P}}(L) = \sum_{i=1}^4 R_i + R_{as} + R_{ad},$$

wobei die Risikofaktoren durch

$$R_i = \int_0^T H^a(t-) e^{-\int_0^t r(s)ds} \int_t^T \left(\frac{\partial f^v}{\partial x_i}(t, X(t)) + \frac{\partial f_a^v}{\partial x_i}(t, X(t)) \right) dv dM^{X_i}(t), \quad i = 1, \dots, 4,$$

$$R_{as} = \int_0^T E(C_{as}(t) - V_a(t) | \mathcal{F}_t^X) dM^{as}(t),$$

$$R_{ad} = \int_0^T E(-V_a(t) | \mathcal{F}_t^X) dM^{ad}(t),$$

gegeben sind. Für das (prospektive) Deckungskapital im Zustand a zur Zeit t ergibt sich hierbei

$$V_a(t) = E^{\mathbb{P}} \left(\int_t^T H_1(v) C_a(v) dv + \int_t^T C_{as}(v) dH_1^{kl}(v) \middle| \mathcal{F}_t^X, Z_1(t) = a \right).$$

Abschließend stellen wir den Rückbezug zu Bemerkung 6.8 her und bemerken, dass wir die Integranden der Risikofaktoren R_{as} und R_{ad} als die bedingte Erwartung des riskierten Kapital der jeweiligen Übergänge $a \rightarrow s$ und $a \rightarrow d$ auffassen können.

In diesem Abschnitt konnten wir eine mögliche Anwendung der MRT-Zerlegung in der privaten Krankenversicherung dargelegen. Zugleich haben wir mithilfe des Beispiels aufgezeigt, dass die Abstraktheit der MRT-Zerlegung keine unmittelbare Interpretation der Ergebnisse zulässt. Zudem sind die oben getroffenen Modellannahmen hinsichtlich ihrer Plausibilität zu hinterfragen. Diese und weitere Forschungsanliegen greifen wir genauer im nun folgenden Fazit auf.

8 Fazit und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit konnte die MRT-Zerlegung, die von Schilling et al. (2017) im Lebensversicherungskontext eingeführt wurde, auf den Rahmen der Personenversicherung verallgemeinert werden. Auf Basis des Martingaldarstellungssatzes wurde die Zerlegung der Verbindlichkeiten eines Versicherungsunternehmens unter Berücksichtigung zustandsunabhängiger Zahlungsströme, diskreter und stetiger Verbleibsleistungen sowie stetiger Übergangsleistungen ausgearbeitet. Dazu wurde ein Versicherungsportfolio, bestehend aus endlich vielen, homogenen Versicherungsnehmern, die an endlich vielen Zeitpunkten zwischen endlich vielen Zuständen wechseln, mithilfe von Zählprozessen modelliert. Die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Versicherungsnehmer von einem in den anderen Zustand wechselt, sind dabei vom Verlauf der systematischen Risiken abhängig. Diese wurden durch Itô- bzw. Diffusionsprozesse in das Modell eingebunden.

Um mit einer adäquaten Klasse von stochastischen Prozessen den Zustandsverlauf eines Versicherungsnehmers abzubilden, wurden, als geeignete Verallgemeinerung gewöhnlicher zeitstetiger Markovketten, die \mathbb{F}^X -DS Markovketten eingeführt. Diese besitzen zu gegebenem Verlauf der systematischen Risiken (bzw. allgemeiner zu gegebenem Verlauf eines Referenzprozesses) die in der aktuariellen Literatur weit verbreitete Markoveigenschaft. Im Anschluss an die Definition der \mathbb{F}^X -DS Markovketten konnten erste Eigenschaften hiervon herausgestellt werden. Die explizite Konstruktion der \mathbb{F}^X -DS Markovketten zeigte zudem, dass es hinlänglich viele Prozesse gibt, die die in dieser Arbeit definierte bedingte Markoveigenschaft erfüllen.

Im Hauptteil dieser Ausarbeitung erfolgte die Einführung der MRT-Zerlegung im Modellrahmen der Personenversicherung sowie eine Diskussion ihrer Existenz und Eindeutigkeit. Ferner wurde nachgewiesen, dass die MRT-Zerlegung die von Schilling et al. (2017) vorgeschlagenen Kriterien einer *sinnvollen* Risikozerlegung erfüllt. Im Anschluss daran wurde die Berechnung der MRT-Zerlegung sowohl im allgemeinen Fall (X Itô-Prozess) als auch im Markov-Fall (X Diffusionsprozess) thematisiert. Dabei wurden für die jeweiligen Zahlungsströme Lemmata formuliert und bewiesen, welche die Berechnung der MRT-Zerlegung auf die Bestimmung der Martingaldarstellung eines \mathbb{F}^X -Martingals anstelle eines \mathbb{F} -Martingals reduzierten. Auf Basis dieser Hilfsaussagen konnten im Markov-Fall mithilfe von Itô's Lemma explizite Formeln der MRT-Zerlegung hergeleitet werden, deren Anwendbarkeit am Beispiel der privaten Krankenversicherung illustriert wurde. Im allgemeinen Fall stellen die Lemmata die Grundlage dafür dar, die MRT-Zerlegung mithilfe der Clark-Ocone-Formel und dem damit verbundenen Malliavin-Kalkül zu ermitteln.

Da die Einführung des Malliavin-Kalküls im Rahmen dieser Arbeit nicht realisierbar war, ist die Herleitung expliziter Formeln im allgemeinen Fall ein noch ausstehender, aber wichtiger Aspekt, der in anschließenden Arbeiten behandelt werden kann. Ein weiteres Forschungsanliegen fokussiert die getroffenen Modellannahmen. Die Modellierung systematischer Risiken war auf Itô-Prozesse beschränkt. Daher stellt die Herleitung der MRT-Zerlegung unter schwächeren Voraussetzungen ebenfalls ein zukünftiges Forschungsanliegen dar. Im Zuge dessen kann auch eine tiefergehende Analyse der \mathbb{F}^X -DS Markovketten hilfreich sein. Ferner wurden im Rahmen dieser Arbeit keine *Diversifikationseffekte* thematisiert. Bekanntermaßen verschwindet das unsystematische Risiko, das in endlichen Portfolios beobachtbar ist, wenn die Anzahl der Versicherungsnehmer gegen unendlich geht. Entsprechend kann erwartet werden, dass die damit assoziierten Risikofaktoren $\int \psi^{kl} dM^{kl}$ ebenfalls diese Eigenschaft aufweisen. Eine Überprüfung dieser Tatsache ist bislang nur im Lebensversicherungskontext erfolgt und kann somit in weiteren Forschungsarbeiten aufgegriffen werden.

Am Beispiel der privaten Krankenversicherung konnte exemplarisch die im Markov-Fall hergeleitete MRT-Zerlegung berechnet werden. Allerdings war die Modellierung der Zins- und Übergangintensitäten auf Cox-Ingersoll-Ross-Prozesse beschränkt, die aufgrund ihrer affinen Struktur eine analytische Überprüfung der Voraussetzungen von Satz 6.7 ermöglichten. Des

Weiteren wurde der Einfachheit halber auf eine Konkretisierung des Übertragungswertes (z. B. unter Berücksichtigung regulatorischer Vorgaben) verzichtet, da diese eine wechselseitige Abhängigkeit von Rückstellung und Übertragungswert mit sich brächte (vgl. Wallner und Zwiesner, 2010). Die Lösung der daraus resultierenden Integralgleichung erfordert zusätzliche analytische Methoden, die im Umfang dieser Arbeit nicht erarbeitet werden konnten. Daher stellt sich, über das Beispiel der privaten Krankenversicherung hinaus, die Frage nach der Anwendbarkeit unter komplexeren (möglicherweise auch realistischeren) Modellannahmen.

Zu Beginn dieser Arbeit wurde die MRT-Zerlegung durch ihre große praktische Relevanz motiviert. Um jedoch tatsächlich die Einsetzbarkeit in der Praxis gewährleisten zu können, müssen die Grenzen der analytischen Berechnung durch eine adäquate Implementierung numerischer Simulationen überwunden werden, sodass der in der Einleitung dargelegte Nutzen der (zunächst sehr abstrakten) MRT-Zerlegung vollständig entfaltet werden kann. In dieser Arbeit konnte die theoretische Fundierung der MRT-Zerlegung im Modellrahmen der Personenversicherung geschaffen werden. Zugleich zeigt die Vielzahl offener Forschungsanliegen, dass die Anwendungen der MRT-Zerlegung in der Praxis noch eine Konkretisierung relevanter Mehrzustandsmodelle (z. B. private Krankenversicherung, Berufsunfähigkeitsversicherung usw.) unter Hinzunahme numerischer Methoden erfordern.

Literaturverzeichnis

- Andersen, P. K., Borgan, Ø., Gill, R. D. und Keiding, N. (1997). *Statistical Models Based on Counting Processes*. 2. Aufl. New York: Springer.
- Artinger, H. (2010). *Longevity Risk in the Pension Context*. Diplomarbeit. Technische Universität München.
- Becker, T. (2017). *Mathematik der privaten Krankenversicherung*. Wiesbaden: Springer.
- Biagini, F., Rheinländer, T. und Widenmann, J. (2013a). Hedging mortality claims with longevity bonds. In: *ASTIN Bulletin* 43 (2), S. 123–157.
- Biagini, F., Rheinländer, T. und Widenmann, J. (2013b). Intensity-based premium evaluation for unemployment insurance products. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 53 (1), S. 302–316.
- Biagini, F., Rheinländer, T. und Widenmann, J. (2016). Risk minimization for insurance products via \mathbb{F} -doubly stochastic Markov chains. In: *Risks* 4 (3), S. 1–26.
- Bielecki, T. R., Jakubowski, J. und Nieweglowski, M. (2015). *Conditional Markov Chains Revisited. Part I: Construction and Properties*. URL: <https://arxiv.org/pdf/1501.05531.pdf> (besucht am 10.09.2018).
- Bielecki, T. R. und Rutkowski, M. (2000). Multiple ratings model of defaultable term structure. In: *Math. Finance* 10 (2), S. 125–139.
- Bielecki, T. R. und Rutkowski, M. (2002). *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*. Berlin u.a.: Springer.
- Bielecki, T. R. und Rutkowski, M. (2003). Dependent defaults and credit migrations. In: *Applied Mathematics* 30 (2), S. 121–145.
- Bielecki, T. R. und Rutkowski, M. (2004). Modeling of the Defaultable Term Structure: Conditionally Markov Approach. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 49 (3), S. 361–373.
- Björk, T. (2011). *An introduction to point processes from a martingale point of view*. Vorlesungsnote. KTH Royal Institute of Technology.
- Brigo, D. und Mercurio, F. (2007). *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*. 3. Aufl. Berlin u.a.: Springer.
- Buchardt, K. (2014). *Life insurance liabilities with policyholder behaviour and stochastic rates*. Dissertation. Naturwissenschaftliche Fakultät, Universität Kopenhagen.

- Bühlmann, H. (2000). Life Insurance with Stochastic Interest Rates. In: *Financial Risk in Insurance*. Hrsg. von G. Ottaviani. Berlin u.a.: Springer, S. 1–24.
- Christiansen, M. C. (2007). *A joint analysis of financial and biometrical risks in life insurance*. Dissertation. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Universität Rostock.
- Christiansen, M. C. (2012). Multistate models in health insurance. In: *AStA Advances in Statistical Analysis* 96 (2), S. 155–186.
- Christiansen, M. C. (2013). Safety margins for unsystematic biometric risk in life and health insurance. In: *Scandinavian Actuarial Journal* 2013 (4), S. 286–323.
- Christiansen, M. C., Denuit, M., Lucas, N. und Schmidt, J. (2018). Projection models for health expenses. In: *Annals of Actuarial Science* 12 (1), S. 185–203.
- Christiansen, M. C. und Helwich, M. (2008). Some further ideas concerning the interaction between insurance and investment risks. In: *Blätter der DGVFM* 29 (2), S. 253–266.
- Dahl, M. und Møller, T. (2006). Valuation and hedging of life insurance liabilities with systematic mortality risk. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 39 (2), S. 193–217.
- Di Nunno, G., Øksendal, B. und Proske, F. (2009). *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance*. Berlin u.a.: Springer.
- Doob, J. L. (1953). *Stochastic Processes*. New York u.a.: John Wiley & Sons, Inc.
- Eberlein, E. und Grbac, Z. (2013). Rating based Lévy Libor model. In: *Math. Finance* 23 (4), S. 591–626.
- Eberlein E. und Özkan, F. (2003). The defaultable Lévy term structure: ratings and restructuring. In: *Math. Finance* 13 (2), S. 277–300.
- Fischer, T. (2004). *On the decomposition of risk in life insurance*. Arbeitspapier. Technische Universität Darmstadt.
- Gatzert, N. und Wesker, H. (2014). Mortality risk and its effect on shortfall and risk management in life insurance. In: *Journal of Risk and Insurance* 81 (1), S. 57–90.
- Gill, R. und Johansen, S. (1990). A survey of product-integration with a view toward application in survival analysis. In: *The Annals of Statistics* 18 (4), S. 1501–1555.
- Jakubowski, J. und Nieweglowski, M. (2008). Pricing bonds and CDS in the model with rating migration induced by Cox process. In: *Advances in Mathematics of Finance*. Hrsg. von L. Stettner. Banach Center Publications 83, S. 159–182.

- Jakubowski, J. und Niewegłowski, M. (2010). A class of \mathbb{F} -doubly stochastic Markov chains. In: *Electronic Journal of Probability* 15 (56), S. 1743–1771.
- Karabey, U., Kleinow, T. und Cairns, A. J. (2014). Factor risk quantification in annuity models. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 58, S. 34–45.
- Klenke, A. (2013). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 3. Aufl. Berlin u.a.: Springer.
- Lang, W., Wenzel, W. und Zaikin, A. (2008). *Inhalt der Saalübung 10 vom Montag, den 30. Juni 2008*. URL: <https://www.itp.kit.edu/~wl/MGPh08pub/MGPh08Saa110.pdf> (besucht am 20.09.2018).
- Martin, R. und Tasche, D. (2007). Shortfall: A tail of two parts. In: *Risk* 2007 (2), S. 84–89.
- Meyer, M. (2001). *Continuous Stochastic Calculus with Applications to Finance*. Boca Raton u.a.: Chapman & Hall/CRC.
- Milbrodt, H. und Helbig, M. (1999). *Mathematische Methoden der Personenversicherung*. Berlin u.a.: de Gruyter.
- Milbrodt, H. und Röhrs, V. (2016). *Aktuarielle Methoden der deutschen privaten Krankenversicherung*. 2. Aufl. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft.
- Nualart, D. (2006). *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Berlin u.a.: Springer.
- Øksendal, B. (2013). *Stochastic Differential Equations*. 6. Aufl. Heidelberg u.a.: Springer.
- Pfeifer, D. (2006). *Risikomanagement und Solvency II bei Versicherungsunternehmen*. URL: https://www.risknet.de/uploads/tx_bxlibrary/KPMG-Risikomanagement-solvencyII.pdf (besucht am 07.09.2018).
- Protter, P. E. (2005). *Stochastic Integration and Differential Equations*. 2. Aufl. Version 2.1. Berlin u.a.: Springer.
- Rosen, D. und Saunders, D. (2010). Risk factor contributions in portfolio credit risk models. In: *Journal of Banking & Finance* 34 (2), S. 336–349.
- Schilling, K., Bauer, D., Christiansen, M. C. und Kling, A. (2017). *Decomposing life insurance liabilities into risk factors*. Arbeitspapier. Stand: 15.09.2017. Universität Ulm, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften.
- Schilling, R. L. (2017). *Measures, Integrals and Martingales*. 2. Aufl. Cambridge u.a.: Cambridge University Press.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. New York: Springer.

Wallner, A. und Zwiesler, H. (2010). Die Kalkulation von PKV-Tarifen unter Einbeziehung des Übertragungswertes. In: *Blätter der DGVM* 31 (2), S. 307–317.

Anhang

A.1 Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsraums

Wie im gesamten Kapitel 3 bezeichne $X = (X(t))_{t \geq 0}$, $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathfrak{X})$ einen stetigen Prozess, dessen Bildraum durch $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{[0, \infty)}$ und $\mathfrak{X} := \mathcal{X} \cap (\mathcal{B}(\mathbb{R}))^{[0, \infty)}$ definiert ist. Es sei $\Lambda = (\Lambda(t))_{t \geq 0} = ((\lambda^{kl}(t))_{k, l \in \mathcal{S}})_{t \geq 0}$ ein \mathbb{F}^X -adaptierter, matrixwertiger Prozess, der die Bedingungen (3.7) und (3.8) erfüllt, sowie $f: [0, \infty] \times \mathcal{X} \rightarrow (L, \mathfrak{L})$ eine produktmessbare Abbildung mit $\Lambda(t) = f(t, X|_{[0, t]})$, $t \geq 0$. Zur besseren Übersichtlichkeit zeigen wir zunächst nur, dass es eine \mathbb{F}^X -DS Markovkette mit Intensitätsprozess Λ gibt, welche die Gleichung (3.17) erfüllt. Anschließend begründen wir, wie die Konstruktion auf beliebiges $m \in \mathbb{N}$, insbesondere unter Berücksichtigung der bedingten Unabhängigkeit gegeben \mathcal{F}_∞^X , übertragen werden kann. Die grundlegenden Ideen und technischen Herleitungen der Konstruktion entstammen dem Abschnitt 1.3 von Christiansen (2007).

Es bezeichne im Folgenden $\Lambda^x(t) := f(t, x|_{[0, t]})$ die zum Pfad $X = x$ korrespondierende Intensitätsmatrix. Nach Milbrodt und Helbig (1999, Theorem 4.35) existiert für jedes $x \in \mathcal{X}$ zu vorgegebener Startverteilung $\pi = \mathcal{L}(Z^x(0)|\mathbb{P})$ eine Markovkette

$$(Z^x(t))_{t \geq 0}: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{Z}, \mathfrak{Z}).$$

Hierbei sei $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{S}^{[0, \infty)}$ eine Menge von càdlàg-Pfaden, welche unabhängig vom Pfad $x \in \mathcal{X}$ ist, und $\mathfrak{Z} := \mathcal{Z} \cap (2^{\mathcal{S}})^{[0, \infty)}$ die zugehörige σ -Algebra. Für eine beliebige, aber feste Startverteilung π definieren wir

$$K(x, \cdot) := \mathcal{L}((Z^x(t))|\mathbb{P}), \quad x \in \mathcal{X}. \quad (\text{A.1})$$

Proposition A.1.1. *Die Abbildung $K: \mathcal{X} \times \mathfrak{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, A) \mapsto K(x, A)$ ist ein Markov-Kern von $(\mathcal{X}, \mathfrak{X})$ nach $(\mathcal{Z}, \mathfrak{Z})$.*

Der Beweis kann analog zu Christiansen (2007, Prop. 1.3.2) geführt werden. Mithilfe dieser Proposition können wir jetzt den Wahrscheinlichkeitsraum konstruieren.

Satz A.1.2. *Es gibt einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ und stochastische Prozesse $(\tilde{X}(t))_{t \geq 0}: (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathfrak{X})$, $(\tilde{\Lambda}(t))_{t \geq 0}: (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow (L, \mathfrak{L})$ sowie $(\tilde{Z}(t))_{t \geq 0}: (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow (\mathcal{Z}, \mathfrak{Z})$, sodass $\mathcal{L}((\tilde{X}(t))|\tilde{\mathbb{P}}) = \mathcal{L}((X(t))|\mathbb{P})$ und $\mathcal{L}((\tilde{\Lambda}(t))|\tilde{\mathbb{P}}) = \mathcal{L}((\Lambda(t))|\mathbb{P})$ gilt. Ferner ist*

$$\tilde{\mathbb{P}}((\tilde{Z}(t)) \in \cdot | \tilde{X} = x) = \mathcal{L}((Z^x(t))|\mathbb{P}), \quad x \in \mathcal{X}.$$

Beweis. Wir definieren zunächst den Messraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ durch $\tilde{\Omega} := \Omega \times \mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \otimes \mathfrak{Z}$. Desweiteren definieren wir für $\tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ die stochastischen Prozesse $(\tilde{X}(t))_{t \geq 0}$ und $(\tilde{Z}(t))_{0 \leq t \leq T}$

durch

$$\tilde{X}(t, \tilde{\omega}) := X(t, \omega_1), \quad t \geq 0,$$

$$\tilde{Z}(t, \tilde{\omega}) := \omega_2(t), \quad t \geq 0.$$

Mithilfe von Proposition A.1.1 können wir $\tilde{\mathbb{P}}$ definieren als

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) := \iint \mathbb{1}_{(\omega_1, \omega_2) \in A} K(X(\omega_1), d\omega_2) \mathbb{P}(d\omega_1).$$

Dann ist $0 = \tilde{P}(\emptyset) \leq \tilde{P}(A) \leq \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\Omega}) = \tilde{\mathbb{P}}(\Omega \times \mathcal{Z}) = 1$ und mit dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \iint \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(\omega_1, \omega_2) \in A_n} K(X(\omega_1), d\omega_2) \mathbb{P}(d\omega_1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \iint \mathbb{1}_{(\omega_1, \omega_2) \in A_n} K(X(\omega_1), d\omega_2) \mathbb{P}(d\omega_1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathbb{P}}(A_n) \end{aligned}$$

für alle Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ paarweise disjunkter Mengen. Also ist $\tilde{\mathbb{P}}$ tatsächlich ein Maß. Wegen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X}(t) \in A) &= \iint \mathbb{1}_{(\omega_1, \omega_2) \in \{X(t) \in A\} \times \mathcal{Z}} K(X(\omega_1), d\omega_2) \mathbb{P}(d\omega_1) \\ &= \int_{\{X(t) \in A\}} \mathbb{P}(d\omega_1) = \mathbb{P}(X(t) \in A), \quad A \in \mathfrak{X} \end{aligned}$$

ist $\mathcal{L}(\tilde{X}(t)|\tilde{\mathbb{P}}) = \mathcal{L}(X(t)|\mathbb{P})$. Über die Setzung $\tilde{\Lambda}(t) := f(t, \tilde{X}|_{[0,t]})$ erhalten wir den auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ definierten Intensitätsprozess, für den offenbar $\mathcal{L}(\tilde{\Lambda}(t)|\tilde{\mathbb{P}}) = \mathcal{L}(\Lambda(t)|\mathbb{P})$ gilt.

Für den letzten Teil des Satzes zeigen wir, dass für jedes $A \in \mathfrak{Z}$ die Abbildung $\tilde{\omega} \mapsto K(\tilde{X}(\tilde{\omega}), A)$ eine Version der bedingten Verteilung $\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z} \in A | \tilde{X})$ ist, indem wir die Radon-Nikodym-Gleichung nachrechnen. Für $B \in \mathfrak{X}$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}(\{\tilde{Z} \in A\} \cap \{\tilde{X} \in B\}) &= \tilde{\mathbb{P}}(\{X \in B\} \times A) = \iint \mathbb{1}_{(\omega_1, \omega_2) \in \{X \in B\} \times A} K(X(\omega_1), d\omega_2) \mathbb{P}(d\omega_1) \\ &= \int_{\{X \in B\}} K(X(\omega_1), A) \mathbb{P}(d\omega_1) = \int_B K(x, A) \mathbb{P}_X(dx) = \int_B K(x, A) \tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{X}}(dx) \\ &= \int_{\{\tilde{X} \in B\}} K(\tilde{X}(\tilde{\omega}), A) \tilde{\mathbb{P}}(d\tilde{\omega}). \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition von K (vgl. (A.1)) gilt also für die faktorisierte bedingte Verteilung

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z} \in \cdot | \tilde{X} = x) = K(x, \cdot) = \mathcal{L}(Z^x(t)|\mathbb{P}), \quad x \in \mathcal{X},$$

womit die Behauptung folgt. \square

Nach Satz 3.6 existiert zum Intensitätsprozess Λ eine eindeutig bestimmte Familie von stochastischen Matrizen $P = (P(s, t))_{s, t}$, die den Kolmogorovschen Rückwärtsgleichungen (3.9) sowie den Kolmogorovschen Vorwärtsgleichungen (3.10) genügt. Nach Milbrodt und Helbig

(1999, Satz 4.52) stimmt P pfadweise mit den Übergangsmatrizen der Markovketten Z^x , $x \in \mathcal{X}$ überein. Insbesondere gilt (aufgrund der Produktintegraldarstellung), dass $P(s, t)$ \mathcal{F}_t^X -messbar und $P(s, \cdot)$ \mathbb{F}^X -progressiv messbar ist. Folglich ist der Prozess \tilde{Z} gemäß Definition 3.2 eine \mathbb{F}^X -DS Markovkette mit Intensitätsprozess Λ . Abschließend zeigen wir, dass im Rahmen der Konstruktion von Satz A.1.2 die Gleichung (3.17) gilt. Dafür bezeichnen wir entsprechend der Definition 3.2 mit $p_{kB}(s, t, x) = \tilde{\mathbb{P}}(Z^x(t) \in B | Z^x(s) = k)$, $k \in \mathcal{S}$, $B \subseteq \mathcal{S}$ die Übergangswahrscheinlichkeiten von Z^x .

Korollar A.1.3. *Unter den Bedingungen von Satz A.1.2 gilt*

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z}(t_n) \in B | \tilde{Z}(t_{n-1}) = \cdot, \dots, \tilde{Z}(t_0) = \cdot, \tilde{X} = \star) = \mathbb{P}(Z^*(t_n) \in B | Z^*(t_{n-1}) = \cdot, \dots, Z^*(t_0) = \cdot)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n < \infty$ und $B \subseteq \mathcal{S}$. Insbesondere ist

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z}(t_n) \in B | \tilde{Z}(t_{n-1}), \dots, \tilde{Z}(t_0), \mathcal{F}_\infty^{\tilde{X}}) = \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z}(t_n) \in B | \tilde{Z}(t_{n-1}), \mathcal{F}_\infty^{\tilde{X}}) \quad (\text{A.2})$$

sowie

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z}(t) \in B | \mathcal{F}_s^{\tilde{Z}} \vee \mathcal{F}_\infty^{\tilde{X}}) = \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z}(t) \in B | \tilde{Z}(s), \mathcal{F}_\infty^{\tilde{X}}), \quad s \leq t, \quad (\text{A.3})$$

und es gilt (3.17), d. h.

$$\mathbb{P}(\tilde{Z}(t) = l | \mathcal{F}_s^{\tilde{Z}} \vee \mathcal{F}_s^{\tilde{X}}, \tilde{Z}(s) = k) = \mathbb{P}(\tilde{Z}(t) = l | \mathcal{F}_s^{\tilde{Z}}, \tilde{Z}(s) = k) = p_{kl}(s, t), \quad s \leq t.$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass für die faktorisierten bedingten Verteilungen

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z}(t_n) \in B | \tilde{Z}(t_{n-1}) = \cdot, \dots, \tilde{Z}(t_0) = \cdot, \tilde{X} = \star) = \mathbb{P}(Z^*(t_n) \in B | Z^*(t_{n-1}) = \cdot, \dots, Z^*(t_0) = \cdot) \quad (\text{A.4})$$

gilt. Mit der Markoveigenschaft von Z^x , $x \in \mathcal{X}$ erhalten wir für die rechte Seite

$$\mathbb{P}(Z^*(t_n) \in B | Z^*(t_{n-1}) = \cdot, \dots, Z^*(t_0) = \cdot) = \mathbb{P}(Z^*(t_n) \in B | Z^*(t_{n-1}) = \cdot) = p_{\cdot B}(t_{n-1}, t_n, \star).$$

Es ist also zu zeigen, dass

$$(e_0, \dots, e_{n-1}, x) \mapsto p_{e_{n-1}B}(t_{n-1}, t_n, x)$$

die Radon-Nikodym-Gleichung für $\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z}(t_n) \in B | \tilde{Z}(t_{n-1}) = \cdot, \dots, \tilde{Z}(t_0) = \cdot, \tilde{X} = \star)$ erfüllt. Für $e := (e_0, \dots, e_{n-1})$ erhalten wir mit Bemerkung (c) von Milbrodt und Helbig (1999, S. 152)

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z}(t_n) \in B, \tilde{Z}(t_{n-1}) \in A_{n-1}, \dots, \tilde{Z}(t_0) \in A_0, \tilde{X} \in C) \\ &= \int_C \tilde{\mathbb{P}}((\tilde{Z}(t_n) \in B, \tilde{Z}(t_{n-1}) \in A_{n-1}, \dots, \tilde{Z}(t_0) \in A_0 | \tilde{X} = x) \tilde{\mathbb{P}}^{\tilde{X}}(dx) \\ &= \int_C \mathbb{P}(Z^x(t_n) \in B, Z^x(t_{n-1}) \in A_{n-1}, \dots, Z^x(t_0) \in A_0) \tilde{\mathbb{P}}^{\tilde{X}}(dx) \\ &= \int_C \int_{A_0} \dots \int_{A_{n-1}} p_{e_{n-1}B}(t_{n-1}, t_n, x) p_{e_{n-2}e_{n-1}}(t_{n-2}, t_{n-1}, x) \dots p_{e_0e_1}(t_0, t_1, x) \mathbb{P}^{Z^x(t_0)}(de_0) \mathbb{P}^X(dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_C \int_{A_0 \times \dots \times A_{n-1}} p_{e_{n-1}B}(t_{n-1}, t_n, x) \mathbb{P}^{(Z^x(t_0), \dots, Z^x(t_{n-1}))}(de) \tilde{\mathbb{P}}^{\tilde{X}}(dx) \\
 &= \int_{A_0 \times \dots \times A_{n-1} \times C} p_{e_{n-1}B}(t_{n-1}, t_n, x) \tilde{\mathbb{P}}^{(\tilde{Z}(t_0), \dots, \tilde{Z}(t_{n-1}), \tilde{X})}(d(e, x)).
 \end{aligned}$$

Somit haben wir (A.4) bewiesen. Aus der Markoveigenschaft von Z^x , $x \in \mathcal{X}$ folgt direkt (A.2). Nach Doob (1953, S. 81) genügt es für (A.3), die Gültigkeit der Gleichung

$$\begin{aligned}
 &\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z}(t_n) \in B, \tilde{Z}(t_{n-1}) \in A_{n-1}, \dots, \tilde{Z}(t_0) \in A_0, \tilde{X} \in C) \\
 &= \int_{A_0 \times \dots \times A_{n-1} \times C} p_{e_{n-1}B}(t_{n-1}, t_n, x) \tilde{\mathbb{P}}^{(\tilde{Z}(t_0), \dots, \tilde{Z}(t_{n-1}), \tilde{X})}(d(e, x)),
 \end{aligned}$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n < \infty$ festzustellen. Also folgt aus obigen Rechnungen auch bereits der dritte der Behauptung. Nun zum letzten Teil: Die erste Gleichheit folgt direkt aus (A.2). Außerdem haben wir oben gesehen, dass $(k, x) \mapsto p_{kl}(s, t, x)$ einen Markovkern der bedingten Verteilung $\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z}(t) = l | \tilde{X} = \star, \tilde{Z}(s) = \cdot)$ definiert, d. h. es ist

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z}(t) = l | \mathcal{F}_\infty^{\tilde{X}}, \tilde{Z}(s) = k) = p_{kl}(s, t, \tilde{X}), \quad k \in \mathcal{S}.$$

Insbesondere sei an dieser Stelle betont, dass aufgrund unserer Konstruktion die teilfaktorisierte bedingte Verteilung $\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{Z}(t) = l | \mathcal{F}_\infty^{\tilde{X}}, \tilde{Z}(s) = k)$ auf $\tilde{\Omega}$ (und nicht nur auf der Teilmenge $\{\tilde{Z}(s) = k\}$) sinnvoll definiert ist, da beide Seite nur noch von \tilde{X} und somit nur vom ersten Argument von $\tilde{\Omega}$ abhängen. Mit der Definition vom Prozess der bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten (vgl. Definition 3.2) folgt die Behauptung. \square

Bemerkung A.1.4. Für die Konstruktion von m \mathcal{F}_∞^X -bedingt unabhängigen \mathbb{F}^X -Markovketten definieren wir einen Markovkern \tilde{K} von $(\mathcal{X}, \mathfrak{X})$ nach $(\times_{i=1}^m \mathcal{Z}, \otimes_{i=1}^m \mathfrak{Z})$ durch

$$\tilde{K}(x, A_1 \times \dots \times A_m) := \prod_{i=1}^m K(x, A_i), \quad A_1, \dots, A_m \in \mathfrak{Z}.$$

Da $\{A_1 \times \dots \times A_m : A_1, \dots, A_m \in \mathfrak{Z}\}$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $\otimes_{i=1}^m \mathfrak{Z}$ ist, ist nach dem Maßeindeutigkeitssatz das Produktmaß und folglich auch der Markovkern eindeutig bestimmt. Dass es sich hierbei tatsächlich um einen Markovkern handelt, d. h. $\tilde{K}(\cdot, A_1, \dots, A_m)$ für beliebige $A_i \in \mathfrak{Z}$ auch $(\mathcal{X}, \mathfrak{X}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbar ist, folgt aus der Messbarkeit der Faktoren. Ersetzen wir im Beweis von Satz A.1.2 jeweils \mathcal{Z} durch $\times_{i=1}^m \mathcal{Z}$ und \mathfrak{Z} durch $\otimes_{i=1}^m \mathfrak{Z}$ sowie K durch \tilde{K} , so erhalten wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit einer analogen Konstruktion \mathcal{F}_∞^X -bedingt unabhängige \mathbb{F}^X -DS Markovketten Z_i , $i = 1, \dots, m$.

A.2 Sprungwahrscheinlichkeiten und Intensitäten

Satz A.2.1. Für eine \mathbb{F}^X -DS Markovkette Z mit stetigem Intensitätsprozess Λ gilt

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \exists t \in [0, T] : \Delta H^{kl}(t) > 0 \text{ und } \lambda^{kl}(t) = 0\}) = 0, \quad (k, l) \in \mathcal{J}.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst einen Pfad $X = x$ und bezeichnen mit λ_x^{kl} die zugehörige Intensität der Markovkette Z^x , für die $\mathbb{P}((Z(t)) \in \cdot | X = x) = \mathcal{L}((Z^x(t)) | \mathbb{P})$ gilt. Da λ_x^{kl} nach Voraussetzung stetige Pfad hat, lässt sich die Nullstellenmenge I_x als abzählbare Vereinigung disjunkter abgeschlossener Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ schreiben (hierbei lassen wir $a_n = b_n$ zu, um auch isolierte Punkte zu berücksichtigen), d. h.

$$I_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Seien τ_k , $k \in \mathbb{N}$ die Sprungzeiten von Z^x (vgl. (3.24)). Mit Milbrodt und Helbig (1999, S. 179) und der starken Markoveigenschaft (ebd., Satz 4.27) erhalten wir für jedes $x \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \exists t \in [0, T] : \Delta H^{kl}(t) > 0 \text{ und } \lambda^{kl}(t) = 0\} | X = x) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \exists t \in [0, T] : \Delta H_x^{kl}(t) > 0 \text{ und } \lambda_x^{kl}(t) = 0\}) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k, n \in \mathbb{N}} \{\tau_{k,x} \in I_{n,x}, \Delta H_x^{kl}(\tau_k) > 0\}\right) = 0. \end{aligned}$$

Da $x \in \mathcal{X}$ beliebig war, gilt daher auch

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \exists t \in [0, T] : \Delta H^{kl}(t) > 0 \text{ und } \lambda^{kl}(t) = 0\}) \\ &= E^{\mathbb{P}}(\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \exists t \in [0, T] : \Delta H^{kl}(t) > 0 \text{ und } \lambda^{kl}(t) = 0\} | \mathcal{F}_T^X)) = 0, \end{aligned}$$

womit die Behauptung folgt. □

Korollar A.2.2. Für zwei unabhängige Markovketten Z_1 und Z_2 mit (deterministischem) stetigem Intensitätsprozess Λ und zugehörigen Sprungzeiten τ_k, σ_j , $k, j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}(\{\tau_k = \sigma_j\}) = \mathbb{P}\left(\left\{\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \lambda^{Z_1(\tau_{k-1})}(u) du = \int_{\tau_{k-1}}^{\sigma_j} \lambda^{Z_1(\tau_{k-1})}(u) du\right\}\right)$$

Beweis. Die Inklusion \subseteq ist offensichtlich wahr. Umgekehrt genügt es zu zeigen, dass $M := \{\tau_k > \sigma_j\} \cap \left\{\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \lambda^{Z_1(\tau_{k-1})}(u) du = \int_{\tau_{k-1}}^{\sigma_j} \lambda^{Z_1(\tau_{k-1})}(u) du\right\}$ eine \mathbb{P} -Nullmenge ist (der Fall $\tau_k < \sigma_j$ verläuft analog). Mit der Nichtnegativität der Intensitäten und Satz A.2.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}\left(\{\tau_k > \sigma_j\} \cap \left\{\int_{\sigma_j}^{\tau_k} \lambda^{Z_1(\tau_{k-1})}(u) du = 0\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}(\{\tau_k > \sigma_j\} \cap \{\lambda^{Z_1(\tau_{k-1})l}(u) = 0 \text{ für alle } u \in [\sigma_j, \tau_k] \text{ und } l \in \mathcal{S}\}) \\ &\leq \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \exists t \in [0, T] : \sum_{l \in \mathcal{S} \setminus \{Z_1(\tau_{k-1})\}} \Delta H_1^{Z_1(\tau_{k-1})l}(t) > 0 \text{ und } \lambda^{Z_1(\tau_{k-1})l}(t) = 0, l \in \mathcal{S}\}) \\ &\leq \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \exists t \in [0, T] : \Delta H_1^{kl}(t) > 0 \text{ und } \lambda^{kl}(t) = 0\}) = 0. \end{aligned}$$

□

A.3 Bedingte Unabhängigkeit und bedingte Erwartungswerte

Satz A.3.1. Sei ζ eine \mathcal{F}_T^X -messbare und integrierbare Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Unter den in Abschnitt 5.1 beschriebenen Voraussetzungen gilt

$$E^{\mathbb{P}}(\zeta \mathbb{1}_{Z_i \in B} | \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^Z) = E^{\mathbb{P}}(\zeta \mathbb{1}_{Z_i \in B} | \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^{Z_i})$$

für $i \in 1, \dots, m$, $t \in [0, T]$ und $B \subseteq \mathcal{S}^{[0, T]}$.

Beweis. O. E. sei $i = 1$ und $m = 2$. Nach Doob (1953, S. 19) genügt es, die Aussage für die Randverteilungen zu zeigen, d. h.

$$E^{\mathbb{P}}(\zeta \mathbb{1}_{Z_1 \in B} | \mathcal{F}_t^X, Z_1(t_1), \dots, Z_1(t_n), Z_2(t_1), \dots, Z_2(t_n)) = E^{\mathbb{P}}(\zeta \mathbb{1}_{Z_1 \in B} | \mathcal{F}_t^X, Z_1(t_1), \dots, Z_1(t_n)).$$

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir $Z^n := (Z_1(t_1), \dots, Z_1(t_n), Z_2(t_1), \dots, Z_2(t_n))$ und $Z_1^n := (Z_1(t_1), \dots, Z_1(t_n))$. Ferner definieren wir $0/0 := 0$. Im ersten Schritt zeigen wir die Gleichheit

$$E^{\mathbb{P}}(\zeta \mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} | \mathcal{F}_t^X, Z^n) = \sum_{z=(z_1, z_2) \in \mathcal{S}^{2n}} \mathbb{1}_{\{\mathbb{P}(Z^n=z | \mathcal{F}_t^X) > 0\}} \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} \frac{E^{\mathbb{P}}(\zeta \mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_t^X)}{\mathbb{P}(Z^n=z | \mathcal{F}_t^X)}, \quad (\text{A.5})$$

indem wir die Radon-Nikodym-Gleichung nachrechnen. Offenbar existiert für jedes $A \in \mathcal{F}_t^X \vee \sigma(Z)$ eine Menge $A_1 \in \mathcal{F}_t^X$, sodass $\{Z^n = z\} \cap A_1 = \{Z^n = z\} \cap A$ gilt (falls $\{Z^n = z\} \cap A = \emptyset$, setze $A_1 = \emptyset$). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & E^{\mathbb{P}} \left(\mathbb{1}_A \sum_{z \in \mathcal{S}^{2n}} \mathbb{1}_{\{\mathbb{P}(Z^n=z | \mathcal{F}_t^X) > 0\}} \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} \frac{E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} \zeta \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_t^X)}{E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_t^X)} \right) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{S}^{2n}} E^{\mathbb{P}} \left(E^{\mathbb{P}} \left(\mathbb{1}_{\{\mathbb{P}(Z^n=z | \mathcal{F}_t^X) > 0\}} \mathbb{1}_{A_1 \cap \{Z^n=z\}} \frac{E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} \zeta \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_t^X)}{E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_t^X)} \middle| \mathcal{F}_t^X \right) \right) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{S}^{2n}} E^{\mathbb{P}} \left(\mathbb{1}_{A_1} \mathbb{1}_{\{\mathbb{P}(Z^n=z | \mathcal{F}_t^X) > 0\}} \frac{E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} \zeta \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_t^X)}{E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_t^X)} E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_t^X) \right) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{S}^{2n}} E^{\mathbb{P}} \left(\mathbb{1}_{A_1} \frac{E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} \zeta \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_t^X)}{E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_t^X)} E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_t^X) \right) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{S}^{2n}} E^{\mathbb{P}} \left(E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{A_1} \mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} \zeta \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_t^X) \right) \\ &= E^{\mathbb{P}} \left(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} \zeta \sum_{z \in \mathcal{S}^{2n}} \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} \right) \\ &= E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_A \zeta \mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}}), \end{aligned}$$

also gilt (A.5). Gemeinsam mit der bedingten Unabhängigkeit von Z_1 und Z_2 (gegeben \mathcal{F}_T^X) sowie der Gleichung (3.5) folgt

$$E^{\mathbb{P}}(\zeta \mathbb{1}_{\{Z_1(S) \in B\}} | \mathcal{F}_t^X, Z^n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{z=(z_1, z_2) \in \mathcal{S}^{2n}} \mathbb{1}_{\{\mathbb{P}(Z^n=z|\mathcal{F}_t^X) > 0\}} \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} \frac{E^{\mathbb{P}}(\zeta \mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_t^X)}{\mathbb{P}(Z^n=z | \mathcal{F}_t^X)} \\
&= \sum_{z \in \mathcal{S}^{2n}} \mathbb{1}_{\{\mathbb{P}(Z^n=z|\mathcal{F}_t^X) > 0\}} \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} \frac{E^{\mathbb{P}}(\zeta E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} | \mathcal{F}_T^X) | \mathcal{F}_t^X)}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbb{P}(Z=z | \mathcal{F}_T^X) | \mathcal{F}_t^X)} \\
&= \sum_{z=(z_1, z_2) \in \mathcal{S}^{2n}} \mathbb{1}_{\{\mathbb{P}(Z^n=z|\mathcal{F}_t^X) > 0\}} \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} \frac{E^{\mathbb{P}}(\zeta E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} \mathbb{1}_{\{Z_1^n=z_1\}} | \mathcal{F}_T^X) E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z_2^n=z_2\}} | \mathcal{F}_T^X) | \mathcal{F}_t^X)}{E^{\mathbb{P}}(E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z_1^n=z_1\}} | \mathcal{F}_T^X) E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z_2^n=z_2\}} | \mathcal{F}_T^X) | \mathcal{F}_t^X)} \\
&= \sum_{z=(z_1, z_2) \in \mathcal{S}^{2n}} \mathbb{1}_{\{\mathbb{P}(Z_1^n=z_1|\mathcal{F}_t^X) > 0\}} \mathbb{1}_{\{Z^n=z\}} \frac{E^{\mathbb{P}}(\zeta E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} \mathbb{1}_{\{Z_1^n=z_1\}} | \mathcal{F}_T^X) E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z_2^n=z_2\}} | \mathcal{F}_T^X) | \mathcal{F}_t^X)}{E^{\mathbb{P}}(E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z_1^n=z_1\}} | \mathcal{F}_T^X) E^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{Z_2^n=z_2\}} | \mathcal{F}_T^X) | \mathcal{F}_t^X)} \\
&= \sum_{z_1 \in \mathcal{S}^n} \mathbb{1}_{\{\mathbb{P}(Z_1^n=z_1|\mathcal{F}_t^X) > 0\}} \mathbb{1}_{\{Z_1^n=z_1\}} \frac{E^{\mathbb{P}}(\zeta \mathbb{1}_{\{Z_1 \in B\}} \mathbb{1}_{\{Z_1^n=z_1\}} | \mathcal{F}_t^X)}{\mathbb{P}(Z_1^n=z_1 | \mathcal{F}_t^X)} \\
&= E^{\mathbb{P}}(\zeta \mathbb{1}_{Z_1 \in B} | \mathcal{F}_t^X, Z_1^n),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit in Analogie zu (A.5) mithilfe der Radon-Nikodym-Gleichung nachgewiesen werden kann. Also folgt die Behauptung. \square