Mathematik-Wettbewerb

Tag der Mathematik 2022

mögliche Lösungswege

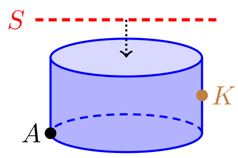
Aufgabe 1: (10 Punkte)

Eine **A**meise sitzt auf dem Tisch, direkt neben einer offenen, runden Keksdose mit Höhe $H = 8$ cm und Umfang $U = 60$ cm. Helfen Sie ihr, den kürzesten Weg zum letzten verbleibenden **K**ekskrümel zu finden, der sich gegenüber in halber Höhe befindet,

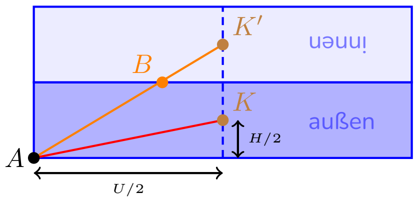
(a) wenn der Krümel auf der Außenseite der Dose ist,

(b) wenn er auf der Innenseite ist.

(c) Würde es ihr helfen, wenn Sie den **S**trohhalm auf die Dose legen?



Lösung:



(a) Nach Abrollen des Dosenmantels entspricht der kürzeste Weg der Verbindungsstrecke AK (wegen der Symmetrie ist es egal, ob die Ameise links oder rechts herum läuft).

(b) Um den Krümel K' auf der Innenseite zu erwischen, klappen wir diese nach oben und sehen, dass nun AK' der kürzeste Weg ist, wobei die Ameise die Strecke BK' auf der Innenseite nach unten läuft.

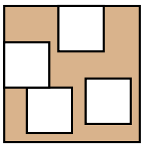
(c) Nach Pythagoras gilt für die Weglängen in (a) und (b)

$$L_{AK} = \sqrt{\left(\tfrac{H}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{U}{2}\right)^2} \approx 30 \text{ cm} \quad , \quad L_{AK'} = \sqrt{\left(\tfrac{3H}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{U}{2}\right)^2} \approx 32 \text{ cm}$$

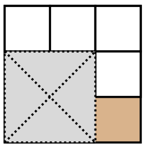
Der Weg nach oben - über Strohhalm (Durchmesser der Dose) - nach unten hat in beiden Fällen die Länge $L = H + \frac{U}{\pi} + \frac{H}{2} \approx 31$ cm, hilft also nur im Fall (b).

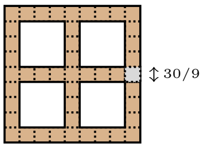
Aufgabe 2: (10 Punkte)

Eva schneidet für sich und ihre Freundinnen vier 10 cm $\times$ 10 cm große Stücke an beliebigen Stellen eines 30 cm $\times$ 30 cm Apfelkuchens heraus. Auch ihr kleiner Bruder möchte ein möglichst großes quadratisches Stück haben. Wie groß ist es jeweils im besten bzw. im schlimmsten Fall für ihn? (Seiten der Stücke parallel zum Kuchenrand)



Lösung:





Im besten Fall ist sein Kuchenstück 20 cm $\times$ 20 cm groß, denn sonst wären zum Rand hin weniger als 10 cm übrig, und Eva hätte kein 10 cm $\times$ 10 cm Stück nehmen können. Im schlimmsten Fall ist es nur $\frac{30}{9}$ cm $\times$ $\frac{30}{9}$ cm groß. Kleiner kann es glücklicherweise nicht werden, denn bei gedachter Unterteilung des Kuchens in $9 \cdot 9 = 81$ gleichgroße Stücke berühren Eva's Stücke davon höchstens $4 \cdot (4 \cdot 4) = 64$, es bleibt also mindestens ein ganzes davon übrig.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Zur schnellen Kontrolle der korrekten Eingabe einer ISBN-13 Nummer mit den Ziffern $z_1, \ldots, z_{13}$ wird geprüft, ob die Summe

$$S = (z_1 + z_3 + z_5 + z_7 + z_9 + z_{11} + z_{13}) + 3 \cdot (z_2 + z_4 + z_6 + z_8 + z_{10} + z_{12})$$

durch 10 teilbar ist. Hilft dies in folgenden Fällen?

(a) Nur eine Ziffer wurde falsch eingegeben.

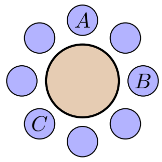
(b) Nur zwei direkt benachbarte Ziffern wurden vertauscht.

Lösung: (a) Hier hilft es immer. Denn falls eine Ziffer mit ungeradem Index falsch eingegeben wurde, z.B. als $\tilde{z}_1 \neq z_1$, so kann die entsprechende Summe $\tilde{S}$ nicht auch durch 10 teilbar sein, sonst wäre auch die Differenz $S - \tilde{S}$ durch 10 teilbar, aber es gilt $S - \tilde{S} = z_1 - \tilde{z}_1 \in \{\pm 1, \ldots, \pm 9\}$. Auch bei geradem Index, z.B. $\tilde{z}_2 \neq z_2$, ist die Differenz $S - \tilde{S} = 3 \cdot (z_2 - \tilde{z}_2) \in \{\pm 3, \pm 6, \ldots, \pm 27\}$ nicht durch 10 teilbar.

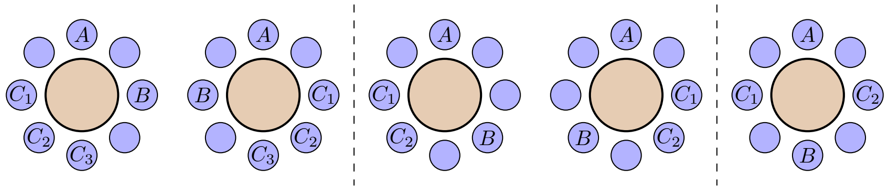
(b) Hier hilft es leider nicht immer, denn z.B. beim Vertauschen von z_1 mit z_2 kann die Differenz $S - \tilde{S} = z_1 - z_2 + 3 \cdot (z_2 - z_1) = 2 \cdot (z_2 - z_1)$ durch 10 teilbar sein, falls $z_2 - z_1 = \pm 5$ ist. In der Tat gilt z.B. $S(978\,\underline{05}\,53103540) = 90$ und $\tilde{S}(978\,\underline{50}\,53103540) = 100$.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Beim Spieleabend setzen sich 8 Freunde mit zufälliger Platzwahl an einen runden Tisch. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben **A**li, **B**ea und **C**harlie jeweils mindestens einen Platz Abstand voneinander (so wie beispielhaft in der Skizze)?



Lösung:



Da einerseits die Abstände bei Drehungen um den Tisch gleichbleiben, und andererseits zu jeder Platzwahl von A, B, C die genaue Sitzreihenfolge der restlichen Personen keine Rolle spielt, genügt es die Fälle zu betrachten, bei denen A einen festen Platz hat, und nur noch die möglichen Sitzplätze für B und C ermittelt werden. Ohne Abstandsbeschränkungen hat man für B dann 7 und für C noch 6 Plätze zur Auswahl, also gibt es insgesamt $7 \cdot 6 = 42$ verschiedene Möglichkeiten. Anhand der Skizze erkennt man alle 12 möglichen Sitzordnungen, bei denen die gewünschten Abstände eingehalten werden. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich damit zu $p = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.