Mathematik-Wettbewerb

Tag der Mathematik 2024

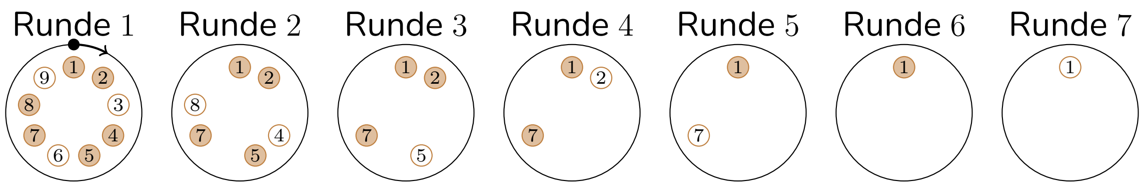
mögliche Lösungswege

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Auf einem runden Tisch liegen entlang des Randes gleichmäßig verteilt Schokopralinen. Eine Naschkatze geht um den Tisch herum und isst jede dritte Praline, die ihr begegnet (d.h. die dritte, sechste, usw.). Nachdem alle Pralinen gegessen sind, bemerkt sie, dass sie als letzte diejenige Praline genommen hat, die ihr als erste begegnet war, und sie ab dann den Tisch genau 7 mal vollständig umrundet hat. Wie viele Pralinen lagen am Anfang auf dem Tisch?

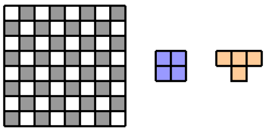
Lösung:

Am Anfang lagen 9 Pralinen auf dem Tisch. In der Skizze sieht man, welche der Pralinen nach jeder vollendeten Runde noch auf dem Tisch liegen, und welche gegessen wurden, wenn die Naschkatze von Praline 1 aus im Uhrzeigersinn um den Tisch herumgeht.



Aufgabe 2: (10 Punkte)

Wir haben ein Schachbrett mit 8×8 Feldern. Können wir dieses mit einer quadratischen Kachel (2×2 Felder) und 15 T-förmigen Kacheln (je 4 Feldern) überdecken?



Lösung:

Angenommen, das ginge. Da alle Kacheln zusammen höchstens $4+15\cdot4 = 8 \cdot 8$ Felder abdecken können, dürften diese sich nicht überlappen. Daher gäbe es eine gewisse Anzahl n von T-förmigen Kacheln, die jeweils drei weiße und ein schwarzes Feld abdecken, und die restlichen $15 - n$ T-förmigen Kacheln würden jeweils drei schwarze und ein weißes Feld abdecken. Da die quadratische Kachel zwei schwarze und zwei weiße Felder abdeckt, würden insgesamt $n\cdot1+(15-n)\cdot3+1\cdot2 = 47-2n$ schwarze Felder abgedeckt werden. Dies ist aber eine ungerade Zahl, im Widerspruch dazu, dass das Schachbrett 32 schwarze Felder hat. Also geht es nicht.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Eine Gruppe besteht aus zwei Kindern und acht Erwachsenen. Die einzelnen Personen werden zufällig (gleichverteilt) in einen von drei verschiedenen Räumen geleitet.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, sodass in einem Raum nur die beiden Kinder landen und in den beiden übrigen Räumen jeweils höchstens 5 Erwachsene?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine der zulässigen Konfigurationen aus (a) zu erhalten?

Lösung:

(a) Wir unterscheiden die Räume, sowie die einzelnen Personen im Raum, nicht aber deren Reihenfolge. Es gibt 3 Möglichkeiten, die beiden Kinder in einem der drei Räume unterzubringen. In die beiden anderen Räume können die Erwachsenen dann wie folgt aufgeteilt werden: "4 und 4", "3 und 5", oder "5 und 3".

   (i) Für "4 und 4" gibt es $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\cdot(8-4)!} = 70$ Möglichkeiten.

   (ii) Für "3 und 5" gibt es $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\cdot(8-3)!} = 56$ Möglichkeiten.

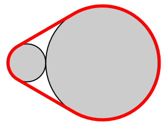
   (iii) Für "5 und 3" gibt es $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\cdot(8-5)!} = 56$ Möglichkeiten.

   Das sind insgesamt $3 \cdot (70 + 56 + 56) = 546$ Möglichkeiten.

(b) Für jede der 10 Personen stehen 3 Räume zur Auswahl, also insgesamt $3^{10} = 59049$ Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, eine der zulässigen Konfigurationen aus (a) zu erhalten, beträgt demnach $\frac{546}{59049} \approx 0.01$.

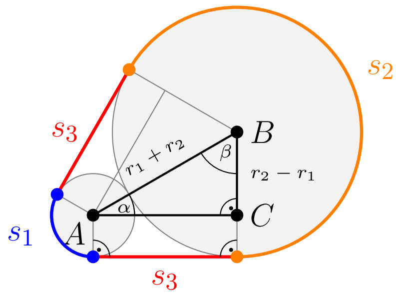
Aufgabe 4: (10 Punkte)

Zwei Räder mit Radien $r_1 = r$ und $r_2 = 3 \cdot r$ werden von einem Seil wie in der Skizze zusammengehalten. Wie lang ist das Seil?



Lösung:

Die geraden Seilabschnitte berühren die Räder mit Mittelpunkten A, B tangential, und stehen daher senkrecht auf deren Radien.



Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt für die Seitenlängen

$$|AB| = r_1 + r_2 = 4 \cdot r \quad , \quad |BC| = r_2 - r_1 = 2 \cdot r \quad , \quad |AC| = s_3$$

und mit Pythagoras daher

$$s_3 = |AC| = \sqrt{|AB|^2 - |BC|^2} = \sqrt{16 \cdot r^2 - 4 \cdot r^2} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r$$

Für die Winkel gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{2 \cdot r}{4 \cdot r} = \frac{1}{2}$$

d.h. $\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$ und somit $\beta = 60° = \frac{\pi}{3}$.
Demnach erhalten wir für die Längen der Kreisbögen

$$s_1 = r_1 \cdot (2\pi - 2 \cdot \tfrac{\pi}{2} - 2\alpha) = \frac{2\pi}{3} \cdot r \quad , \quad s_2 = r_2 \cdot (2\pi - 2\beta) = 3r \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi \cdot r$$

Die Gesamtlänge ℓ des Seils ergibt sich zu

$$\ell = s_1 + s_2 + 2 \cdot s_3 = \left(\tfrac{14}{3} \cdot \pi + 4 \cdot \sqrt{3}\right) \cdot r \approx 21.6 \cdot r$$