Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2015/2016
WWU Münster

Übungen zur Funktionentheorie

Serie 3

Aufgabe 9 (5 Punkte)**.** Gegeben ist die Potenzreihe $F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}(-1)^{k-1}z^k$. Zeigen Sie:

a) $F(1) = \ln(2)$, $F(-1) = -\infty$.

b) Der Konvergenzradius von F ist 1.

c) $F'(z) = (1+z)^{-1}$ für alle z mit $|z| < 1$.

d) $e^{F(z)} = 1 + z$ für alle z mit $|z| < 1$.

Aufgabe 10 (5 Punkte)**.** a) Für $T > 0$ definieren wir $\gamma_T : [-T, T] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma_T(s) = (1 + si)/(1 - si)$. Bestimmen Sie

$$\int_{\gamma_T} \frac{1}{z} dz.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_{|z|=r} \mathrm{Re}(z) dz,$$

wobei der Kreis $|z| = r$ im mathematisch positiven Sinn zu durchlaufen ist.

c) Berechnen Sie

$$\int_{|z|=7} \frac{e^z}{z^3} dz.$$

d) Seien $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [\frac{\pi}{2}, \pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma_1(t) = -1 + (1+i)t$ und $\gamma_2(t) = e^{i(\frac{3\pi}{2} - t)}$. Sei ferner $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \bar{z}$. Skizzieren Sie γ_i und berechnen Sie $\int_{\gamma_i} f(z) dz$ für $i = 1, 2$. Was können Sie über die Differenz der Integrale sagen?

Aufgabe 11 (5 Punkte)**.** Beweisen Sie das sogenannte *Homotopielemma*: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und komplex differenzierbar und sei $\gamma : [a,b] \times [c,d] \to U$ zweimal stetig differenzierbar. Es gelte ferner eine der beiden folgenden Bedingungen:

i) Für alle $s \in [c,d]$ ist $\gamma(a,s) = \gamma(b,s)$, d.h. $\gamma(\cdot, s)$ ist für jedes s geschlossen.

ii) $\gamma(a, \cdot)$ und $\gamma(b, \cdot)$ sind konstant, d.h. die Kurven $\gamma(\cdot, s)$ besitzen feste Randpunkte.

Dann ist

$$\int_{\gamma(\cdot,s)} f(z) dz$$

unabhängig von s.

Hinweis. Cauchy-Integralsatz für Sterngebiete.

Aufgabe 12 (5 Punkte)**.** Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit

$$K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_n \supset \dots$$

und $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$. Zeigen Sie:

a) Ist $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $k_n \in K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

b) Ist $k_\infty = \lim_{n\to\infty} k_n$, so gilt $k_\infty \in K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Es gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{k_\infty\}$.

***Aufgabe 13** (5 Punkte)**.** Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}\cos(z+w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)\\ \sin(z+w) &= \cos(z)\sin(w) + \sin(z)\cos(w)\end{aligned}$$

Hinweis. Berechnen Sie $e^{\pm i(z+w)}$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 13. November 2015, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.