Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2015/2016
WWU Münster

Übungen zur Funktionentheorie
Serie 11

Aufgabe 50 (5 Punkte)**.** Sei f meromorph auf $\overline{\mathbb{H}}$ und die Singularitätenmenge von f endlich und vollständig in $\mathbb{H}$ enthalten. Es bezeichne γ_R den Integrationsweg über den Halbkreis von Radius R in der offenen oberen Halbebene und σ_R den Integrationsweg über das Rechteck in der oberen Halbene mit Höhe R über $[-R, R]$ (ohne $[-R, R]$). Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0 \text{ oder } \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} f(z)dz = 0$$

gilt, sofern eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt ist:

i) $\lim_{|z|\to\infty} |z||f(z)| = 0$

ii) $|f(z)| \leq \rho(z)e^{-\lambda \operatorname{Im}(z)}$, für $z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$,
wobei $\lambda > 0$ sei und ρ stetig auf $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$, mit $\lim_{|z|\to\infty} \rho(z) = 0$.

Aufgabe 51 (5 Punkte)**.** a) Zeigen Sie mithilfe des Satzes zu Integralen trigonometrischer Funktionen, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \lambda \cos^2(t)} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda + 1}}$$

für $\lambda > -1$ gilt.

b) Berechnen Sie mithilfe des Satzes zu Hauptwertintegralen

$$\text{HW–}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - 2}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx.$$

Aufgabe 52 (5 Punkte)**.** Beweisen Sie für $\xi < 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} g(x)dx = 2\pi i e^{\xi} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-i\xi)^k}{k!} \binom{n}{k} (2i)^k,$$

wobei $g(z) = (z - i)^{-n-1}(z + i)^n$.

Hinweis. Benutzen sie an geeigneter Stelle $(z + i)^n = (z - i + 2i)^n$ und die allgemeine binomische Formel.

Aufgabe 53 (5 Punkte)**.** Beweisen Sie unter den Voraussetzungen des Satzes §15.3 aus der Vorlesung, dass für eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(z) \frac{f'}{f}(z)dz = &\sum_{z \in \operatorname{int} \gamma : f(z) = 0} n(\gamma, z) \operatorname{ord}_z(f) F(z) \\ &- \sum_{z \in \operatorname{int} \gamma : |f(z)| = \infty} n(\gamma, z) |\operatorname{ord}_z(f)| F(z).\end{aligned}$$

Berechnen Sie nun

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1 - \sin^2(z)}{\sin(z)} dz,$$

wobei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ durch $t \mapsto e^{4\pi i t}$ gegeben sei.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 22. Januar 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.