Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2015/2016
WWU Münster

Übungen zur Funktionentheorie
Serie 11

Aufgabe 50 (5 Punkte). Sei f meromorph auf $\overline{\mathbb{H}}$ und die Singularitätenmenge von f endlich und vollständig in $\mathbb{H}$ enthalten. Es bezeichne γ_R den Integrationsweg über den Halbkreis von Radius R in der offenen oberen Halbebene und σ_R den Integrationsweg über das Rechteck in der oberen Halbene mit Höhe R über $[-R, R]$ (ohne $[-R, R]$). Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0 \text{ oder } \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} f(z)dz = 0$$

gilt, sofern eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt ist:

i) $\lim_{|z|\to\infty} |z||f(z)| = 0$

ii) $|f(z)| \leq \rho(z)e^{-\lambda \operatorname{Im}(z)}$, für $z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$,
wobei $\lambda > 0$ sei und ρ stetig auf $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$, mit $\lim_{|z|\to\infty} \rho(z) = 0$.

Aufgabe 51 (5 Punkte). a) Zeigen Sie mithilfe des Satzes zu Integralen trigonometrischer Funktionen, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \lambda \cos^2(t)} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda + 1}}$$

für $\lambda > -1$ gilt.

b) Berechnen Sie mithilfe des Satzes zu Hauptwertintegralen

$$\text{HW-}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx.$$

Aufgabe 52 (5 Punkte). Beweisen Sie für $\xi < 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} g(x)dx = 2\pi i e^{\xi} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-i\xi)^k}{k!} \binom{n}{k} (2i)^k,$$

wobei $g(z) = (z-i)^{-n-1}(z+i)^n$.

Hinweis. Benutzen sie an geeigneter Stelle $(z+i)^n = (z - i + 2i)^n$ und die allgemeine binomische Formel.

Aufgabe 53 (5 Punkte). Beweisen Sie unter den Voraussetzungen des Satzes §15.3 aus der Vorlesung, dass für eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(z) \frac{f'}{f}(z)dz = \sum_{z \in \operatorname{int}\gamma : f(z) = 0} n(\gamma, z) \operatorname{ord}_z(f) F(z) - \sum_{z \in \operatorname{int}\gamma : |f(z)| = \infty} n(\gamma, z) |\operatorname{ord}_z(f)| F(z).$$

Berechnen Sie nun

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1 - \sin^2(z)}{\sin(z)} dz,$$

wobei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ durch $t \mapsto e^{4\pi i t}$ gegeben sei.

<u>Aufg. 50</u> i) Es gelte $|z||f(z)| \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$.

Dann gilt für $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz$:

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq \sup_{z\in \operatorname{im}\gamma_R} |f(z)| \cdot \ell(\gamma_R)$$

$z\in\gamma_R \Leftrightarrow |z| = R$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{im} = \text{Bild} \\ \text{Im} = \text{Imaginärteil}\,!\end{array}}$

$$= \sup_{z\in\gamma_R} \frac{|z|}{|z|}|f(z)| \cdot \pi R$$

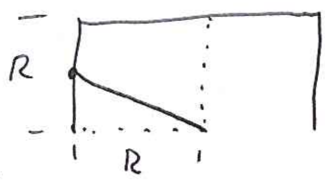
$$= \frac{1}{\cancel{R}} \sup_{z\in\gamma_R} |z||f(z)| \cdot \pi \cancel{R}$$

und wir erhalten die Aussage im Grenzwert $R\to\infty$, da n.V. $\sup_{z\in\gamma_R} |z||f(z)| \longrightarrow 0$.

Analog können wir mit $\int_{\sigma_R} f(z)\,dz$ verfahren:

$$\left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \leq \sup_{z\in \operatorname{im}\sigma_R} |f(z)| \cdot \ell(\sigma_R)$$

$$= \sup_{z\in \operatorname{im}\sigma_R} \frac{|z|}{|z|}|f(z)| \cdot 4R$$



Nun gilt für $z\in \operatorname{im}\sigma_R$: $|z| \geq R$

$\Rightarrow \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{R}$ für $z\in \operatorname{im}\sigma_R$

$$\Rightarrow \left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{1}{\cancel{R}} \sup_{z\in \operatorname{im}\sigma_R} |z||f(z)| \cdot 4\cancel{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

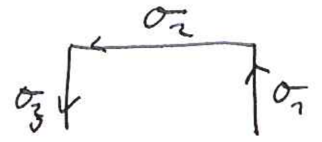
$\square$

ii) Es gelte $|f(z)| \le g(z)\, e^{-\lambda \operatorname{Im}(z)}$ für $z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$,

$\lambda > 0$, g stetig auf $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$.

Unterteile $\sigma_R = \sigma_{R,1} \cup \sigma_{R,2} \cup \sigma_{R,3}$, mit

$$\sigma_{R,1}(t) = R + it \quad : [0,R] \to \mathbb{C}$$
$$\sigma_{R,3}(t) = -R + i(R-t) \quad : [0,R] \to \mathbb{C}$$
$$\sigma_{R,2}(t) = iR + R - t \quad : [-R,R] \to \mathbb{C}$$



Dann gilt ~~...~~

$$\int_{\sigma_R} f(z)\,dz = \int_{\sigma_{R,1}} f(z)\,dz + \int_{\sigma_{R,2}} f(z)\,dz + \int_{\sigma_{R,3}} f(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\sigma_R} f(z)\,dz \right| \le \left| \int_{\sigma_{R,1}} f \right| + \left| \int_{\sigma_{R,2}} f \right| + \left| \int_{\sigma_{R,3}} f \right|.$$

Für $\int_{\sigma_{R,2}} f(z)\,dz$ haben wir:

$$\left| \int_{\sigma_{R,2}} f(z)\,dz \right| \le \ell(\sigma_{R,2}) \sup_{z \in \sigma_{R,2}} |f(z)|$$
$$= 2R \cdot \sup_{z \in \sigma_{R,2}} |f(z)|$$
$$\le \underbrace{2 \cdot R}_{\to \infty,} \sup_{z \in \sigma_{R,2}} \underbrace{g(z)}_{\to 0} \underbrace{e^{-\lambda \cdot R}}_{\to 0,}$$

aber "e frisst alles", d.h. auch $R e^{-\lambda R} \to 0$.

Für $\left| \int_{\sigma_{R,1}} f(~~\dots~~) \right|$:
(oder ,3, analog)

$$\left| \int_{\sigma_{R,1}} f(\cancel{\dots})\,dz \right| = \left| \int_0^R f(R + it)\, i\, dt \right| \le \int_0^R \sup_t |f(R+it)|\,dt$$
$$\le \int_0^R \sup \underbrace{g(\sigma_{R,1}(t))}_{\to 0} \underbrace{e^{-\lambda t}}_{\le 1} dt \to 0. \qquad \square$$

Aufg. 51 a) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\lambda\cos^2(t)} \overset{!}{=} \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda+1}}$ für $\lambda > -1$.

$$R(x,y) = \frac{1}{1+\lambda x^2}$$ (keine Pole auf S^1 da $\lambda > -1$)

$$\tilde{R}(x,y) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\lambda(z+1/z)^2\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{z^2}\,\frac{4z/\lambda}{4/\lambda + z^2+2+z^{-2}}$$

(Erweitern und ausmultiplizieren)

[$\lambda = 0$ unspannend]

$$= \frac{4z/\lambda}{z^4+2\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)z^2+1}$$

⇝ p,q-Formel für „$x = z^2$"

$$z_{1,2}^2 = -\left(\frac{2}{\lambda}+1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)^2-1}$$

1. Fall $\lambda > 0$

$$-\left(\frac{2}{\lambda}+1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)^2-1}$$

$$= -\left(\frac{2}{\lambda}+1\right) \pm \left(\frac{2}{\lambda}+1\right)\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{(2/\lambda+1)^2}}}_{\leq 1}$$

(geschicktes Ausklammern)

$$\Rightarrow -\left(\frac{2}{\lambda}+1\right) + \sqrt{} \in (-1,0)$$

$$\text{"} \quad -\sqrt{} < -1$$

2. Fall $\lambda < 0$ ($\lambda \in (-1,0)$)

$$-\left(\frac{2}{\lambda}+1\right) + \sqrt{} > 1$$

$$\text{"} \quad -\sqrt{} \in (0,1)$$

Nun bezeichnen wir (in jedem Fall) die ~~Wurzeln von~~ $z_{1,2}^2$ mit ϱ_1, ϱ_2, so, dasss $|\varrho_1| < 1$ und $|\varrho_2| > 1$.

Insbesondere ergibt sich

$$\tilde{R}(z) = \frac{4\, z/\lambda}{(z-\sqrt{\varrho_1})(z+\sqrt{\varrho_1})(z-\sqrt{\varrho_2})(z+\sqrt{\varrho_2})} .$$

Insb. müssen wir nun die Residuen an $\pm\sqrt{\varrho_1}$ berechnen.

In dieser Gestalt ist die Berechnung einfach:

$$\operatorname{Res}_{\sqrt{\varrho_1}} \tilde{R} = \lim_{z\to\sqrt{\varrho_1}} \frac{4\, z/\lambda \cdot \cancel{(z-\sqrt{\varrho_1})}}{\cancel{(z-\sqrt{\varrho_1})}(z+\sqrt{\varrho_1})(z^2-\sqrt{\varrho_2}^2)}$$

$$= \frac{4\sqrt{\varrho_1}\cdot\frac{1}{\lambda}}{2\sqrt{\varrho_1}(\sqrt{\varrho_1}^2-\sqrt{\varrho_2}^2)} = \frac{2/\lambda}{\varrho_1-\varrho_2}$$

und analog

$$\operatorname{Res}_{-\sqrt{\varrho_1}} \tilde{R} = \frac{2/\lambda}{\varrho_1-\varrho_2} .$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_0^{2} \frac{1}{1+\lambda\cos^2(t)}\,dt = 2\pi \operatorname{Res}_{\sqrt{\varrho_1}} \tilde{R}(z) + 2\pi \operatorname{Res}_{-\sqrt{\varrho_1}} \tilde{R}(z)$$

$$= \frac{8/\lambda}{\varrho_1-\varrho_2} .$$

Zurück zur Fallunterscheidung: 1. Fall: $\varrho_1-\varrho_2 = 2\sqrt{(\frac{2}{\lambda}+1)^2-1}$

$$\Rightarrow \int \dots dt = \frac{4\pi}{\lambda\sqrt{(2/\lambda+1)^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda+1}}$$

und analog im 2. Fall

Differenz $\varrho_1-\varrho_2$ betrachten und einfach aus-x-en!

$$\int \frac{x-2}{x^3-2x^2+x-2} \qquad f(z) = \frac{z-2}{z^3-2z^2+z-2}$$

$$= \frac{z-2}{(z^2+1)(z-2)} = \frac{1}{z^2+1}$$

$\Rightarrow$ Pole bei $z = \pm i$. (*) erfüllt wg $\deg f \leq -2$.

$$\Rightarrow \int f(z)\,dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}_i f$$

$$\mathrm{Res}_i f = \left.\frac{(z-i)(z-2)}{(z^2+1)(z-2)}\right|_{z=i} = \left.\frac{1}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow \int f(z)\,dz = \pi.$$

Aufg. 52 Es gilt für $g(z) = \frac{1}{(z-i)}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$,

und $\xi < 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-ix\xi} g(x)}_{=: f(x)} dx \overset{!}{=} 2\pi i\, e^{\xi} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-i\xi)^k}{k!} \binom{n}{k} (2i)^k$$

Beweis Es gilt: $f(z)$ holom auf $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ und wg.

$\xi < 0$ gilt

$$|f(z)| \le e^{\xi \operatorname{Re}(-iz)} |g(z)| = e^{-|\xi| \operatorname{Im} z} |g(z)|$$

und es gilt $\lim\limits_{|z| \to \infty} |g(z)| = \infty$ (deg Nenner > deg Zähler).

Damit ist (B) von Satz 15.2 / Aufg. 50 i)

erfüllt und §15.2 liefert

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \operatorname{Res}_i f.$$

Zunächst eine Nebenrechnung:

$$f(z) = e^{-iz\xi} \frac{1}{z-i}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n$$

$$= e^{\xi} e^{-i\xi(z-i)} (z+i)^n (z-i)^{-n-1}$$

$$= e^{\xi} (z-i)^{-n-1} \sum_{k\ge 0} \frac{(-i\xi)^k}{k!} (z-i)^k \underbrace{(z+i)^n}_{=(z-i+2i)}$$

$$= e^{\xi} (z-i)^{-n-1} \sum_{k\ge 0} \frac{(-i\xi)^k (z-i)^k}{k!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (2i)^j (z-i)^{n-j}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} &e^{\xi} e^{-\xi} e^{-i\xi z} \\ &= e^{\xi} e^{-\xi - i\xi z} \\ &= e^{\xi} e^{-i\xi(z-i)} \quad \text{da } -i = \tfrac{1}{i} \end{aligned}}$$

~~Damit~~

Beachte, dass f eine Polstelle der Ordnung $(n+1)$ an $z=i$ hat, d.h.

$$\operatorname{Res}_i f = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dz}\right)^n e^{\xi} \sum_{k\geq 0} \frac{(-i\xi)^k}{k!}(z-i)^k \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(2i)^j (z-i)^{n-j}\Bigg|_{z=i}$$

Absolute Konvergenz der Exp-Reihe erlaubt Vertauschung der Grenzwertprozesse, also

$$= \frac{1}{n!} e^{\xi} \sum_{k\geq 0} \frac{(-i\xi)^k}{k!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(2i)^j \left(\frac{d}{dz}\right)^n\Bigg|_{z=i} (z-i)^{n-j+k}$$

Beachte:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n\Bigg|_{z=i} (z-i)^{n-j+k} = \begin{cases} 0 & i > k \\ n! & n = k \\ 0 & k > j \end{cases}$$ (da an Stelle $z=i$ ausgewertet!)

$$= e^{\xi} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-i\xi)^k}{k!}\binom{n}{k}(2i)^k$$

und die Beh ist damit gezeigt.

Aufg. 53

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(z) \frac{f'}{f}(z)\, dz = \sum_{z \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{Res}_z \left(F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right) n(\gamma, z)$$

Aus dem Beweis von 15.3 wissen wir

$$\mathrm{Res}_{z_0} \left(\frac{f'}{f} \right) = \mathrm{ord}_{z_0}(f),$$

da

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \cancel{\mathrm{ord}}_{z_0}(f)(z - z_0)^{-1} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Laurentreihe mit $a_{-1} = \mathrm{ord}_{z_0}(f)$ hat

$$\Rightarrow \quad F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \mathrm{ord}_{z_0} f \cdot F(z)\,(z - z_0)^{-1} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

hat Laurentreihe mit $a_{-1} = F(z)\, \mathrm{ord}_{z_0}(f)$

und die Behauptung folgt sofort.

$$\int_{\gamma} \frac{1-\sin^2(z)}{\sin(z)}\,dz = \frac{\cos^2(z)}{\sin(z)} = \cos(z)\,\frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

$$\rightsquigarrow = \cos(z)\,\frac{f'}{f}\,, \quad f = \sin$$

Sinus hat einfache Nst an $z=0$

γ param den Kreis mit doppelter Geschw

$$\Rightarrow \quad n(\gamma, 0) = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1-\sin^2(z)}{\sin(z)}\,dz$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \cos(0) = 2\,.$$

Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2015/2016
WWU Münster

Übungen zur Funktionentheorie

Serie 12

Aufgabe 54 (5 Punkte). Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$, sowie $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f_n genau dann lokal gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn f_n gleichmäßig auf Kompakta gegen f konvergiert.

Aufgabe 55 (5 Punkte). Beweisen Sie, dass die Zeta-Funktion

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

auf $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$ normal konvergiert.

Aufgabe 56 (5 Punkte). Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f_n \to f$ eine lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Ist jedes f_n injektiv, so ist f entweder konstant oder injektiv.

Aufgabe 57 (5 Punkte). i) Bestimmen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\cos(z)\sin(z)} dz,$$

wobei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben sei durch $t \mapsto 3142e^{2\pi i t}$.

Hinweis. Betrachten Sie $\cot(z)'$.

ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(z) = z^4 + 4z + 2$$

in $B_2(0)$ genau vier und in $B_1(0)$ genau eine Nullstelle besitzt.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 29. Januar 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.

Aufg. 54 „glm auf Kompakta ⇒ lokal glm."

Sei $z_0 \in G$, dann $\exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(z_0) \subset G$, denn G ist offen in $\mathbb{C}$.
Insb. ist $\overline{B_{\varepsilon/2}(z_0)} \subset G$ kompakt.

Damit gilt

$$\sup_{z \in B_{\varepsilon/2}(z_0)} |f_n(z) - f(z)| \leq \sup_{z \in \overline{B_{\varepsilon/2}(z_0)}} |f_n(z) - f(z)| \to 0$$

nach Vor. $\square$

„lokal glm ⇒ glm auf Kompakta"

Sei $K \subset G$ kpkt. $\rightsquigarrow (B_{\varepsilon_i}(z_i))_{i=1}^m$ endl. Überdeckung

so, dass $f_n|_{B_{\varepsilon_i}}$ lokal glm konvergiert

(Wähle erst Überdeckung von $U_{z_0}\ \forall z_0$, dann nutze Kompaktheit aus).

D.h. ~~$\forall i$~~

$$\sup_{z \in B_{\varepsilon_i}(z_i)} |f_n(z) - f(z)| \to 0. \quad \text{Sei } \varepsilon > 0.$$

$\Rightarrow \exists\, N_i \in \mathbb{N} : \forall n > N_i \quad \sup_{z \in B_{\varepsilon_i}(z_i)} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

Endl. viele Bällchen $\rightsquigarrow$ Setze $N = \max_{i=1,\dots,m} \{N_i\}$

$\Rightarrow \forall n > N \quad \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad f_n|_K \to f|_K$ glm. $\square$

Aufg. 55 Beh $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ konvergiert auf $\{Re(z)>1\}$ normal.

Bew Sei $z_0 \in \{Re(z)>1\}$, dann ex. $\varepsilon>0$ mit $B_\varepsilon(z_0) =: U_{z_0} \subset \{Re(z)>1\}$, denn $\{Re(z)>1\}$ ist offen in $\mathbb{C} \Rightarrow Re(z_0) = 1+\beta,\ \beta>0$.

Sei $z \in U_{z_0}$. Dann $Re(z) > Re(z_0)-\varepsilon = 1+\beta$.

Es gilt $|f_n|_{U_{z_0}}(z)| = \left|\frac{1}{n^z}\right| = \left|e^{-z\log(n)}\right|$

$$= e^{-Re(z)\ln(n)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Monotonie von } e^{-x}}}{\leq} e^{-(Re(z_0)-\varepsilon)\ln(n)}$$

$$= e^{-(1+\beta)\ln(n)} = \left(e^{-\ln(n)}\right)^{1+\beta} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\beta} = \frac{1}{n^{1+\beta}} =: M_n$$

Insbesondere ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta}}$$

konvergent, denn $\beta>0$ (Erinnerung an Ana I: Cauchy-Verdichtungskriterium).

$\square$

Aufg. 56

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f_n : G \to \mathbb{C}$ konvergiere lokal glm gegen $f : G \to \mathbb{C}$, f_n holom.

Beh f_n inj $\forall n \Rightarrow f$ inj oder konst.

Bew A: f nicht konstant.

~~Betrachten wa~~ Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig, betrachte

$$g_n^{z_0}(z) = f_n(z_0) - f_n(z).$$

Dann ist auch glm konvergent mit

$$g_n^{z_0}(z) \to g^{z_0}(z) = f(z_0) - f(z).$$

Ang. f nicht inj. $\Rightarrow \exists z_0, z_1 : f(z_0) = f(z_1)$

$\Rightarrow g^{z_0}$ hat Nullstelle bei z_1 (m-fach)

Weil f nicht konst, gilt

$$g^{z_0} \not\equiv 0$$

und wir können Hurwitz anwenden:

$$g^{z_0}(z_1) = 0$$

$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon < \varepsilon_0 \ \exists n(\varepsilon) \ \forall n \geq n(\varepsilon)$

$g_n^{z_0}$ hat in $B_\varepsilon(z_0)$ m Nstellen

$g_n^{z_0}$ hat Nst $z_1 \Leftrightarrow f_n(z_0) - f(z_1) = 0$

↯ zur Injektivität der f_n.

□

Aufg. 57 i) Bestimmen sie $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\cos(z)\sin(z)}\,dz$,

wobei $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto 3142\, e^{2\pi i t}$.

Es gilt: $\cot'(z) = \left(\frac{\cos(z)}{\sin(z)}\right)'$

$$= \frac{-\sin(z)^2 - \cos(z)^2}{\sin^2(z)} = -\frac{1}{\sin^2(z)}.$$

Damit $\frac{1}{\sin\cos} = -\frac{\cot'}{\cot} \quad \left(= \frac{1}{-\sin^2}\,\frac{\sin}{\cos}\right).$

Der Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral liefert

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\cos(z)\sin(z)}\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cot'(z)}{\cot(z)}\,dz$$

$$= \#\text{Pst}^{\text{von cot}} \text{ in } \gamma - \#\text{Nst}^{\text{von cot}} \text{ in } \gamma.$$

Nst von cot sind die von cos, also

$\pi(\mathbb{Z}+\frac{1}{2})$

Pst von cot sind die von sin, also

$\pi\mathbb{Z}$.

$3142/\pi \approx 1000$, haben also Nullstellen

$$\underbrace{-999{,}5\pi,\ -998{,}5\pi, \dots -0{,}5\pi}_{999},\ \underbrace{0{,}5\pi, \dots, 999{,}5\pi}_{999}$$

und Polstellen

$$\underbrace{-1000\pi, \dots, -\pi}_{999},\ \underbrace{0}_{1},\ \underbrace{\pi, \dots, 1000\pi}_{999},$$

also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\cos(z)\sin(z)}\,dz = 999\cdot 2 + 1 - 999\cdot 2 = 1.$$

ii) $f(z) = z^4 + 4z + 2$.

Nullstellen in $B_2(0)$:

Setze $g(z) = z^4$

$$|f(z) - g(z)| = |4z + 2| \leq 4|z| + 2 \leq 10 < 2^4 = 16,$$

also gilt nach Rouche, dass f 4 Nst in B_2 besitzt.

In $B_1(0)$:

Setze $g(z) = 4z$

$$|f(z) - g(z)| = |z^4 + 2| \leq |z|^4 + 2 \leq 3 < 4$$

also gilt nach Rouche, dass f 1 Nst in B_1 besitzt.

[Beachte dass die strikte Ungl. bereits impliziert, dass auf γ keine Nst liegen, siehe Bew. v. Rouche]