Lösungen zu den Beispielaufgaben zum Zertifikat
Null Problemo – Mathematisches Problemlösen
2019

Lösung zu Aufgabe 1.

Erste Lösung

Wir betrachten zunächst die Anzahl der Papierlagen nach n Faltungen. Am Anfang gibt es nur eine Lage, und bei jedem Falten verdoppelt sich die Anzahl der Lagen. Daher gibt es nach n Faltungen 2^n Lagen.

Wenn wir das Blatt nach n Faltungen wieder auseinanderfalten, sehen wir die 2^n Lagen als Streifen nebeneinander. Die Anzahl der Trennungslinien zwischen diesen ist eins weniger, also 2^n-1. Die Trennungslinien sind genau die Faltkanten. Also folgt

$$k_n = 2^n - 1\,.$$

Zweite Lösung

Wie oben gibt es nach n Faltungen 2^n Papierlagen. Wir überlegen nun, wie wir k_{n+1} aus k_n erhalten können. Nach der $n$ten Faltung gibt es 2^n Lagen, und bei der $(n+1)$ten Faltung wird jede dieser Lagen in der Mitte gefaltet, es kommen also 2^n Faltkanten hinzu. Daher gilt

$$k_{n+1} = k_n + 2^n\,. \tag{1}$$

Am Anfang gibt es keine Faltkante, also ist $k_0 = 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} k_n = k_{n-1} + 2^{n-1} &= k_{n-2} + 2^{n-2} + 2^{n-1} = \dots \\ &= k_0 + 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 1 + 2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}\,. \end{aligned}$$

Mittels der Formel für die geometrische Summe lässt sich dies vereinfachen zu

$$k_n = \frac{2^n - 1}{2-1} = 2^n - 1\,.$$

Anmerkung: Falls die Formel für die geometrische Summe nicht bekannt ist, lässt sich bei der zweiten Lösung die endgültige Form auch so finden: Man rechnet $k_0 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 7$, $k_4 = 15$ aus und beobachtet, dass dies immer eins weniger als eine Zweierpotenz ist. Genaueres Hinsehen führt zu der Vermutung, dass $k_n = 2^n-1$ ist. Diese kann dann mittels (1) mit vollständiger Induktion gezeigt werden.

Lösung zu Aufgabe 2.

Dies ist nicht möglich. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Anzahl der (geordeneten) Paare (P, Q), wobei P, Q zwei befreundete Personen der Gruppe sind. Nach Annahme gibt es zu jedem der 33 möglichen P genau 3 mögliche Q, also gibt es $33 \cdot 3 = 99$ solche Paare. Andererseits ist mit jedem solchen Paar (P, Q) auch (Q, P) ein solches Paar (Symmetrie), daher muss deren Anzahl gerade sein. Dies ist ein Widerspruch, daher ist die Konstellation der Aufgabenstellung nicht möglich.

Bemerkung: Die Aufgabenstellung lässt sich übersichtlich mittels Graphen darstellen: für jede Person zeichnen wir einen Punkt, und zwei Punkte werden durch eine Kante verbunden, falls die beiden Personen befreundet sind. Dann lässt sich das Argument auch so formulieren: wir zählen für jede Ecke die von ihr ausgehenden Kanten und addieren alle diese Zahlen. Nach Annahme muss dies $33 \cdot 3 = 99$ ergeben. Andererseits wird dabei jede Kante doppelt gezählt, je einmal von ihren beiden Ecken ausgehend. Da 99 ungerade ist, erhalten wir einen Widerspruch.

Lösung zu Aufgabe 3.

Die Aussage ist äquivalent zu folgender: Ist $A \subset \{0, 1, 2, \ldots, 99\}$ derart, dass keine zwei Zahlen von A die Summe 100 haben, so kann A höchstens 51 Elemente haben.

Um diese Aussage zu zeigen, beobachten wir, dass von den beiden Zahlen $1, 99$ nur höchstens eine in A liegen kann (denn sonst hätten wir ja zwei Zahlen in A mit Summe 100). Analog kann von $2, 98$ nur höchstens eine in A liegen, ebenfalls unter $3, 97$ usw. bis $49, 51$. Damit können unter den Zahlen $1, 2, \ldots, 49, 51, 52, \ldots, 99$ nur höchsten 49 in A liegen. Zusätzlich gibt es noch 0 und 50 als mögliche Elemente von A. Also kann A höchstens $49 + 2 = 51$ Elemente haben.

Bemerkung: Die Lösung lässt sich auch mit dem Schubfachprinzip formulieren: Hat eine Menge $A \subset \{0, 1, 2, \ldots, 99\}$ mindestens 52 Elemente, so müssen mindestens 50 davon unter den Zahlen $1, 2, \ldots, 49, 51, 52, \ldots, 99$ zu finden sein. Letztere teilt man in die 49 ‚Schubfächer' $\{1, 99\}$, $\{2, 98\}$, $\ldots$, $\{49, 51\}$ auf. Da es mehr Zahlen als Schubfächer gibt, muss mindestens ein Schubfach zwei der Zahlen enthalten, und diese haben die Summe 100.