

Diskrete Stochastische Finanzmathematik

Inhalt

1. Vorbemerkung	3
2. Optionen und Arbitrage	4
3. Hedging	10
4. Die Hebelwirkung von Optionen	12
5. Kombinationen von Optionsgeschäften	16
6. Ein allgemeines Derivate-Modell	19
7. Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell	22
8. Die Formel von Black und Scholes	28
9. Stochastische Marktmodelle	36
10. Selbstfinanzierende Handelsstrategien	42
11. Martingale und Arbitrage	45
12. Markt-Vollständigkeit	62
13. Unvollständige Märkte	68
14. Das Black-Scholes-Modell	80
Literatur	88
Danksagung	91

1. Vorbemerkung

Spätestens seit der Verleihung des Nobelpreises für Ökonomie im Jahr 1997 an Myron Scholes und Robert Merton ist die zusammen mit Fischer Black[†] seit dem Anfang der 70er Jahre entwickelte Theorie der mathematischen Bewertung von Finanzderivaten in aller Munde; hiervon zeugen auch die mehr als drei Dutzend allein seit 1996 erschienenen Monographien und Handbücher zu diesem Thema (für eine Auswahl vgl. [4], [6] bis [9], [11], [16] bis [19], [22], [25], [26]; s.a. [31], [36], [39] bis [47], [49] bis [53], [55] bis [59], [65] bis [72], [74], [75]; vor 1996 vgl. [10] und [36] bis [38]). Allein im Jahr 2002 erschienen davon über ein Dutzend neu! Die Bedeutung von derivativen Finanzinstrumenten beschränkt sich dabei inzwischen nicht nur auf den Finanzmarkt, sondern erlangt vermehrt auch Bedeutung auf dem Versicherungs- (vgl. [24]), speziell dem Rückversicherungsmarkt (Stichwort: *Alternativer Risiko-Transfer*, ART; vgl. [6], [54]), dem Zinsmarkt (vgl. [27], [28], [32], [33], [37], [38], [41], [60], [62], [64], [65], [76]) und dem Wetter- und Energiemarkt (vgl. [5], [13], [15], [21]).

Der börsenmäßige Handel mit Derivativen lässt sich historisch bis ins frühe 17. Jahrhundert zurückverfolgen (Warenterminkontrakte beim Tulpenhandel in Holland, Reishandel in Japan); Finanzderivative (Aktienoptionen) wurden bereits Anfang des 19. Jahrhunderts an der *London Stock Exchange* gehandelt. Der Beginn des modernen Handels mit Derivativen geht einher mit der Gründung des *Chicago Board of Trade* (CBOT) im Jahr 1848, zunächst hauptsächlich für diverse Warentermingeschäfte, später auch für Aktienoptionen. Börsen für den reinen Finanzderivative-Handel – speziell Währungsgeschäfte – existieren allerdings erst seit 1972 [Gründung des *International Money Market* (IMM) als Unterabteilung des seit 1919 existierenden *Chicago Mercantile Exchange* (CME), *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) seit 1973]. Zeitgleich erschien die erste bahnbrechende Arbeit von Fischer Black und Myron Scholes mit dem Titel *The pricing of options and corporate liabilities* in dem damals relativ unbedeutenden *Journal of Political Economy*, nachdem mehrere der führenden Fachzeitschriften im Bereich der Ökonomie die Publikation abgelehnt hatten, was möglicherweise dem mathematisch anspruchsvollen, aber ökonomisch schwer direkt zugänglichen Inhalt zuzuschreiben war. Erst im Jahr 1979 wurde von J.C. Cox, A. Ross und M. Rubinstein ein alternativer Ansatz publiziert, der auf kombinatorischen Argumenten beruhte und vor allem sehr gut dazu geeignet war, den ökonomisch einfach zu fassenden Begriff der *Arbitragefreiheit* eines Marktes in verständlicher Form zu mathematisieren. Der Durchbruch wurde schließlich mit Arbeiten von J.M. Harrison, D.M. Kreps und S.R. Pliska Anfang der 80er Jahre erzielt, in denen die *Martingaltheorie* und die Methoden der *Stochastischen Analysis* zusammen mit Methoden der Funktionalanalysis als fundamentale Bausteine in die Preistheorie von Derivativen eingeführt wurden, die heute als Standard gelten und die Grundlage aller modernen Publikationen zu diesem Thema bilden.

Dieser Text orientiert sich im Wesentlichen an dem zeitdiskreten Modell von Cox, Ross und Rubinstein, wobei zunächst die Erläuterung der eher ökonomischen Aspekte (Arbitrage, Hebelwirkung, Kombinationen von Optionsgeschäften) im Vordergrund steht. Die Darstellung folgt in Teilen den Monographien von BINGHAM UND KIESEL [8], ETHERIDGE [11], LAMBERTON UND LAPEYRE [17] und STEINER UND UHLIR [25]; vgl. auch KREMER [17]. Eine elementare Einführung in das Gebiet, insbesondere unter markttechnischen Aspekten, gibt REUTERS [23]; Anregungen speziell für die Schule findet man in ADELMEYER [1], ADELMEYER UND WARMUTH [2] und PFEIFER [20].

2. Optionen und Arbitrage

Unter dem Sammelbegriff *Derivat* versteht man einen Finanzkontrakt zwischen einem oder mehreren Beteiligten, der vom *zukünftigen Wert* eines Wirtschaftsguts *abgeleitet* ist. Spezielle Derivate sind:

- *Forwards* und *Futures*
- *Optionen*
- *Swaps*.

Bei einem *Forward* verpflichtet sich der Verkäufer eines bestimmten Wirtschaftsguts gegenüber dem Käufer zur Lieferung einer festgelegten Menge zu einem festgelegten Zeitpunkt. Der Verkaufspreis kann dabei im vorhinein oder erst zum Zeitpunkt der Lieferung festgelegt werden. Solche Verträge können unmittelbar zwischen juristischen Personen abgeschlossen werden, sind i.a. nicht standardisiert und müssen auch nicht notwendig an Börsen gehandelt werden. Im Gegensatz dazu ist ein *Future* ein standardisierter, börsenmäßig gehandelter *Forward*, der durch ein sog. *Clearing House* als Vermittler zwischen Verkäufer und Käufer abgewickelt wird; Handelskonditionen (z.B. Preise) werden veröffentlicht.

Unter einer *Option* versteht man das Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Wirtschaftsguts zu einem im voraus festgesetzten Preis (engl. *Exercise Price*) zu kaufen (*Call-Option*) oder zu verkaufen (*Put-Option*). Darf das Recht *innerhalb einer bestimmten Frist* ausgeübt werden, spricht man von einer *Amerikanischen Option*; ist die Ausübung des Rechts auf einen *bestimmten Zeitpunkt* beschränkt, spricht man von einer *Europäischen Option*.

Die Ausübung der Option hängt i.a. davon ab, wie sich der Preis des Wirtschaftsguts z.B. an der Börse entwickelt; im Fall einer Call-Option wird man diese vernünftigerweise etwa nur dann ausüben, wenn der Börsenpreis des Wirtschaftsguts *über* dem vereinbarten Kaufpreis liegt, so dass sich durch die entstehende Preisdifferenz ein Vorteil für den Inhaber der Option ergibt. Liegt der Börsenpreis dagegen *unter* dem vereinbarten Kaufpreis, wird man die Option sinnvollerweise nicht ausüben, da man das betreffende Wirtschaftsgut in diesem Fall billiger direkt an der Börse erwerben kann. Daneben gibt es eine Reihe weiterer Options-Typen, die als *Exotische Optionen* bezeichnet werden, bei denen die Ausübung des Rechts vom Verlauf der Handelspreise abhängt.

Unter einem *Swap* versteht man einen Vertrag, bei dem der simultane Kauf und Verkauf ähnlicher Wirtschaftsgüter oder Forderungen *von gleichem Finanzvolumen* zu einem festgelegten Zeitpunkt vereinbart wird. Gängige Swaps sind *Zins-Swaps*, die sich auf zukünftige Zahlungen (z.B. Kreditvergabe / Schuldenaufnahme) zwischen den Beteiligten – i.a. mit *unterschiedlichen Zinssätzen* – beziehen; *Währungs-Swaps* bezeichnen Swaps, bei denen unterschiedliche Währungen zu zukünftigen Zeitpunkten gewechselt werden.

In diesem Text werden wir ausschließlich *Optionen* vom Europäischen Typ behandeln; in den Beispielen beziehen wir uns dabei meist auf *Aktienmärkte*. Gebühren oder andere Transaktionskosten werden hier aus Vereinfachungsgründen nicht betrachtet.

Die folgenden Bezeichnungen sind wesentlich:

T : Laufzeit; Verfalltag (engl. *Time*)

X : Ausübungspreis; Basispreis (engl. *eXercise Price*)

S_t : Preis des Wirtschaftsguts (Kurswert) zur Zeit $t \in [0, T]$ (engl. *Stock Price* [bei Aktien])

i : (risikoloser) Zinssatz (engl. *Interest Rate*)

Wie schon oben erläutert, hängt die sinnvolle Ausübung des mit dem Erwerb der Option verbundenen Rechts zur Zeit T von dem Verhältnis des Kurswerts zur Zeit T zum Ausübungspreis X ab:

Call-Option:	$S_T > X$:	Option ausüben
	$S_T \leq X$:	Option nicht ausüben
Put-Option:	$S_T < X$:	Option ausüben
	$S_T \geq X$:	Option nicht ausüben

Das wesentliche Ziel besteht nun darin, den "richtigen" Preis C_0 der Call-Option bzw. P_0 der Put-Option zur Zeit 0, also zum Zeitpunkt des Erwerbs bzw. Verkaufs des entsprechenden Rechts, zu bestimmen. Dazu betrachten wir zunächst den Preis (Wert) der Option zum Verfalltag T . Da zu diesem Zeitpunkt der Kurswert des Wirtschaftsguts bekannt ist und aus dem Erwerb der Option keine Vorteile zur Zeit T abgeleitet werden sollen, ergibt sich für die entsprechenden Preise (Werte) C_T bzw. P_T :

$$C_T = \max \{S_T - X; 0\} = (S_T - X)^+ \quad (\text{Positivteil})$$

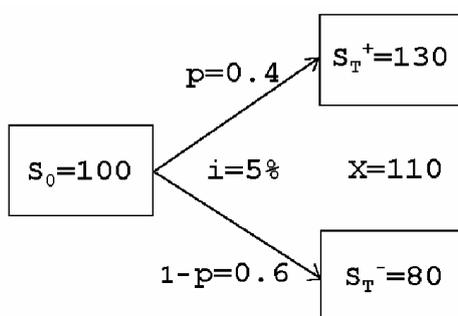
$$P_T = \max \{X - S_T; 0\} = (X - S_T)^+$$

Ist beispielsweise im Fall der Call-Option auf eine Aktie $S_T > X$, so kann der Inhaber der Option vom *Stillhalter* (d.h. dem Verkäufer der Option) die Lieferung einer Aktie zum Preis X verlangen und diese zeitgleich an der Börse zum höheren Preis $S_T > X$ verkaufen; sein Gewinn beträgt somit gerade $S_T - X = C_T$, also den Wert der Option zur Zeit T .

Aus obigem ergibt sich unmittelbar noch die folgende Beziehung zwischen Call- und Put-Preis:

$$C_T - P_T = S_T - X \quad (\text{Put - Call - Parity - Relation})$$

Im folgenden betrachten wir zunächst das sog. *Zwei-Stufen-Ein-Perioden-Modell*, d.h. wir gehen davon aus, dass der anfängliche Kurswert S_0 der Aktie bis zum Verfalltag T entweder auf den Wert $S_T^+ > S_0$ steigt oder auf den Wert $S_T^- < S_0$ fällt, wobei wir noch $S_T^- < X < S_T^+$ voraussetzen wollen.



Die Wahrscheinlichkeit eines Kursanstiegs sei $p \in (0,1)$; entsprechend ist $1-p$ die Wahrscheinlichkeit für einen Kursverfall. Das folgende Beispiel ist dem Artikel von Eberlein [11] entnommen. Hier beträgt der Anfangskurs der Aktie € 100, mit Wahrscheinlichkeit 0.4 steigt er auf den Wert € 130 bzw. fällt mit Wahrscheinlichkeit 0.6 auf den Wert € 80. Der Ausübungspreis betrage € 110, der Zinssatz für die betrachtete Periode betrage 5%. Welchen Preis C_0 sollte der Käufer einer entsprechenden Call-Option bezahlen?

Betrachten wir zunächst die möglichen Werte C_T^+ und C_T^- der Call-Option zum Verfalltag. Diese können als Werte der Zufallsvariablen C_T aufgefaßt werden. Im Beispiel gilt offenbar $C_T^+ = 130 - 110 = 20$ und $C_T^- = 0$. Wenn man diese Werte auf den Zeitpunkt 0 beziehen möchte,

muss man sie allerdings noch diskontieren, d.h. mit dem sog. Diskontfaktor $v = 1/(1+i)$ multiplizieren; man erhält also $v \cdot C_T^+ = 20/1.05 = 19,05$ (€) und $v \cdot C_T^- = 0$ (€). Man kann nun die obige Situation als ein Spiel auffassen, in dem der Käufer der Option gegen den "Markt" spielt. Der Optionspreis entspricht dann dem Einsatz für ein "faïres" Spiel. Es gibt hier allerdings (mindestens) zwei Möglichkeiten, "Fairness" zu definieren:

1. Variante eines fairen Spiels: Der Käufer sollte im Durchschnitt weder Gewinn noch Verlust erzielen, wenn er ausschließlich mit Optionen handelt; demnach ist der Erwartungswert

$$C_0 = E(v \cdot C_T) = p \cdot v \cdot C_T^+ = 0.4 \times 19,05 = \mathbf{7,62}$$

der "richtige" Optionspreis. Die Betonung bei dieser Betrachtungsweise liegt dabei auf dem Wort *ausschließlich*; tatsächlich lässt sich nämlich leicht zeigen, dass ein geschickter Käufer, der nicht nur mit Optionen, sondern auch mit Aktien (und Geld) handelt, mit dem obigen Options-Preis *in jedem Fall* einen Gewinn erzielen kann, unabhängig davon, in welche Richtung sich der Aktienkurs entwickelt! Die folgende Tabelle zeigt, wie dies hier zu bewerkstelligen ist:

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Leerverkauf 2 Aktien	+200,00	-260,00	-160,00
Kauf 5 Call-Optionen	-38,10	+100,00	0,00
Kredit vergeben	-161,90	+170,00	+170,00
Saldo	0,00	+10,00	+10,00

Erläuterung: Bei einem sog. *Leerverkauf* zum Zeitpunkt 0 leiht sich der Veräußerer z.B. von einer Bank Aktien gegen die Hinterlegung einer Sicherheit mit der Vereinbarung, entsprechend viele Aktien dieses Typs zu dem späteren Zeitpunkt T zurückgeben; der Verkauf erfolgt also zum Zeitpunkt 0, zu dem dann gültigen Preis [hier: €100]. Unser hypothetischer Options-Käufer erzielt also zum Zeitpunkt 0 eine Einnahme von €200 für zwei leerverkaufte Aktien, von denen er erst zum Zeitpunkt T selbst zwei auf dem Markt erwirbt, um sie dann vereinbarungsgemäß der Bank zurückzugeben. (In der Praxis fallen für solche Leerverkäufe Gebühren an, die wir in unserem Modell allerdings nicht berücksichtigen wollen.) Je nach Kursentwicklung wird sein Konto also zur Zeit T mit einem Betrag von €260 [steigender Kurs] bzw. €160 [fallender Kurs] belastet. Da die fünf im Gegenzug erworbenen Call-Optionen aber nur €38,10 kosten, hat er zur Zeit 0 ein Guthaben von €161,90, welches er zu einem Zinssatz von 5% ausleiht und zum Zeitpunkt T einschließlich Zinsen im Gesamtwert von €170 zurückerhält. Zum Zeitpunkt 0 ist sein Konto also mit Wert 0 ausgeglichen.

Die beiden rechten Spalten der Tabelle zeigen die Kontoentwicklung zum Zeitpunkt T . Im Fall einer Kurssteigerung wird unser Käufer sinngemäß das Kaufrecht aus den fünf erworbenen Call-Optionen ausüben; d.h. er erwirbt 5 Aktien zum vereinbarten Ausübungspreis von €110 und verkauft sie sofort an der Börse zum aktuellen Kurs von €130, woraus ein Netto-Gewinn von $€5 \times 20 = 100$ resultiert. Im Fall eines sinkenden Kurses sind die Optionen natürlich wertlos.

Offensichtlich kann unser Options-Käufer unabhängig von der tatsächlichen Kursentwicklung also in jedem Fall einen Netto-Gewinn von €10 realisieren! Man spricht in einem solchen Fall auch von einer sog. *Arbitrage-Möglichkeit*, d.h. der Möglichkeit, ohne eigenen finanziellen Aufwand mit positiver Wahrscheinlichkeit ein positives Ergebnis zu erzielen.

2. Variante eines fairen Spiels: Der Käufer sollte im Durchschnitt weder Gewinn noch Verlust erzielen, wenn er mit *Optionen, Aktien und Geld* handelt. Dazu betrachten wir zunächst eine Situation mit einem höheren Optionspreis als dem oben angegebenen, etwa $C_0 = 12$. Die folgende Tabelle zeigt, dass auch dann eine sichere Arbitrage-Möglichkeit existiert:

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Kauf 2 Aktien	-200,00	+260,00	+160,00
Verkauf 5 Call-Optionen	+60,00	-100,00	0,00
Kredit aufnehmen	+140,00	-147,00	-147,00
Saldo	0,00	+13,00	+13,00

Um solche Arbitrage-Möglichkeiten auszuschließen, wollen wir nun einen allgemeineren Ansatz betrachten. Aus Gründen, die später deutlicher werden, setzen wir dazu noch voraus, dass $S_T^+ > r S_0$ gilt, d.h. es muss theoretisch möglich sein, am Aktienmarkt eine höhere Rendite als auf dem Geldmarkt – mit dem "risikolosen" Zins i – zu erzielen.

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Leerverkauf n Aktien	$+n S_0$	$-n S_T^+$	$-n S_T^-$
Kauf m Call-Optionen	$-m C_0$	$m(S_T^+ - X)$	0,00
Kredit vergeben	$-(n S_0 - m C_0)$	$r(n S_0 - m C_0)$	$r(n S_0 - m C_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

Dabei ist $r = 1 + i$ der Zinsfaktor für die betrachtete Periode T . Aus den beiden rechten Spalten ergibt sich nun die Gleichung

$$-n S_T^+ + m(S_T^+ - X) = -n S_T^-,$$

so dass das Verhältnis $h = n/m$ (sog. *Hedge Ratio*, vgl. Abschnitt 3) eindeutig bestimmt ist zu

$$h = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} = \frac{C_T^+ - C_T^-}{S_T^+ - S_T^-}$$

und als Lösung für den Call-Preis zur Zeit 0 folgt

$$C_0 = h(S_0 - v S_T^-).$$

Dasselbe Resultat hätte man – aus Symmetriegründen – übrigens auch erhalten, wenn in der letzten Tabelle mit Aktienkauf / Optionsverkauf / Kreditaufnahme statt Aktien(leer)verkauf / Optionskauf / Kreditaufnahme gerechnet worden wäre.

Im obigen Beispiel ergibt sich demnach $h = (130 - 110)/(130 - 80) = 20/50 = 0.4$ und $C_0 = 0.4 \times (100 - 80/1.05) = 9,52$. Die *Hedge Ratio* gibt dabei gerade das "richtige" Verhältnis von gehandelten Aktien zu Optionen an, hier also ein Verhältnis von $0.4 = 2:5$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass mit dem so ermittelten Call-Preis auch durch andere Aktien / Optionskombinationen keine Arbitrage erzielt werden kann. Dazu betrachten wir den Fall, dass die beiden Saldi zur Zeit $t = T$ nicht-negativ sind, was zu dem folgenden Ungleichungssystem führt:

$$\begin{aligned} -nS_T^+ + m(S_T^+ - X) + r(nS_0 - mC_0) &\geq 0 \\ -nS_T^- + r(nS_0 - mC_0) &\geq 0 \quad \text{bzw.} \\ m(S_T^+ - X - rC_0) &\geq n(S_T^+ - rS_0) \\ mrC_0 &\leq n(rS_0 - S_T^-) = nr(S_0 - vS_T^-) = \frac{nrC_0}{h}. \end{aligned}$$

Durch weitere Umformung erhält man:

$$S_T^+ - X - rC_0 = S_T^+ - X - h(rS_0 - S_T^-) = h(S_T^+ - S_T^-) - h(rS_0 - S_T^-) = h(S_T^+ - rS_0)$$

und damit nach Kürzen die Ungleichungskette $mh \leq n \leq mh$, also $mh = n$ und damit das ursprüngliche Gleichungssystem, in dem alle Saldi Null betragen. Man beachte dabei, dass hierfür die obige Voraussetzung $S_T^+ > rS_0$ wesentlich ist!

Interessanterweise hängt der Call-Preis C_0 nach der letzten Formel gar nicht mehr von der Wahrscheinlichkeit p eines Kursanstiegs ab! Trotzdem kann man diesen Call-Preis immer noch als Erwartungswert interpretieren, wenn man die "richtige" Wahrscheinlichkeit p^* für einen Kursanstieg entsprechend bestimmt, d.h. man betrachtet die Gleichung

$$C_0 = h(S_0 - vS_T^-) = p^*vC_T^+$$

mit

$$p^* = h \frac{S_0 - vS_T^-}{vC_T^+} = \frac{rS_0 - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-}$$

als Lösung. Nach der Voraussetzung $S_T^+ > rS_0$ ist dabei $p^* < 1$, nach der Voraussetzung $S_T^- < S_0$ ferner auch $p^* > 0$, d.h. p^* ist damit tatsächlich eine Wahrscheinlichkeit. Man beachte, dass für die letzte Ungleichung auch noch die schwächere Bedingung $S_T^- < rS_0$ ausgereicht hätte.

Ist umgekehrt $rS_0 \notin (S_T^-, S_T^+)$, so bestehen immer „einfache“ Arbitragemöglichkeiten: bei $rS_0 \leq S_T^-$ kaufe man etwa Aktien auf Kredit (dann verliert man zur Zeit T nichts bei fallendem

Kurs, realisiert aber bei steigendem Kurs einen positiven Gewinn in Höhe von $S_T^+ - r S_0$ je Aktie), bei $r S_0 \geq S_T^+$ verkaufe man etwa Aktien leer (dann verliert man zur Zeit T nichts bei steigendem Kurs, realisiert aber bei fallendem Kurs einen positiven Gewinn in Höhe von $r S_0 - S_T^-$ je Aktie). Die Voraussetzung $S_T^- < r S_0 < S_T^+$ ist also nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die Existenz eines arbitragefreien Call-Preises in unserem Modell.

Im obigen Beispiel ergibt sich $p^* = (105 - 80)/(130 - 80) = 25/50 = 0.5$, d.h. würde die Wahrscheinlichkeit für einen Kursanstieg gerade 0.5 betragen, wäre C_0 nach der obigen allgemeinen Formel genau der Erwartungswert nach "Variante 1".

Diese Betrachtungsweise ist charakteristisch für die gesamte Stochastische Finanzmathematik, d.h. es kommt bei der Bewertung von Derivativen (Optionen) nicht auf die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten p von Kursveränderungen, sondern allein auf die rechnerisch äquivalenten Wahrscheinlichkeiten p^ an, unter denen die Optionspreise nach dem Erwartungswert-Prinzip Arbitragemöglichkeiten ausschließen.*

Entsprechende Überlegungen lassen sich natürlich auch für Put-Optionen anstellen. Die folgende Tabelle zeigt die analoge Rechnung gleich im allgemeinen Rahmen (wieder unter der Voraussetzung $S_T^- < r S_0 < S_T^+$):

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Kauf n Aktien	$-n S_0$	$+n S_T^+$	$+n S_T^-$
Kauf m Put-Optionen	$-m P_0$	0,00	$m(X - S_T^-)$
Kredit aufnehmen	$n S_0 + m P_0$	$-r(n S_0 + m P_0)$	$-r(n S_0 + m P_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

mit der modifizierten *Hedge Ratio*

$$h^* = \frac{n}{m} = \frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = \frac{P_T^+ - P_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = 1 - h$$

für Put-Optionen und dem Put-Preis

$$P_0 = h^* (v S_T^+ - S_0).$$

Im obigen Beispiel erhält man also $h^* = 0.6$ und $P_0 = 0.6 \times (130/1.05 - 100) = \mathbf{14,29}$.

Auch hier lässt sich mit einer analogen Rechnung wie oben leicht zeigen, dass für den so ermittelten Put-Preis auch durch andere Kombinationen von Aktien und Optionen keine Arbitragemöglichkeit ergibt.

Für die *Put-Call-Parity-Relation* zur Zeit 0 ergibt sich hieraus nebenbei noch die Beziehung $C_0 - P_0 = S_0 - vX$, die zusammen mit der anfänglichen Put-Call-Parity-Relation auch geschrieben werden kann als

$$C_t - P_t = S_t - v^{1-t/T} X, \quad t \in \{0, T\}.$$

Diese Formel ist auch in allgemeineren Modellen der Optionspreis-Theorie gültig [d.h. auch für andere Werte von t im Bereich $(0, T)$]; allerdings können wir den Nachweis dafür an dieser Stelle nicht führen.

3. Hedging

In der betriebswirtschaftlichen Praxis werden derivative Finanzinstrumente in der Regel weniger zu spekulativen, sondern häufiger zu werterhaltenden Zwecken eingesetzt. Man spricht dann auch von einem *Hedging* des zugrundeliegenden Portfolios (engl. *to hedge (against s.th.)*): (sich gegen etwas) absichern). Das folgende Beispiel zeigt, wie man einen Bestand von Aktien mit Hilfe von Call-Optionen nicht nur gegen Kursschwankungen absichern, sondern zugleich auch den Wert wie bei Verzinsung mit dem risikolosen Zinssatz i steigern kann. Zugrunde liegt hierbei wieder die Ausgangssituation des Abschnitts 2, insbesondere der arbitragefreie Call-Preis C_0 . Es wird dabei angenommen, dass man zur Zeit 0 im Besitz von 40 Aktien zum Kurswert €100,- je Aktie ist.

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Konto	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Besitz 40 Aktien	+4000,00	+5200,00	+3200,00
Verkauf 100 Call-Optionen	+952,38	-2000,00	0,00
Kredit vergeben	-952,38	+1000,00	+1000,00
Saldo	+4000,00	+4200,00	+4200,00

Die Anzahl der verkauften Call-Optionen richtet sich dabei wie zuvor nach der *Hedge Ratio*, hier also $40:100 = 2:5 = h$. Im Unterschied zu früher wird der Anfangssaldo dabei aber nicht zu Null gemacht, sondern entspricht dem anfänglichen Wert der gehaltenen Aktien. Dies bedeutet, dass lediglich der durch den Verkauf der Call-Optionen erzielte Gewinn auf dem Kapitalmarkt zum risikolosen Zinssatz i angelegt wird. Das obige Rechenbeispiel zeigt, dass sowohl im Fall des Kursanstiegs als auch in der Situation eines Kursverfalls der resultierende Saldo um 5% über dem Anfangssaldo liegt, der Portfoliowert also insgesamt entsprechend dem risikolosen Zins angestiegen ist. Die nachfolgende allgemeine Rechnung zeigt, dass dies grundsätzlich so ist, wenn das Verhältnis $n : m$ von gehaltenen Aktien zu verkauften Call-Optionen der Hedge Ratio h entspricht.

Ähnlich wie in Abschnitt 2 lässt sich dabei zeigen, dass dies zugleich die optimale Mischung von Aktien zu Optionen ist, d.h. durch keine andere Stückzahl-Kombination lässt sich ein gleichmäßig besserer Saldo – unabhängig von der Kursentwicklung – erzielen.

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Konto	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Besitz n Aktien	$+n S_0$	$+n S_T^+$	$+n S_T^-$
Verkauf m Call-Optionen	$+m C_0$	$-m(S_T^+ - X)$	0,00
Kredit vergeben	$-m C_0$	$+rm C_0$	$+rm C_0$
Saldo	$+n S_0$	$+rn S_0$	$+rn S_0$

Wir müssen die zum Zeitpunkt $t = T$ angegebenen resultierenden Saldi noch durch Rechnung nachprüfen. Wir benutzen dazu die früher hergeleiteten Formeln

$$h = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} = \frac{C_T^+ - C_T^-}{S_T^+ - S_T^-} \quad \text{und} \quad C_0 = h(S_0 - v S_T^-).$$

Damit erhalten wir im Falle eines Kursanstiegs

$$\begin{aligned} n S_T^+ - m(S_T^+ - X) + rm C_0 &= n S_T^+ - n(S_T^+ - S_T^-) + mh(r S_0 - S_T^-) \\ &= n S_T^+ - n(S_T^+ - S_T^-) + n(r S_0 - S_T^-) = rn S_0 \end{aligned}$$

sowie

$$n S_T^- + rm C_0 = n S_T^- + mh(r S_0 - S_T^-) = n S_T^- + n(r S_0 - S_T^-) = rn S_0$$

in der Situation eines Kursverfalls, wie behauptet.

Natürlich ist ein Hedging analog auch mit Put-Optionen möglich. Die folgende Tabelle zeigt, wie in diesem Fall vorzugehen ist:

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Konto	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Besitz n Aktien	$+n S_0$	$+n S_T^+$	$+n S_T^-$
Kauf m Put-Optionen	$-m P_0$	0,00	$m(X - S_T^-)$
Kredit aufnehmen	$+m P_0$	$-rm P_0$	$-rm P_0$
Saldo	$+n S_0$	$+rn S_0$	$+rn S_0$

Hierbei ist für das Verhältnis $n : m$ natürlich entsprechend die *Hedge Ratio* $h^* = 1 - h$ für Put-Optionen anzuwenden. Mit den Formeln

$$h^* = \frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = \frac{P_T^+ - P_T^-}{S_T^+ - S_T^-} \quad \text{und} \quad P_0 = h^* (v S_T^+ - S_0)$$

erhalten wir für die resultierenden Saldi im Falle eines Kursanstiegs analog

$$n S_T^+ - r m P_0 = n S_T^+ - m h^* (S_T^+ - r S_0) = n S_T^+ - n (S_T^+ - r S_0) = r n S_0$$

sowie

$$\begin{aligned} n S_T^- + m (X - S_T^-) - r m P_0 &= n S_T^- + n (S_T^+ - S_T^-) - m h (S_T^+ - r S_0) \\ &= n S_T^- + n (S_T^+ - S_T^-) - n (S_T^+ - r S_0) = r n S_0 \end{aligned}$$

in der Situation eines Kursverfalls.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Hedge-Ratio-Formeln $h = \frac{C_T^+ - C_T^-}{S_T^+ - S_T^-}$ für Call-Optionen

bzw. $h^* = \frac{P_T^+ - P_T^-}{S_T^+ - S_T^-}$ für Put-Optionen auch dann richtig bleiben, wenn der Ausübungspreis X nicht zwischen S_T^- und S_T^+ liegt.

4. Die Hebelwirkung von Optionen

In diesem Abschnitt wollen wir – bei gleichem Kapitaleinsatz – die Auswirkungen reiner Optionsgeschäfte gegenüber reinen Aktiengeschäften betrachten. Die Zahlen gehandelter Aktien n und gehandelter Optionen m seien also so gewählt, dass der Kapitaleinsatz $K = n S_0 = m C_0$ stets gleich hoch ist. (Die Anzahlen n und m haben hier also eine andere Bedeutung als in den vorangegangenen Abschnitten.)

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Kauf n Aktien	$-n S_0$	$+n S_T^+$	$+n S_T^-$
Kredit aufnehmen	$+n S_0$	$-r n S_0$	$-r n S_0$
Saldo	0,00	$n (S_T^+ - r S_0)$	$-n (r S_0 - S_T^-)$

reines Aktiengeschäft

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Kauf m Call-Optionen	$-m C_0$	$m(S_T^+ - X)$	0,00
Kredit aufnehmen	$+m C_0$	$-r m C_0$	$-r m C_0$
Saldo	0,00	$m(S_T^+ - X - r C_0)$	$-r m C_0$

reines Optionsgeschäft

Setzt man die oben hergeleitete Optionspreis-Formel $C_0 = h(S_0 - v S_T^-)$ in die Ergebnisse der unteren Zeile der letzten Tabelle ein, so ergibt sich:

$$-r m C_0 = -r m h (S_0 - v S_T^-) = -m h (r S_0 - S_T^-) = -\frac{m h}{n} \times n (r S_0 - S_T^-)$$

$$m(S_T^+ - X - r C_0) = m(S_T^+ - X - h[r S_0 - S_T^-]) = \frac{m h}{n} \times n(S_T^+ - r S_0),$$

d.h. die Saldi aus reinem Aktiengeschäft und reinem Optionsgeschäft unterscheiden sich aufgrund der Beziehung $n S_0 = m C_0$, also $\frac{m}{n} = \frac{S_0}{C_0}$ genau um den Faktor

$$\tau = \frac{m h}{n} = 1 + \frac{S_T^-}{r S_0 - S_T^-} > 1.$$

Dies bedeutet:

- Bei gleichem Kapitaleinsatz sind Gewinne bzw. Verluste aus einem reinen Optionsgeschäft gegenüber einem reinen Aktiengeschäft um den Faktor $\tau > 1$ größer.
- Bei gleichem Kapitaleinsatz werden im Fall positiver Gewinne bei einem reinen Optionsgeschäft mehr Aktien bewegt als bei einem reinen Aktiengeschäft, und zwar genau $m/n = \tau/h$ mal so viele.
- Die Rendite R_O^+ aus einem Optionsgeschäft ist im Fall positiver Gewinne entsprechend größer als die Rendite R_A^+ bei einem reinen Aktiengeschäft (Hebelwirkung oder *Leverage-Effekt*). Die Renditen lassen sich dabei darstellen als:

$$R_O^+ := \frac{S_T^+ - X - C_0}{C_0} = \frac{S_T^+ - X}{C_0} - 1 = \frac{S_T^+ - S_T^-}{S_0 - v S_T^-} - 1 \quad (\text{Optionsgeschäft})$$

$$R_A^+ := \frac{S_T^+ - S_0}{S_0} = \frac{S_T^+}{S_0} - 1 < R_O^+ \quad (\text{Aktiengeschäft}).$$

Für die Negativ-Renditen im Fall von Verlusten folgt entsprechend:

$$R_O^- := \frac{0 - C_0}{C_0} = -1 \quad (\text{Optionsgeschäft; Totalverlust})$$

$$R_A^- := \frac{S_T^- - S_0}{S_0} = \frac{S_T^-}{S_0} - 1 > R_O^- \quad (\text{Aktiengeschäft}).$$

Im Anfangsbeispiel gilt etwa

$$\tau = 1 + \frac{80}{105 - 80} = 1 + \frac{80}{25} = 4.2$$

$$\frac{\tau}{h} = 4.2 \times \frac{130 - 80}{130 - 110} = \frac{210}{20} = 10.5$$

$$R_O^+ = \frac{130 - 110 - 10v}{10v} = \frac{20 - 10v}{10v} = \frac{20r - 10}{10} = \frac{11}{10} = 110\%$$

$$R_A^+ = \frac{130 - 100}{100} = \frac{30}{100} = 30\%$$

$$R_O^- = -1 = -100\%$$

$$R_A^- = \frac{80 - 100}{100} = -\frac{20}{100} = -20\%.$$

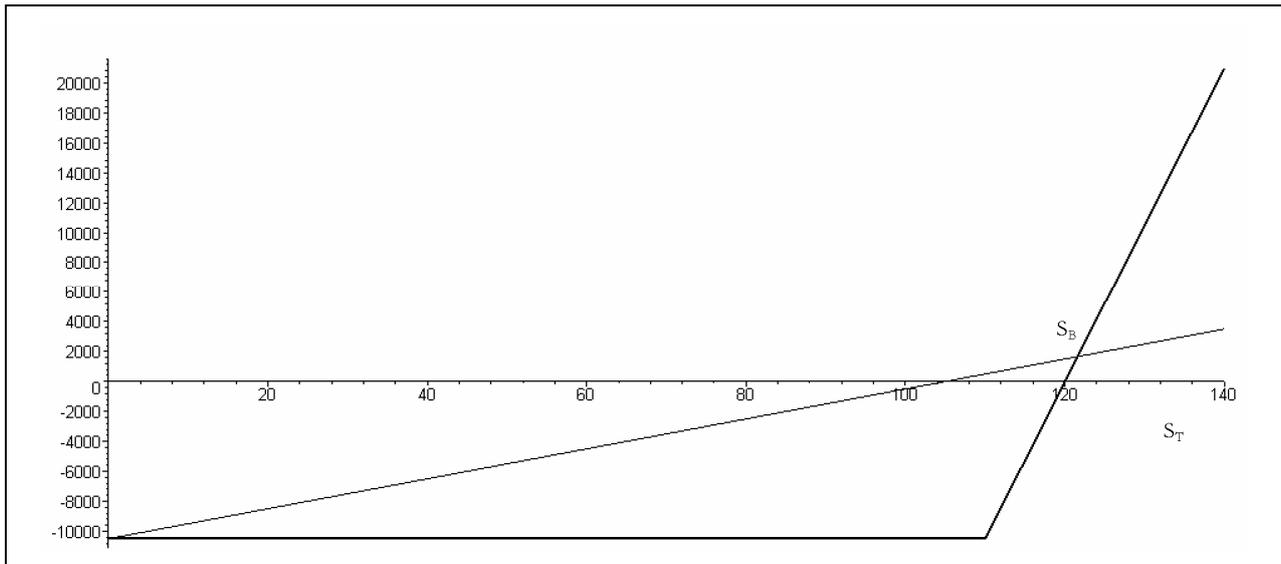
Legt man im Modell wieder die äquivalenten Wahrscheinlichkeiten p^* statt p zugrunde, so ergibt sich außerdem noch für den Gewinn bzw. Verlust G bei Handel mit n Aktien bzw. m Call-Optionen:

$$E^*(G) = n \left[p^* (S_T^+ - r S_0) - (1 - p^*) (r S_0 - S_T^-) \right] = n \left[p^* (S_T^+ - S_T^-) + S_T^+ - r S_0 \right] = 0,$$

d.h. unter p^* ist der Aktien- bzw. Optionshandel bezüglich des Gewinns im Mittel ausgeglichen, was noch einmal die Motivation für die Variante 2 des fairen Spiels aus einer anderen Sicht unterstreicht.

Die Hebelwirkung von Optionsgeschäften lässt sich besonders gut veranschaulichen, wenn man derivative Finanzinstrumente zu Spekulationszwecken einsetzt, d.h. wenn man davon ausgeht, dass der Aktienkurs zur Zeit T nicht nur den Endstand S_T^+ oder S_T^- annehmen, sondern einen beliebigen, nicht-negativen Wert erreichen kann.

Die folgende Graphik zeigt für diesen Fall die Hebelwirkung von Optionsgeschäften für die im obigen Beispiel genannten Konditionen.



Gewinn / Verlust aus Optionen (dicke Linie) und aus Aktien (dünne Linie) als Funktion des Kurswerts S_T ; $C_0 = 9,52$, $X = 110$, $K = 10000$, $i = 5\%$; $n = 100$, $m = 1050$

Die Gleichungen der beiden Geraden für die Gewinne G_A aus Aktien und G_O aus Optionen im Bereich $S_T \geq X = 110$ sind in diesem Modell gegeben durch

$$G_A = n(S_T - rS_0) = 100S_T - 10500$$

$$G_O = m[(S_T - X)^+ - rC_0] = 1050(S_T - 110) - 10500 = 1050S_T - 126000;$$

die zugehörigen Steigungen betragen also $n = 100$ [für das Aktiengeschäft] bzw. $m = n\tau / h = 1050$ [für das Optionsgeschäft]. Der Break-Even-Point S_B ergibt sich in diesem Modell zu

$$S_B = \frac{mX}{m-n} = \frac{\tau X}{\tau - h} = 121,58,$$

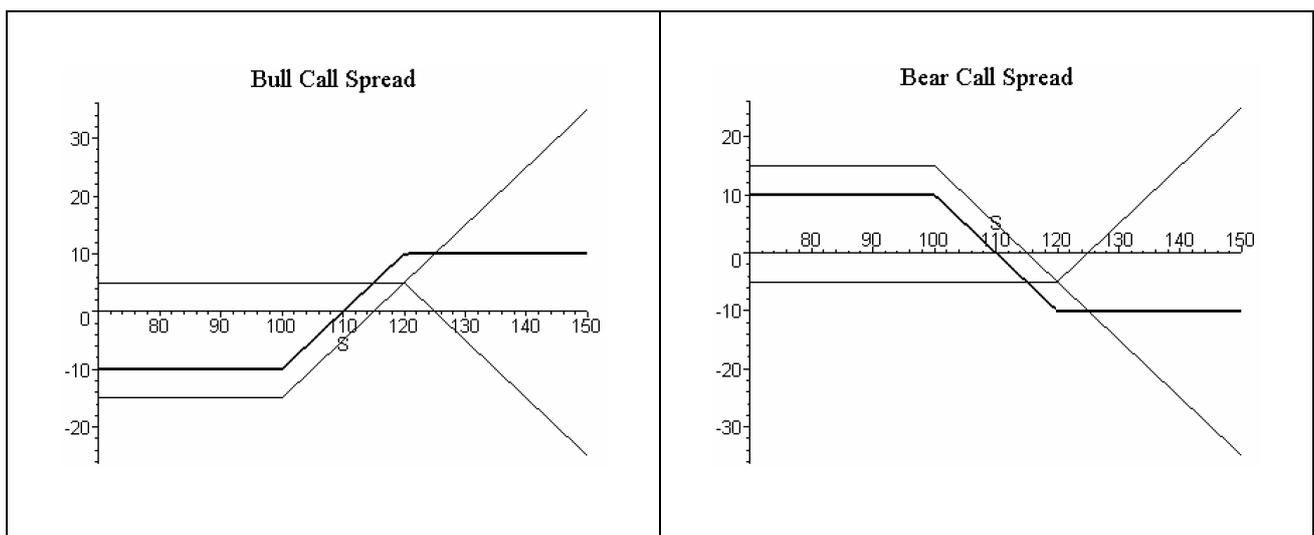
d.h. das Optionsgeschäft "lohnt" sich erst dann, wenn der Aktienkurs zur Zeit T über den Wert $S_B = 121,58$ steigt. Die Gewinnzone wird dabei beim Aktiengeschäft bereits beim Kurs von $S_T = rS_0 = 105$ erreicht, beim Optionsgeschäft dagegen erst beim Kurs von $S_T = X + rC_0 = 120$. Für Kurswerte unter dem Ausübungspreis spricht man auch davon, die Call-Option sei "aus dem Geld" (engl.: *out of the money*), für Kurswerte über dem Ausübungspreis nennt man die Call-Option "im Geld" (engl.: *in the money*); sind Kurswert und Ausübungspreis identisch, heißt die Call-Option "am Geld" (engl.: *at the money*).

Ein Diagramm der obigen Art, in welchem Gewinne und Verluste eines Portfolios in Abhängigkeit vom aktuellen Kurs der Aktie dargestellt werden, heißt auch *Pay-off-Diagramm*.

5. Kombinationen von Optionsgeschäften

In diesem Abschnitt wollen wir den "spekulativen" Aspekt von Optionsgeschäften ein wenig weiter vertiefen, indem wir die Auswirkungen bestimmter Kombinationen, die in der Praxis häufig anzutreffen sind, untersuchen, wie z.B. gleichzeitiger Kauf und Verkauf gewisser Optionen. Ausgangspunkt unserer Rechnungen ist dabei wieder das obige Beispiel von Eberlein, d.h. bei der Berechnung der Optionspreise gehen wir von der Annahme aus, dass die zukünftigen Kurse nur zwei Werte annehmen können; wir untersuchen allerdings die Auswirkungen der getätigten Geschäfte für eine wesentlich größere Bandbreite möglicher zukünftiger Kurse.

Ein erster wichtiger Typ von Kombinationsgeschäften ist der sog. "Spread"; darunter versteht man den gleichzeitigen Kauf und Verkauf je einer Option desselben Typs zu unterschiedlichen Ausübungspreisen. Die Auswirkungen dieser Handels-Strategie bestehen im wesentlichen in einer Reduzierung des Verlustrisikos bei gleichem Kapitaleinsatz, allerdings werden die Gewinn-Chancen damit ebenfalls geringer. Die folgenden beiden Pay-off-Diagramme zeigen die Gewinne bzw. Verluste aus einem sog. *Bull-Call-Spread* und einem sog. *Bear-Call-Spread* als Funktion des Kurswerts zur Zeit T ; im ersten Fall ist der Ausübungspreis X_1 der gekauften Option niedriger als der Ausübungspreis X_2 der verkauften Option, im zweiten Fall ist es gerade umgekehrt. Mit C_{01} und C_{02} seien dabei die zugehörigen Call-Preise bezeichnet, die sich aus dem oben hergeleiteten Ansatz [Arbitragefreiheit] ergeben.

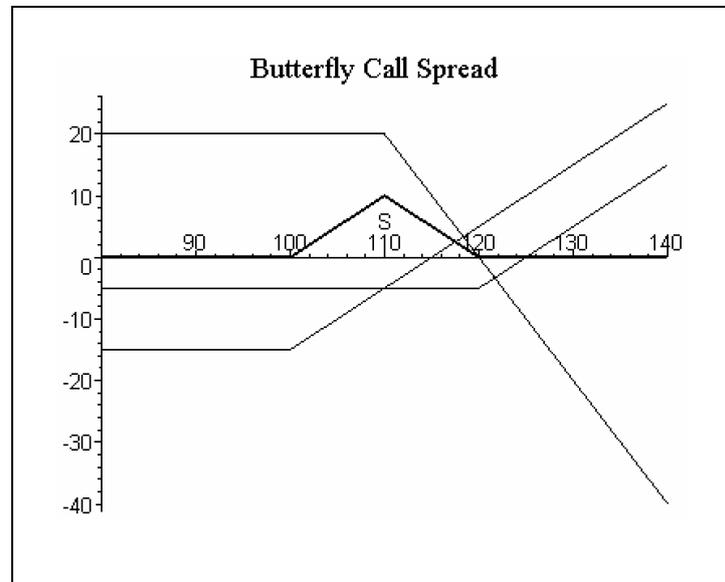


$$X_1 = 100 \quad X_2 = 120; \quad C_{01} = 14,28 \quad C_{02} = 4,76$$

$$X_1 = 120 \quad X_2 = 100; \quad C_{01} = 4,76 \quad C_{02} = 14,28$$

In beiden Fällen betragen die absoluten Kosten $|C_{01} - C_{02}| = 9,52$, d.h. die hier betrachteten Kombinationsgeschäfte sind genau so teuer wie ein Optionsgeschäft mit nur *einer* gekauften Call-Option zum Ausübungspreis von $X = 110$; allerdings sind Verlust und Gewinn in beiden Fällen begrenzt durch den Wert 10. Das Risiko bei dieser Art von Optionsgeschäft ist also relativ gering, allerdings sind hier auch die Gewinnmöglichkeiten entsprechend niedrig. Die Entscheidung für einen Bull- oder Bear-Call-Spread hängt dabei entscheidend von der Erwartung an die zukünftige Kursentwicklung ab: geht man eher von steigenden Kursen aus, wird man sich sinnvollerweise für einen Bull-Call-Spread entscheiden, im umgekehrten Fall für einen Bear-Call-Spread. Ähnliche Darstellungen ergeben sich, wenn man mit Put-Optionen arbeitet.

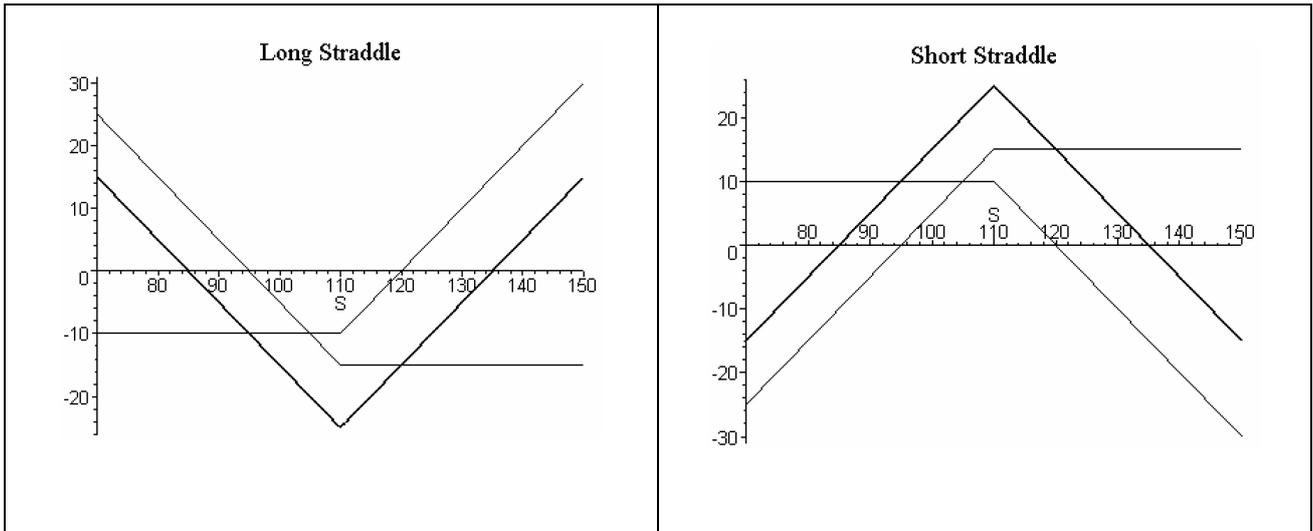
Eine besonders geschickte Kombination von Optionsgeschäften besteht in dem *Butterfly-Call-Spread*, bei dem zwei Call-Optionen zu unterschiedlichen Ausübungspreisen $X_1 < X_2$ gekauft und zwei weitere Call-Optionen zu einem dazwischenliegenden Ausübungspreis X_3 mit $X_1 < X_3 < X_2$ verkauft werden. Theoretisch ist es damit möglich, einen sicheren [nicht-negativen] Gewinn zu erzielen! Das folgende Pay-off-Diagramm zeigt wieder den Verlauf des Gewinns in Abhängigkeit vom Kurswert.



$$X_1 = 100 \quad X_2 = 120 \quad X_3 = 110; \quad C_{01} = 14,28 \quad C_{02} = 4,76 \quad C_{03} = 9,52$$

Wie man sieht, erzielt der Butterfly-Call-Spread einen sicheren positiven Gewinn für Kurse im Bereich von $X_1 = 100$ bis $X_2 = 120$, ohne einen Verlust für alle übrigen Kurswerte zu realisieren! Die ist übrigens *kein* Widerspruch zur oben geforderten Arbitragefreiheit, weil sich diese nur auf die möglichen zukünftigen Kurse von 80 bzw. 130 bezieht, und man aus der Graphik bzw. der zugehörigen Rechnung deutlich erkennt, dass für diese Kurse tatsächlich auch kein Gewinn realisierbar ist. [In der "wirklichen" Praxis scheitert dieses verlockende Geschäft allerdings an der Tatsache, dass erstens i.a. Optionspreise nicht exakt nach unserer Theorie berechnet werden, und zweitens für solche Geschäfte üblicherweise Transaktionskosten in Form von Gebühren oder Provisionen anfallen.]

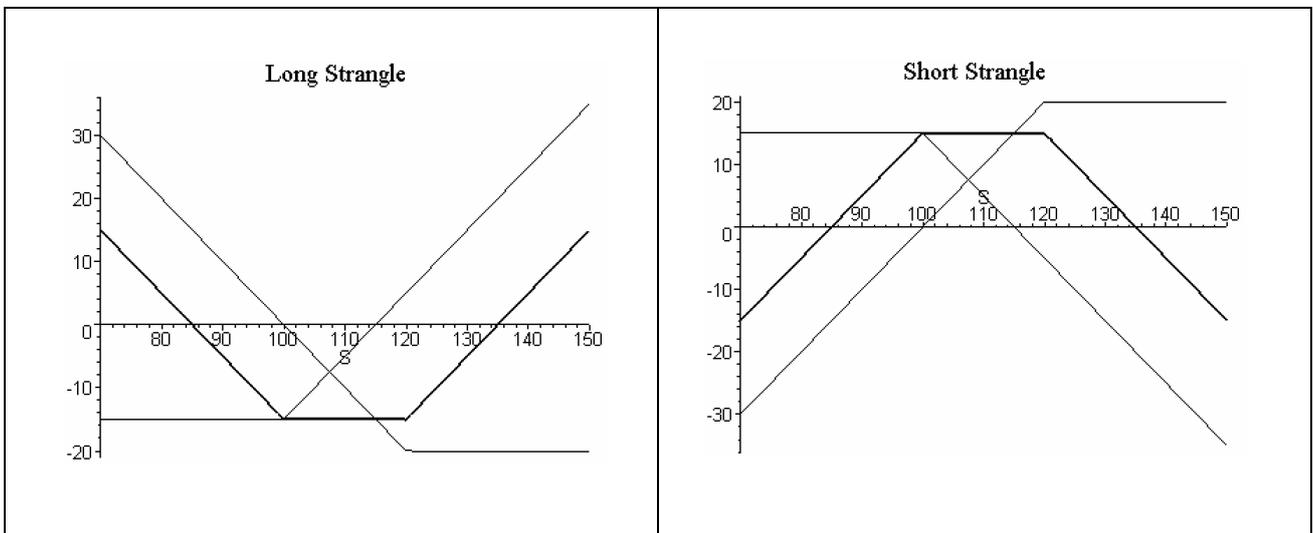
Ein ähnlicher Effekt lässt sich durch den gleichzeitigen Kauf bzw. Verkauf einer Call- und einer Put-Option zum selben Ausübungspreis X erzielen (sog. *Straddle*). Im ersten Fall (*Long Straddle*) erzielt man einen positiven Gewinn, wenn der Kurswert zur Zeit T stärker vom Ausübungspreis abweicht, im anderen Fall (*Short Straddle*), wenn der Kurswert nahe beim Ausübungspreis liegt. Auch hier bestimmt also die Erwartung an die zukünftigen Kursschwankungen das Anlegerverhalten.



$$X_1 = 110; C_0 = 9,52 \quad P_0 = 14,28$$

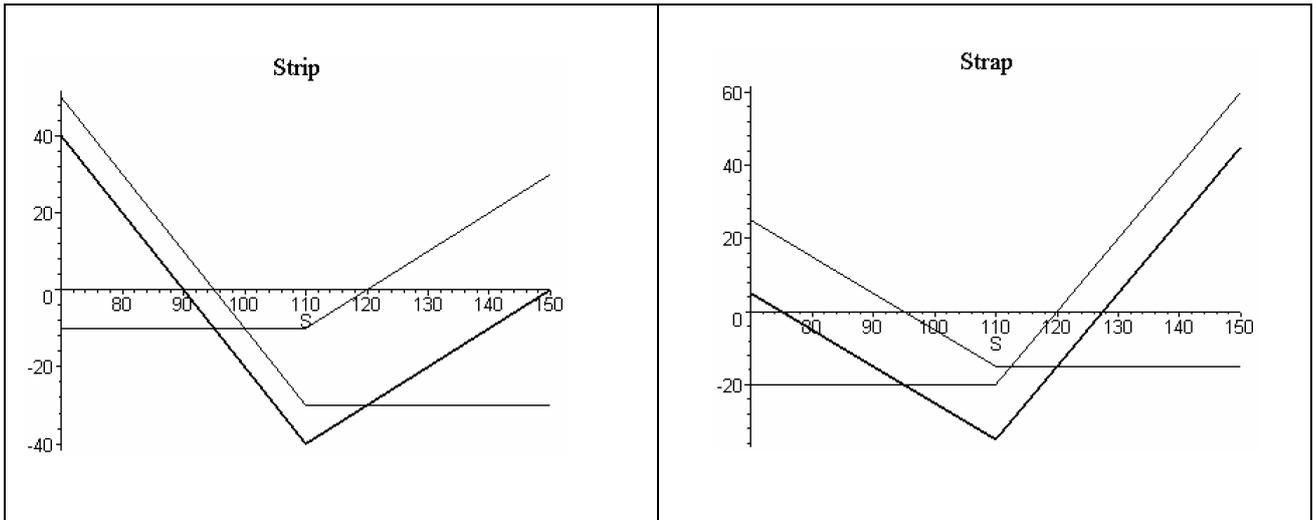
Im betrachteten Beispiel liegt die Verlust- bzw. Gewinnzone im Bereich $[85,135]$, mit maximalem Verlust / Gewinn von $C_0 + P_0 = 23,80$ für einen Kurs von $S_T = X = 110$.

Eine "Verflachung" der Spitzen erreicht man zusätzlich noch dadurch, dass die Call- und Put-Option zu *unterschiedlichen* Ausübungspreisen ge- bzw. verkauft werden (sog. *Strangle*). Im folgenden Beispiel beträgt der Ausübungspreis für die Call-Option $X_1 = 100$ und für die Put-Option $X_2 = 120$. Man beachte, dass die Verlust- / Gewinnzone hier unverändert ist, wogegen der maximale Verlust / Gewinn nur noch $15,00$ beträgt, allerdings mit höheren absoluten Preisen von $C_{01} + P_{02} = 33,33$.



$$X_1 = 100 \quad X_2 = 120; C_{01} = 14,28 \quad P_{02} = 19,04$$

Gelegentlich sind auch unsymmetrische Auszahlungen von Interesse. Dies kann man durch unterschiedliche Anzahlen ge- bzw. verkaufter Optionen realisieren (sog. *Strip* bzw. *Strap*). Die folgenden Diagramme zeigen den Gewinnverlauf für die Long-Position im Fall von einer Call- und zwei Put-Optionen (Strip) bzw. einer Put- und zwei Call-Optionen (Strap).



$$X_1 = 110; C_0 = 9,52 \quad P_0 = 14,28$$

6. Ein allgemeines Derivate-Modell

Die Ausführungen in den vorangehenden Abschnitten lassen sich wesentlich in einem einzigen Ansatz mit "abstrakten" Derivaten vereinheitlichen. Darunter wollen wir hier eine (zunächst beliebige) Funktion D des Aktienkurses (zur Zeit T) verstehen, mit den Bezeichnungen

$$D_T^+ = D(S_T^+) \quad \text{und} \quad D_T^- = D(S_T^-).$$

Mit D_0 sei entsprechend der (Arbitrage-freie) Preis zur Zeit 0 bezeichnet. Insbesondere Kombinationen von Optionen wie Futures, Spreads, Straddles usw. können mit diesem Ansatz als ein einheitliches Derivat behandelt werden.

Die entsprechenden Überlegungen zur Arbitrage-freien Preisfindung können wir wieder im gewohnten Rahmen mit einer Tabelle durchführen. Der Einfachheit halber formulieren wir das Aktiengeschäft dabei formal als Kaufgeschäft, wobei sowohl n als auch m beliebig (also positiv wie negativ) gewählt werden können; (Leer-)Verkäufe sind also in diesem Ansatz mit enthalten.

Wir stellen zunächst die Gleichungen für die Null-Saldi auf.

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	Kursanstieg	Kursabfall
Kauf n Aktien	$-n S_0$	$n S_T^+$	$n S_T^-$
Verkauf m Derivate	$+m D_0$	$-m D_T^+$	$-m D_T^-$
Kredit vergeben	$(n S_0 - m D_0)$	$-r(n S_0 - m D_0)$	$-r(n S_0 - m D_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

Wir erhalten also

$$n S_T^+ - m D_T^+ = n S_T^- - m D_T^- \text{ und damit } n(S_T^+ - S_T^-) = m(D_T^+ - D_T^-),$$

woraus sich wie früher die (Derivat-spezifische) *Hedge Ratio*

$$h_D := \frac{n}{m} = \frac{D_T^+ - D_T^-}{S_T^+ - S_T^-}$$

ergibt. Aus der mittleren bzw, rechten Spalte erhalten wir nach Einsetzen weiter

$$n S_T^\pm - m D_T^\pm = r(n S_0 - m D_0) \text{ bzw. } v h_D S_T^\pm - v D_T^\pm = h_D S_0 - D_0,$$

also

$$D_0 = h_D S_0 - (v h_D S_T^\pm - v D_T^\pm) = v D_T^\pm + h_D (S_0 - v S_T^\pm).$$

Zum Nachweis, ob bzw. dass hierdurch ein Arbitrage-freier Preis D_0 für das Derivat gegeben ist, ersetzen wir in der Tabelle die Anzahl n der Aktien durch die Anzahl $n \pm \delta$ mit $\delta > 0$ unter Beibehaltung der Menge $m = \frac{n}{h_D}$. (Eine andere Mengenaufteilung kann wegen des Null-Saldos in der ersten Spalte immer durch Kürzen bzw. Erweitern der Zahlen in dieser Spalte auf diesen Ansatz reduziert werden.)

Wir erhalten damit folgende neue Tabelle:

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	Kursanstieg	Kursabfall
Kauf $n \pm \delta$ Aktien	$-(n \pm \delta) S_0$	$(n \pm \delta) S_T^+$	$(n \pm \delta) S_T^-$
Verkauf m Derivate	$+m D_0$	$-m D_T^+$	$-m D_T^-$
Kredit vergeben	$((n \pm \delta) S_0 - m D_0)$	$-r((n \pm \delta) S_0 - m D_0)$	$-r((n \pm \delta) S_0 - m D_0)$
Saldo	0,00	$\pm \delta (S_T^+ - r S_0)$	$\pm \delta (S_T^- - r S_0)$

Eine Arbitrage-Möglichkeit ist hier genau dann ausgeschlossen, wenn die Differenzen $S_T^+ - r S_0$ und $S_T^- - r S_0$ unterschiedliches Vorzeichen besitzen, also wegen der nach Konvention sinnvollen Annahme $S_T^- < S_T^+$ genau dann, wenn

$$S_T^- < r S_0 < S_T^+$$

gilt, eine Bedingung, die uns auch schon früher begegnet ist. Für die äquivalente Wahrscheinlichkeit p^* , mit der der Arbitrage-freie Derivate-Preis D_0 alternativ als Erwartungswert-Preis ausgedrückt werden kann, also als

$$D_0 = v \left[p^* D_T^+ + (1 - p^*) D_T^- \right] = v D_T^- + p^* v (D_T^+ - D_T^-),$$

erhält man entsprechend durch Vergleich mit dem obigen Ausdruck

$$p^* = r h_D \frac{S_0 - v S_T^-}{D_T^+ - D_T^-} = \frac{r S_0 - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-},$$

also denselben, nur von der Aktienkursentwicklung abhängigen Ausdruck wie früher, gänzlich unabhängig vom Typ des Derivats! (Wegen der obigen Bedingung $S_T^- < r S_0 < S_T^+$ gilt hier natürlich stets $p^* \in (0, 1)$, d.h. der Erwartungswert-Preis existiert unter dieser Bedingung immer.)

Durch Spezialisierung erhält man aus dem obigen Ansatz natürlich sofort die bekannten Bewertungsformeln u.a. für Call, Put und Future zurück (mit einem geeigneten Ausübungspreis X zwischen S_T^- und S_T^+):

Derivat D	D_T^+	D_T^-	$h_D = \frac{D_T^+ - D_T^-}{S_T^+ - S_T^-}$	$D_0 = v D_T^\pm + h_D (S_0 - v S_T^\pm)$
Call-Option	$S_T^+ - X$	0	$\frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-}$	$h_{Call} (S_0 - v S_T^-)$
Put-Option	0	$X - S_T^-$	$-\frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-}$	$h_{Put} (S_0 - v S_T^+)$
Future	$S_T^+ - X$	$S_T^- - X$	1	$S_0 - v X$

Man beachte, dass im Gegensatz zur früheren Notation die Hedge Ratio h_{Put} für die Put-Option hier negativ ist, was die unterschiedlichen Kauf-/Verkaufstrategien für Call- und Put-Optionen berücksichtigt.

Kombinationen von Derivaten $D[i]$, $i = 1, \dots, m$ mit Gewichten $\alpha[i]$, $i = 1, \dots, m$ lassen sich jetzt in natürlicher Weise als ein einziges Derivat vermöge

$$D = \sum_{i=1}^m \alpha[i] D[i]$$

auffassen, mit den entsprechenden Größen

$$D_T^+ = \sum_{i=1}^m \alpha[i] D_T^+[i], \quad D_T^- = \sum_{i=1}^m \alpha[i] D_T^-[i].$$

Da die Arbitrage-freien Preise durch die vom Derivate-Typ unabhängigen äquivalenten Wahrscheinlichkeiten $p^* = \frac{rS_0 - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-}$ ausgedrückt werden können, folgt hieraus, dass der Arbitrage-freie Preis des neuen "abstrakten" Derivats D dargestellt werden kann als

$$\begin{aligned} D_0 &= vD_T^- + p^*v(D_T^+ - D_T^-) = v \sum_{i=1}^m \alpha[i] D_T^-[i] + p^*v \left(\sum_{i=1}^m \alpha[i] D_T^+[i] - \sum_{i=1}^m \alpha[i] D_T^-[i] \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha[i] \left[vD_T^-[i] + p^*v(D_T^+[i] - D_T^-[i]) \right] = \sum_{i=1}^m \alpha[i] D_0[i], \end{aligned}$$

d.h. als entsprechend gewichtete Summe der einzelnen Arbitrage-freien Preise! Dies zeigt, dass Arbitrage-Situationen auch nicht durch geschicktes Kombinieren von Optionen erreicht werden können, wenn jede einzelne Option mit dem "richtigen", d.h. Arbitrage-freien Preis bewertet wird. Dies gilt übrigens auch für Kombinationen mit Aktien, da in unserem allgemeineren Ansatz die Aktien selbst auch "Derivate" darstellen, nämlich mit der Funktion $D(S_T) = S_T$ und den "Arbitrage-freien" Preisen

$$vS_T^- + p^*v(S_T^+ - S_T^-) = vS_T^- + \frac{rS_0 - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} v(S_T^+ - S_T^-) = S_0,$$

wie erwartet. Die (Arbitrage-freien) Preise für Spreads, Straddles usw. ergeben sich entsprechend einfach durch gewichtete Summation der (Arbitrage-freien) Preise der einzelnen Bestandteile. Für den obigen Butterfly-Call-Spread D mit den Konditionen

$$X_1 = 100 \quad X_2 = 120 \quad X_3 = 110; \quad C_{01} = 14,28 \quad C_{02} = 4,76 \quad C_{03} = 9,52$$

ergibt sich deshalb auch der (Arbitrage-freie) Preis $D_0 = C_{01} + C_{02} - 2C_{03} = 0$, weil hier nach Konstruktion $D_T^+ = D_T^- = 0$ ist.

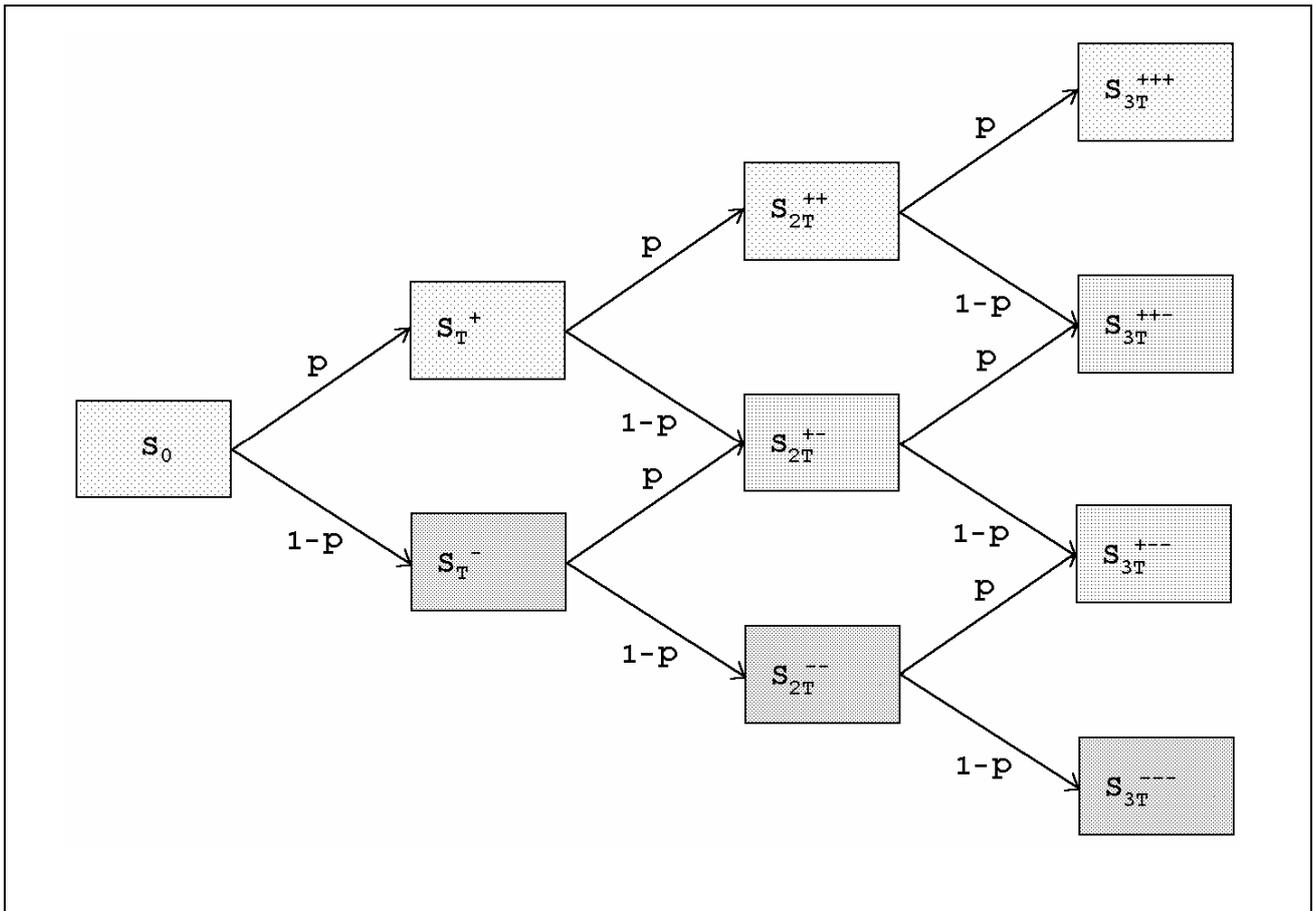
Ähnliche Überlegungen lassen sich natürlich auch für den Bereich des *Hedgens* von Portfolios mit "abstrakten" Derivaten anstellen.

7. Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell

In diesem Abschnitt wollen wir eine einfache Verallgemeinerung des obigen Modells auf mehrere Handelsperioden betrachten. Dazu nehmen wir an, dass sich die Kurse $S_0, S_T, S_{2T}, \dots, S_{nT}$ über n Perioden stets nur *prozentual* verändern, d.h. wir betrachten konstante Kursänderungsraten

$$k^+ := \frac{S_T^+}{S_0} - 1 > 0, \quad k^- := \frac{S_T^-}{S_0} - 1 < 0,$$

wobei wieder Aufwärtsbewegungen des Kurses durch "+" (mit Wahrscheinlichkeit p) und Abwärtsbewegungen durch "-" (mit Wahrscheinlichkeit $1-p$) gekennzeichnet seien. Beispielsweise entsteht der Kurswert $S_{2T}^{+-} = S_{2T}^{-+}$ durch eine Aufwärts- und eine Abwärtsbewegung des Kurses, der Kurswert $S_{3T}^{+++} = S_{3T}^{++-} = S_{3T}^{-++}$ durch zwei Aufwärts- und eine Abwärtsbewegung usw. Eine Aufwärtsbewegung entspricht dabei der Multiplikation des aktuellen Kurswertes mit dem Faktor $(1+k^+) > 1$, eine Abwärtsbewegung einer Multiplikation mit dem Faktor $(1+k^-) < 1$. Die folgende Graphik verdeutlicht das Modell für den Fall $n = 3$.



Nimmt man an, dass die Auf- und Abwärtsbewegungen der Kurse stochastisch unabhängig voneinander sind und bezeichnet N die Anzahl aller Aufwärtsbewegungen innerhalb der n Perioden (d.h. $n-N$ ist die Anzahl aller Abwärtsbewegungen), so ist N binomialverteilt, und es ergibt sich sofort

$$S_{nT} = (1+k^+)^N (1+k^-)^{n-N} S_0$$

mit

$$P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Die äquivalente Wahrscheinlichkeit p^* , unter der das (stufenweise) Erwartungwertprinzip Arbitrage-Möglichkeiten ausschließt, nimmt hier folgende einfache Form an:

$$p^* = \frac{r_T S_0 - (1+k^-)S_0}{(1+k^+)S_0 - (1+k^-)S_0} = \frac{i_T - k^-}{k^+ - k^-}.$$

Dabei sei von nun an vereinbart, dass sich der Zins i [und damit auch der Diskontfaktor v] stets auf eine Periode der Länge 1 bezieht; mit

$$i_T := (1+i)^T - 1, \quad v_T := \frac{1}{1+i_T} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^T = v^T$$

erhält man dann den Zins bzw. Diskontfaktor für eine Periode der Länge T . Einzige Nebenbedingung ist dabei sinngemäß, dass $i_T < k^+$ gilt, d.h. es ist wieder theoretisch möglich, innerhalb einer Periode am Aktienmarkt eine höhere Rendite als am Geldmarkt – mit dem risikolosen Zins i_T – zu erzielen [man beachte, dass definitionsgemäß $k^- < 0$ gilt].

Wie im Fall des Ein-Perioden-Modells sind hier die möglichen Werte einer Call-Option zur Zeit nT bekannt; es gilt analog

$$C_{nT} = (S_{nT} - X)^+.$$

Es liegt nahe (und das kann auch theoretisch bewiesen werden), dass der "richtige" – d.h. Arbitragemöglichkeiten ausschließende – Optionspreis zur Zeit 0 wieder nach Diskontierung durch das Erwartungswertprinzip mit der äquivalenten Wahrscheinlichkeit p^* gegeben ist:

$$\begin{aligned} C_0 &= E^* \left(v^{nT} C_{nT} \right) = v^{nT} E^* \left[(S_{nT} - X)^+ \right] \\ &= v^{nT} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^{*j} (1-p^*)^{n-j} \left[S_0 (1+k^+)^j (1+k^-)^{n-j} - X \right]^+. \end{aligned}$$

Eine rechentechnische Vereinfachung dieses Ausdrucks erhält man aufgrund der Tatsache, dass hier nicht alle Summanden positiv sind; es brauchen lediglich diejenigen Summanden berücksichtigt zu werden, für die der eckige Klammersausdruck nicht verschwindet. Damit ergibt sich abschließend:

$$C_0 = S_0 \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} q^{*j} (1-q^*)^{n-j} - v^{nT} X \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^{*j} (1-p^*)^{n-j}$$

mit

$$a = \left\lceil \frac{\ln \left(\frac{X}{S_0 (1+k^-)^n} \right)}{\ln \left(\frac{1+k^+}{1+k^-} \right)} \right\rceil, \quad q^* = (1+k^+) v^T p^*, \quad p^* = \frac{i_T - k^-}{k^+ - k^-},$$

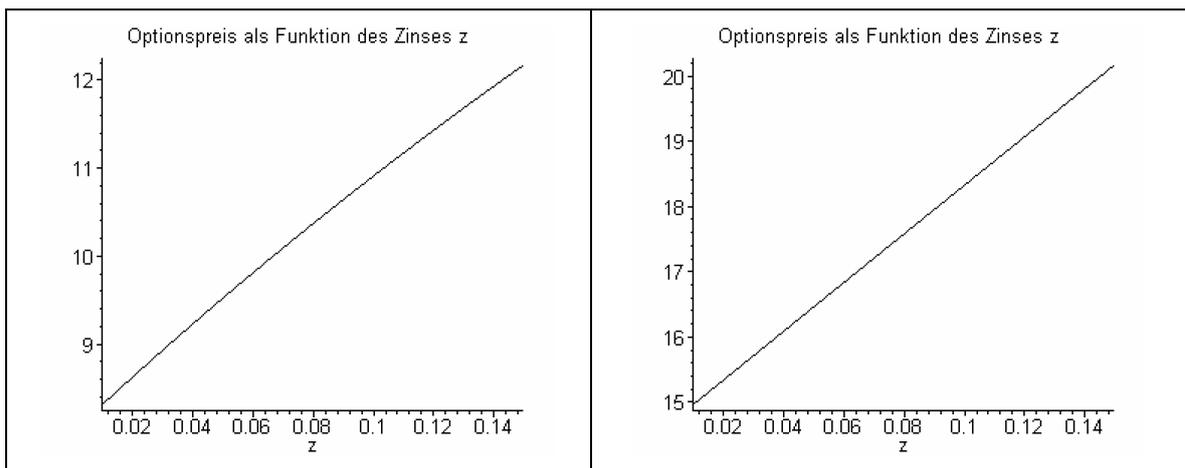
wobei $\lceil x \rceil := \min \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$ die Aufrundung der reellen Zahl x auf die ganze Zahl $\lceil x \rceil$ bedeutet. Man beachte dabei, dass q^* aufgrund unserer Annahmen ebenfalls eine "Wahrscheinlichkeit" ist wegen

$$p^* = \frac{i_T - k^-}{k^+ - k^-} \leq \frac{i_T + 1}{k^+ + 1} \leq 1;$$

die Abbildung $x \mapsto \frac{a+x}{b+x}$ ist nämlich in x monoton wachsend für $0 \leq a \leq b$ mit Grenzwert 1 für $x \rightarrow \infty$.

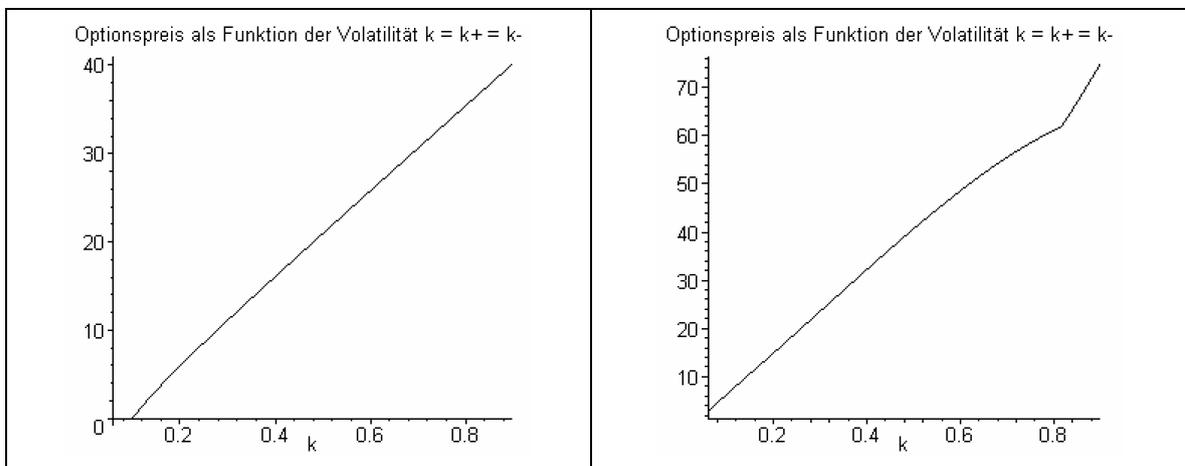
Der oben angegebene Ausdruck ist die von Cox, Ross und Rubinstein angegebene Optionspreismformel für das diskrete Mehrperioden-Modell. In Anlehnung an den Sprachgebrauch im stetigen Fall wollen wir dabei die Größen k^\pm als diskrete (Aufwärts- / Abwärts-)Volatilitäten bezeichnen.

Die folgenden Graphiken zeigen für das Anfangsbeispiel von Eberlein die Abhängigkeit des Call-Optionspreises C_0 von den Parametern Zins, Volatilität, Ausübungspreis und Anfangskurs für $n=1$ bzw. $n=4$.



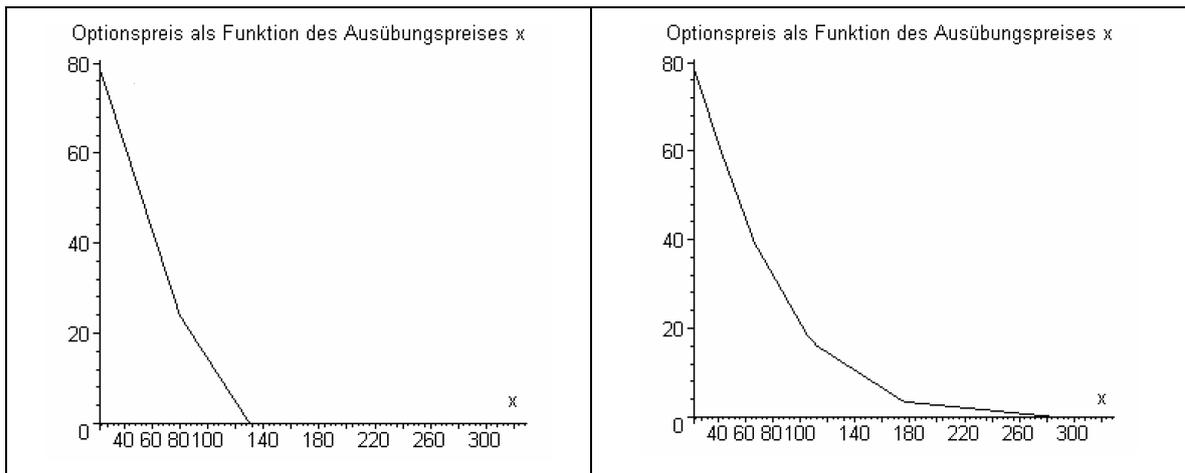
$n = 1$

$n = 4$



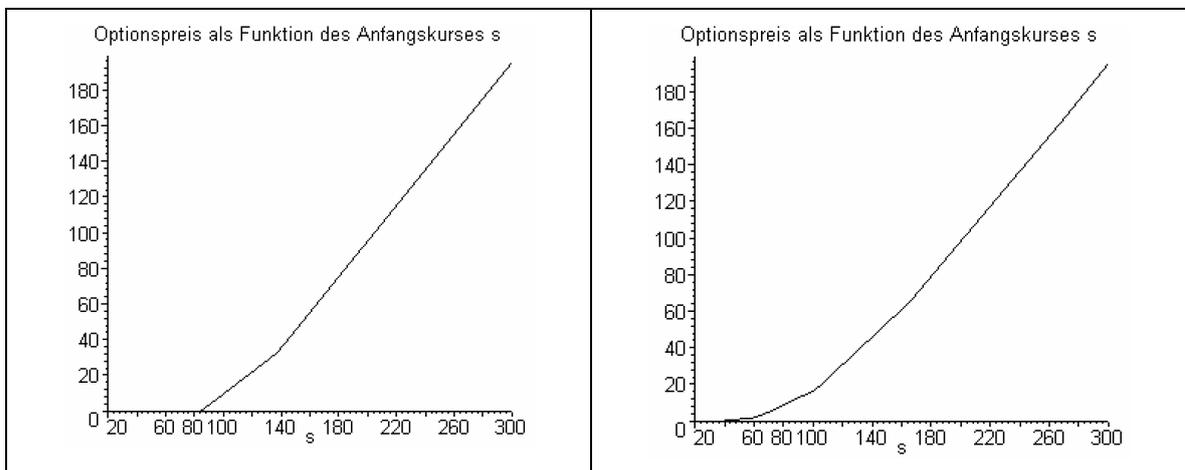
$n = 1$

$n = 4$



$n = 1$

$n = 4$



$n = 1$

$n = 4$

Die folgende Tabelle zeigt die Abhängigkeit des Call-Preises für das anfängliche Beispiel von der Anzahl n der Perioden, für $T = 1$:

n	1	2	3	4	5	10	20	100
C_0	9,52	13,37	20,00	22,55	28,39	44,30	66,23	99,27

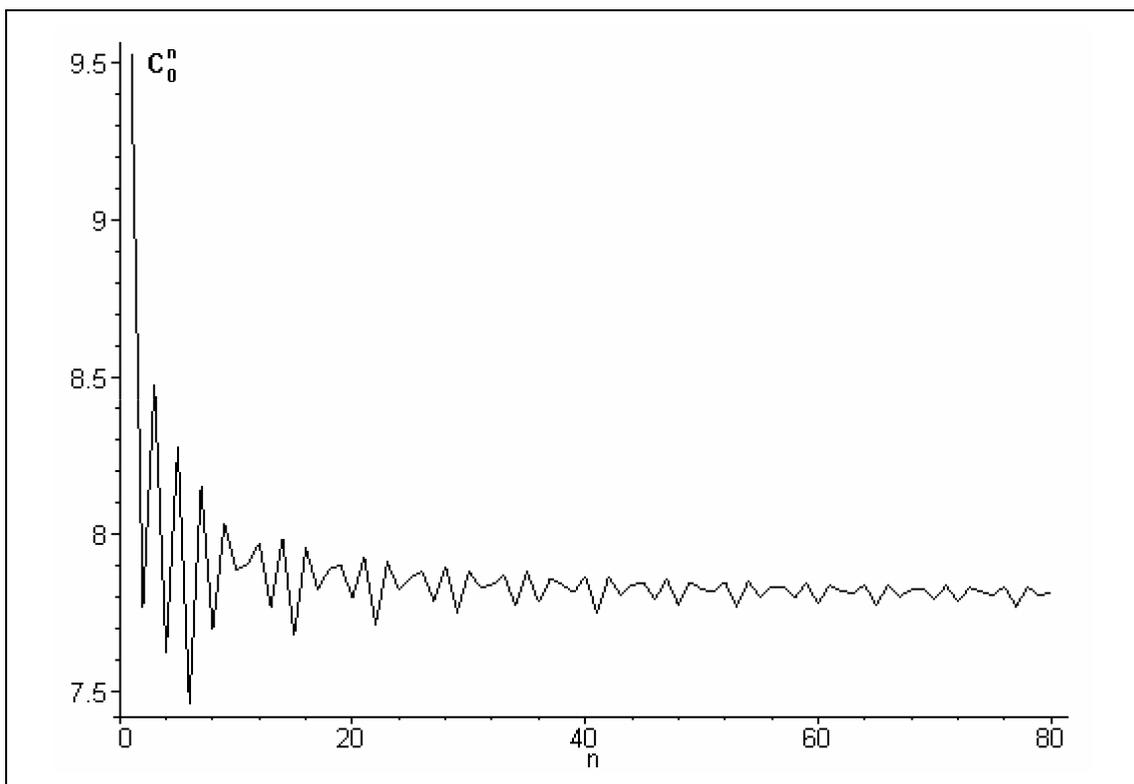
Der Anstieg des Call-Preises C_0 mit wachsendem n erklärt sich hier aus den hohen Gewinn-Möglichkeiten bei ständig steigenden Kursen; der maximale Kurswert beträgt in diesem Fall $S_{nT}^{n+} = 100 \times 1.3^n = 1378,58$ für z.B. $n = 10$.

Ein etwas anderes Bild ergibt sich dagegen, wenn man die gesamte Periodenlänge $nT = 1$ konstant hält, d.h. kürzere Subperioden der Länge $T_n = T/n$ betrachtet; allerdings muss man dann die Vola-

tilitäten k^\pm entsprechend anpassen, um eine vergleichbare Volatilität – bezogen auf eine Zeitspanne von 1 – zu erhalten. Wählt man z.B. $k_n^\pm = \frac{k^\pm}{\sqrt{n}}$, so erhält man (für $T_n = 1/n$) folgende Tabelle:

n	1	2	3	4	5	10	20	100	1000
C_0^n	9,52	7,76	8,47	7,62	8,27	7,88	7,79	7,82	7,78

Die Call-Preise scheinen hier um einen festen Wert herum zu schwanken. Die folgende Graphik zeigt dies deutlicher:



Im folgenden Abschnitt wollen wir abschließend noch zeigen, dass unter den obigen Bedingungen tatsächlich ein Grenzwert von C_0^n für $n \rightarrow \infty$ existiert, der als asymptotischer Call-Preis in einem geeigneten zeitstetigen Modell angesehen werden kann.

8. Die Formel von Black und Scholes

Für große Werte von n wird die obige Bewertungsformel von Cox, Ross und Rubinstein schnell unübersichtlich. Es liegt daher nahe, in diesem Fall die bekannte Normal-Approximation für die Binomialverteilung zu verwenden (siehe z.B. GÄNSSLER UND STUTE [14]). Zu diesem Zweck und zur klareren Darstellung des Grenzübergangs wollen wir in diesem Abschnitt alle relevanten Größen mit dem Index n versehen. Die folgende Tabelle gibt zusammenfassend noch einmal eine entsprechende Übersicht.

Größe	Bedeutung
T_n	$\frac{T}{n}$
k_n^\pm	$\frac{k^\pm}{\sqrt{n}}$
a_n	$\left \frac{\ln\left(\frac{X}{S_0(1+k_n^-)^n}\right)}{\ln\left(\frac{1+k_n^+}{1+k_n^-}\right)} \right $
p_n^*	$\frac{i_{T_n} - k_n^-}{k_n^+ - k_n^-}$
q_n^*	$(1+k_n^+)v^{T_n}p_n^*$
C_0^n	$S_0 \sum_{j=a_n}^n \binom{n}{j} q_n^{*j} (1-q_n^*)^{n-j} - v^{nT_n} X \sum_{j=a_n}^n \binom{n}{j} p_n^{*j} (1-p_n^*)^{n-j}$

Die Bewertungsformel von Cox, Ross und Rubinstein lässt sich dann vereinfacht wie folgt angeben:

$$C_0^n = S_0 P(U_n \geq a_n) - v^{nT_n} X P(V_n \geq a_n),$$

wobei U_n und V_n binomialverteilte Zufallsvariablen sind mit

$$P^{U_n} = B(n, q_n^*) \text{ und } P^{V_n} = B(n, p_n^*).$$

Sei nun wie üblich

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz, \quad x \in \mathbb{R}$$

die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$. Wir benutzen nun die bekannte Ungleichung von Berry-Esséen bzw. ihre auf van Beek zurückgehende Verschärfung (vgl. GÄNSSLER UND STUTE [14], Satz 4.2.10 und Korollar 4.2.15) für den Spezialfall von Binomialverteilungen:

Sind W_1, \dots, W_n stochastisch unabhängige, jeweils wie W $B(1, p)$ -verteilte Zufallsvariablen mit $0 < p < 1$ und ist $Z = \sum_{i=1}^n W_i$, so gilt

$$\left| P(Z \leq x) - \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \text{gleichmäßig für alle } x \in \mathbb{R},$$

was u.a. aus der für $B(1, p)$ -verteilten Zufallsvariablen W (mit $0 < p < 1$) gültigen Beziehung

$$E|W - p|^3 = p^3(1-p) + (1-p)^3 p = p(1-p)(p^2 + (1-p)^2) \leq p(1-p)$$

folgt. Damit lässt sich der Call-Preis C_0^n wie folgt abschätzen:

$$\left| C_0^n - S_0 \Phi\left(-\frac{a_n - nq_n^*}{\sqrt{nq_n^*(1-q_n^*)}}\right) + v^{nT_n} X \Phi\left(-\frac{a_n - np_n^*}{\sqrt{np_n^*(1-p_n^*)}}\right) \right| \leq \frac{S_0}{\sqrt{nq_n^*(1-q_n^*)}} + \frac{v^{nT_n} X}{\sqrt{np_n^*(1-p_n^*)}},$$

Eine sinnvolle Approximation ist also möglich, wenn die Ausdrücke p_n^* und q_n^* für $n \rightarrow \infty$ gegen Grenzwerte p_{as}^* bzw. $q_{as}^* \in (0,1)$ streben. Für die nachfolgenden Überlegungen wollen wir deshalb die Volatilitäten k_n^\pm in folgender Form darstellen:

$$k_n^+ = \sigma^+ \sqrt{T_n}, \quad k_n^- = -\sigma^- \sqrt{T_n} \quad \text{mit } T_n = \frac{T}{n},$$

d.h. es ist $\sigma^+ = \frac{k^+}{\sqrt{T}} > 0$, $\sigma^- = -\frac{k^-}{\sqrt{T}} > 0$, für die entsprechend obigen Voraussetzungen gelte

$$i_T = (1+i)^T - 1 \leq k_1^+ = \sigma^+ \sqrt{T}, \quad \sigma^- < \sqrt{\frac{n}{T}},$$

damit die Bedingungen $p_n^* \leq 1$ und $1 + k_n^- > 0$ erhalten bleiben; die Abbildung $t \mapsto [(1+i)^t - 1]/\sqrt{t}$ ist für alle $i > 0$ im Bereich $t > 0$ nämlich streng monoton wachsend, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T} \left((1+i)^{T/n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T} \left(e^{[\ln(1+i)]T/n} - 1 \right) = \ln(1+i) =: i^*.$$

Es folgt dann:

$$\frac{\sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} \leq \frac{i^* \sqrt{T/n} + \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} \leq p_n^* = \frac{\sqrt{\frac{n}{T}} [(1+i)^{T/n} - 1] + \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} \leq \frac{i^* r^{T/n} \sqrt{T/n} + \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-}$$

und

$$v^{T/n} \sqrt{T} \left[\sigma^+ - i^* r^T \sqrt{\frac{T}{n}} \right] p_n^* \leq \sqrt{n} (q_n^* - p_n^*) \leq \sigma^+ \sqrt{T} p_n^*.$$

Dabei haben wir wesentlich von der bekannten Ungleichung

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x, \quad x > 0$$

Gebrauch gemacht. Mit den obigen Beziehungen folgt nun bereits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n^* = \frac{\sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} =: p_{as}^* =: q_{as}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (q_n^* - p_n^*) = \frac{\sigma^+ \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} \sqrt{T}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (p_n^* - p_{as}^*) = \frac{i^* \sqrt{T}}{\sigma^+ + \sigma^-}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (q_n^* - q_{as}^*) = \frac{i^* + \sigma^+ \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} \sqrt{T}.$$

Für das weitere Vorgehen benötigen wir noch folgende Beziehungen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} = p_{as}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - n p_{as}^*}{\sqrt{n}} = \frac{\ln\left(\frac{X}{S_0}\right) + \frac{\sigma^+ \sigma^- T}{2}}{(\sigma^+ + \sigma^-) \sqrt{T}}.$$

Dies kann man wie folgt zeigen: Es sei

$$f(x) := \frac{x}{\ln\left(\frac{1+\sigma^+ x}{1-\sigma^- x}\right)}, \quad g(x) := \frac{-\ln(1-\sigma^- x)}{\ln\left(\frac{1+\sigma^+ x}{1-\sigma^- x}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{\ln(1+\sigma^+ x)}{\ln(1-\sigma^- x)}}, \quad 0 < x < \frac{1}{\sigma^-}.$$

Eine Taylor-Entwicklung der Funktionen f und g um den Nullpunkt (nach stetiger Ergänzung) ergibt

$$f(x) = \frac{1}{\sigma^+ + \sigma^-} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} x + O(x^2)$$

$$g(x) = \frac{\sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^+ \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} x + O(x^2).$$

Ersetzen wir hier jeweils x durch $\sqrt{T/n}$, so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\sqrt{\frac{T}{n}}\right) = \frac{\sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} = p_{as}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - np_{as}^*}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln\left(\frac{X}{S_0}\right)}{\sqrt{T}} f\left(\sqrt{\frac{T}{n}}\right) + \sqrt{n} \left\{ g\left(\sqrt{\frac{T}{n}}\right) - p_{as}^* \right\} \right] = \frac{\ln\left(\frac{X}{S_0}\right) + \frac{\sigma^+ \sigma^- T}{2}}{(\sigma^+ + \sigma^-) \sqrt{T}}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{X}{S_0}\right)}{(\sigma^+ + \sigma^-) \sqrt{T}} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^+ \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} \sqrt{T},$$

wie behauptet.

Hiermit lassen sich jetzt folgende asymptotische Aussagen treffen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{a_n - np_n^*}{\sqrt{np_n^*(1-p_n^*)}} \right\} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(i^* - \frac{\sigma^+ \sigma^-}{2}\right) T}{\sqrt{\sigma^+ \sigma^-} \sqrt{T}} =: d_2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{a_n - nq_n^*}{\sqrt{nq_n^*(1-q_n^*)}} \right\} = d_2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{\sqrt{\sigma^+ \sigma^-}} (q_n^* - p_n^*)$$

$$= d_2 + \sqrt{\sigma^+ \sigma^-} \sqrt{T} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(i^* + \frac{\sigma^+ \sigma^-}{2}\right) T}{\sqrt{\sigma^+ \sigma^-} \sqrt{T}} =: d_1,$$

woraus schließlich die *Formel von Black und Scholes* folgt:

$$\begin{aligned}
C_0^{as} &= S_0 \Phi(d_1) - v^T X \Phi(d_2) \\
&= S_0 \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{X} \right) + \left(i^* + \frac{\sigma^+ \sigma^-}{2} \right) T}{\sqrt{\sigma^+ \sigma^-} \sqrt{T}} \right) - v^T X \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{X} \right) + \left(i^* - \frac{\sigma^+ \sigma^-}{2} \right) T}{\sqrt{\sigma^+ \sigma^-} \sqrt{T}} \right) \\
&= S_0 \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{r^T S_0}{X} \right) + \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - v^T X \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{r^T S_0}{X} \right) - \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}} \right)
\end{aligned}$$

mit $\sigma = \sqrt{\sigma^+ \sigma^-}$ (Volatilität). Für eine Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit in diesem Ausdruck benötigt man noch folgende, aus dem Mittelwertsatz der Analysis resultierende Ungleichung:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq |x - y| \sup_{z \in \mathbb{R}} |\Phi'(z)| = \frac{|x - y|}{\sqrt{2\pi}} \leq 0.4 |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Damit erhält man insgesamt

$$\begin{aligned}
|C_0^n - C_0^{as}| &\leq S_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{nq_n^*(1-q_n^*)}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{a_n - nq_n^*}{\sqrt{nq_n^*(1-q_n^*)}} + d_1 \right| \right) \\
&\quad + v^T X \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{np_n^*(1-p_n^*)}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{a_n - np_n^*}{\sqrt{np_n^*(1-p_n^*)}} + d_2 \right| \right)
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, mit einer Konvergenzordnung von $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Für das anfängliche Beispiel erhält man sogar noch etwas genauer

$$C_0^{as} = 7,77 \quad \text{mit} \quad |C_0^n - C_0^{as}| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Interessanterweise hängt der asymptotische Call-Preis C_0^{as} nur über die Volatilität $\sigma = \sqrt{\sigma^+ \sigma^-}$, also dem geometrischen Mittel der Auf- und Abwärtsvolatilitäten, ab. Im Anfangsbeispiel ergibt sich somit derselbe asymptotische Call-Preis z.B. auch für die Volatilitäten $\sigma^+ = 0.6$, $\sigma^- = 0.1$.

Für die nachfolgenden Überlegungen wollen wir nun eine geeignete Zeitachsentransformation betrachten, indem wir im Modell von Cox, Ross und Rubinstein für $T=1$ mit den angepassten Subperioden der Länge $1/n$ und den Volatilitäten $k_n^\pm = k^\pm / \sqrt{n}$ den Zeitpunkten k/n für $k \in \mathbb{N}$ den (zufälligen) Kurswert S_k , der sich unter Verwendung der äquivalenten Wahrscheinlichkeiten p_n^* ergibt, zuordnen. Wir betrachten also etwa den stochastischen Prozess $\{S_{[nt]} | t \geq 0\}$, der mit dem hier betrachteten Grenzübergang in einen zeitstetigen stochastischen Prozess übergeht, die sogenannte *geometrische Brown'sche Bewegung* $\{\tilde{S}_t | t \geq 0\}$, die dargestellt werden kann vermöge

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left[\sigma W_t + \left(\ln(1+i) - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right] = r^t S_0 \exp\left[\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right], \quad t \geq 0,$$

wobei $\{W_t | t \geq 0\}$ einen *Standard-Wiener-Prozess* bezeichne (siehe z.B. ETHERIDGE [11] oder LAMBERTON UND LAPEYRE [18]); hierauf kommen wir noch einmal in Abschnitt 14 zurück. Insbesondere sind also die endlich-dimensionalen Randverteilungen des Prozesses $\{W_t | t \geq 0\}$ normal, und es gilt

$$E(W_t) = 0, \quad \text{Var}(W_t) = t, \quad \text{Kov}(W_s, W_t) = s \wedge t = \min(s, t), \quad s, t > 0.$$

Anders ausgedrückt, ist der logarithmierte (relative) Kursprozess $\{\ln(\tilde{S}_t / S_0) | t \geq 0\}$ selbst ein Wiener-Prozess:

$$\ln(\tilde{S}_t / S_0) = \sigma W_t + \left(\ln(1+i) - \frac{\sigma^2}{2}\right)t = \sigma W_t + \left(i^* - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \quad t \geq 0,$$

d.h.: die Zufallsvariablen \tilde{S}_t / S_0 bzw. \tilde{S}_t sind sämtlich log-normalverteilt. Hierbei ist natürlich $\tilde{S}_0 = S_0$. Aufgrund der statistischen Eigenschaften der log-Normalverteilung ergibt sich noch:

$$E(\tilde{S}_t) = S_0 \exp\left[\left(\ln(1+i) - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \frac{\sigma^2}{2}t\right] = (1+i)^t S_0 = r^t S_0, \quad t \geq 0.$$

„Im Mittel“ verhält sich also der Aktienkurs – in dem hier betrachteten Modell mit den äquivalenten Wahrscheinlichkeiten – wie ein risikoloses Wertpapier mit dem Zins i .

Die Normalität der Randverteilungen des logarithmierten Kursprozesses lässt sich wieder im Rahmen des Zentralen Grenzwertsatzes leicht zeigen: es gilt nach obigem

$$\ln\left(\frac{S_{[nt]}}{S_0}\right) = \ln\left(\frac{1 + \sigma^+ \sqrt{\frac{1}{n}}}{1 - \sigma^- \sqrt{\frac{1}{n}}}\right) N_{[nt]} + [nt] \ln\left(1 - \sigma^- \sqrt{\frac{1}{n}}\right).$$

Setzen wir im Modell von Cox, Ross und Rubinstein noch

$$N_k^* = \frac{N_k - kp_k^*}{\sqrt{kp_k^*(1-p_k^*)}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

so folgt ähnlich wie oben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(N_{[nt]}^* \leq x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

d.h. die Verteilung von $N_{[nt]}^*$ ist schwach konvergent gegen die Standard-Normalverteilung. Nach leichter Umformung erhält man für $t \geq 0$ noch

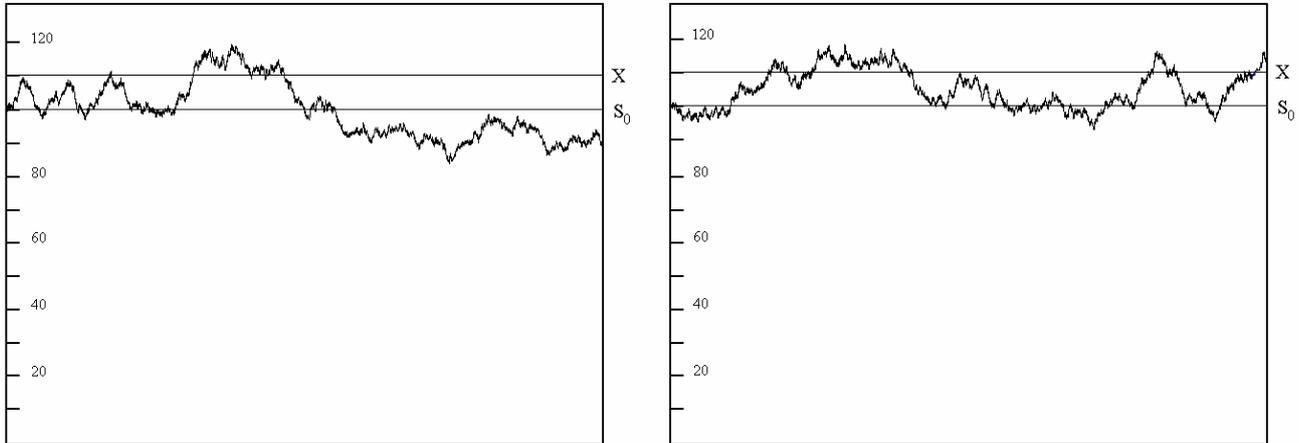
$$\ln \left(\frac{S_{[nt]}}{S_0} \right) = \ln \left(\frac{1 + \sigma^+ \sqrt{\frac{1}{n}}}{1 - \sigma^- \sqrt{\frac{1}{n}}} \right) \left(\sqrt{[nt] p_{[nt]}^* (1 - p_{[nt]}^*)} N_{[nt]}^* + [nt] p_{[nt]}^* \right) + [nt] \ln \left(1 - \sigma^- \sqrt{\frac{1}{n}} \right)$$

mit den ähnlich wie oben abzuleitenden asymptotischen Entwicklungen

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1 + \sigma^+ \sqrt{\frac{1}{n}}}{1 - \sigma^- \sqrt{\frac{1}{n}}} \right) &= \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{\sqrt{n}} - \frac{\{\sigma^+\}^2 - \{\sigma^-\}^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\ [nt] \ln \left(1 - \sigma^- \sqrt{\frac{1}{n}} \right) &= -t \left\{ \sqrt{n} \sigma^- + \frac{\{\sigma^-\}^2}{2} \right\} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ [nt] p_{[nt]}^* &= nt p_{as}^* + \frac{\ln(1+i)}{\sigma^+ + \sigma^-} \sqrt{nt} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ \sqrt{[nt] p_{[nt]}^* (1 - p_{[nt]}^*)} &= \sqrt{nt p_{as}^* (1 - p_{as}^*)} + O(1). \end{aligned}$$

Nach Ausmultiplizieren aller Faktoren und geeignetem Zusammenfassen sieht man, dass die Folgen der Verteilungen von $\ln \left(\frac{S_{[nt]}}{S_0} \right)$ und $\sigma \sqrt{t} N_{[nt]}^* + \left(\ln(1+i) - \frac{\sigma^2}{2} \right) t$ bezüglich der schwachen Konvergenz äquivalent sind, d.h. denselben (schwachen) Grenzwert besitzen. $\sqrt{t} N_{[nt]}^*$ ist aber nach obigem asymptotisch normalverteilt, mit Erwartungswert 0 und Varianz t , woraus sich nun die obigen Aussagen ergeben.

Die folgenden beiden Graphiken zeigen zwei Simulationen des Grenzprozesses $\{\tilde{S}_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ für das anfängliche diskrete Beispiel mit $S_0 = 100$, $X = 110$, $i = 0.05$, $\sigma^+ = 0.3$, $\sigma^- = 0.2$. Hier gilt dann also $p_{as}^* = \frac{\sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} = \frac{2}{5} = 0.4$, $\sigma = \sqrt{\sigma^+ \sigma^-} = \frac{1}{10} \sqrt{6} = 0.2449\dots$



Bemerkung: Eine weitere asymptotische Bewertungsformel für Optionen erhält man, wenn man im Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit n Perioden der Länge $T_n = T/n$ annimmt, dass für die Volatilitäten folgendes asymptotische Verhalten vorliegt:

$$k_n^+ \equiv \sigma^+, \quad k_n^- = -\frac{\sigma^-}{n} \text{ für geeignete Zahlen } \sigma^\pm > 0.$$

Dies bedeutet anschaulich, dass im Wesentlichen nur sprunghafte Kursänderungen nach oben vorkommen. Die äquivalenten Wahrscheinlichkeiten p_n^* besitzen hier das asymptotische Verhalten

$$p_n^* \approx \frac{1}{n} \cdot \frac{i^* T + \sigma^-}{\sigma^+} \text{ mit } \lambda := \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot p_n^* = \frac{i^* T + \sigma^-}{\sigma^+}, \text{ wobei wieder } i^* = \ln(1+i) \text{ bezeichne, sowie}$$

$$q_n^* \approx (1 + \sigma^+) p_n^* \text{ mit } \mu := \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot q_n^* = (1 + \sigma^+) \frac{i^* T + \sigma^-}{\sigma^+}.$$

Für den unteren Summationsindex a_n in der Preisformel für europäische Call-Optionen mit Ausübungspreis X gilt dann asymptotisch

$$a_n = \frac{\left| \ln\left(\frac{X}{S_0}\right) - n \ln\left(1 - \frac{\sigma^-}{n}\right) \right|}{\left| \ln(1 + \sigma^+) - \ln\left(1 - \frac{\sigma^-}{n}\right) \right|} \approx \frac{\left| \ln\left(\frac{X \cdot e^{\sigma^-}}{S_0}\right) \right|}{\left| \ln(1 + \sigma^+) \right|} =: a,$$

sofern $\frac{\ln\left(\frac{X \cdot e^{\sigma^-}}{S_0}\right)}{\ln(1 + \sigma^+)} \notin \mathbb{Z}$. Der asymptotische Call-Preis C_0^{as} ist in diesem Modell gegeben durch

$$C_0^{as} = S_0 e^{-\mu} \sum_{k=a}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} - v^T X e^{-\lambda} \sum_{k=a}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = S_0 \left(1 - e^{-\mu} \sum_{k=0}^{a-1} \frac{\mu^k}{k!} \right) - v^T X \left(1 - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{a-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right).$$

Diesem Modell liegt die *Poisson-Approximation* der Binomial-Verteilung zu Grunde; der resultierende logarithmierte Grenzprozess für die Aktienkurse ist entsprechend ein so genannter *Poisson-Prozess*.

9. Stochastische Marktmodelle

In diesem Kapitel wollen wir die vorher anhand einer ganz bestimmten Situation entwickelten Ergebnisse – nämlich für den Handel mit Aktien und Optionen – erheblich erweitern. Insbesondere wird hier in einem wesentlich allgemeineren Rahmen der Beweis geführt werden, dass für die arbitragefreie Bewertung von Call-Optionen im Cox-Ross-Rubinstein-Modell die äquivalente Wahrscheinlichkeit p^* aus dem Einperioden-Modell zu verwenden ist.

Wir legen für den Rest unserer Überlegungen folgendes stochastische Modell zugrunde:

Gegeben sind neben dem risikolosen Zins i mit Diskontfaktor $v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{r}$:

- ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmodell (Ω, P) mit *Filtration*

$$\{\emptyset, \Omega\} =: \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_T \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$$

(aufsteigende Folge von σ -Algebren) mit

$$P(A) > 0 \text{ für alle } A \in \mathcal{F}_T, A \neq \emptyset$$

- eine Familie $S = (S_0, S_1, \dots, S_T)$ von $d+1$ -dimensionalen Zufallsvariablen über Ω (Preisvektoren) mit

$$S_n = (S_n[0], S_n[1], \dots, S_n[d]), \quad n = 0, \dots, T$$

und $S_n[0] := r^n$, so dass $S_n[k]$ \mathcal{F}_n -messbar ist für $k = 0, \dots, d$

- eine *Handelsstrategie* $\phi = (\phi_0, \dots, \phi_T)$ mit

$$\phi_n = (\phi_n[0], \phi_n[1], \dots, \phi_n[d]), \quad n = 0, \dots, T$$

so dass

$$\begin{aligned} \phi_0[k] & \mathcal{F}_0\text{-messbar und} \\ & \text{für } n=1, \dots, T \text{ und } k=0, \dots, d \\ \phi_n[k] & \mathcal{F}_{n-1}\text{-messbar} \end{aligned}$$

(Vorhersagbarkeit).

Der Wert des Portfolios zur Zeit n ist dann gegeben durch das Skalarprodukt

$$V_n(\phi) = \langle \phi_n, S_n \rangle := \sum_{k=0}^d \phi_n[k] S_n[k],$$

der diskontierte Wert durch

$$\tilde{V}_n(\phi) = v^n V_n(\phi) = \langle \phi_n, \tilde{S}_n \rangle$$

mit $\tilde{S}_n = (1, v^n S_n[1], \dots, v^n S_n[d])$.

Interpretation: Die Grundmenge Ω fasst alle Zustände zusammen, die das – diskrete – Marktgeschehen prinzipiell beeinflussen können; die σ -Algebren \mathcal{F}_n beschreiben die zur Zeit $n \in \{1, \dots, T\}$ verfügbare "Information". Zur Zeit 0 liegt keine Information vor; daher ist hier \mathcal{F}_0 die triviale σ -Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$. Zum Zeitpunkt T liegt die größtmögliche Information vor; daher ist hier \mathcal{F}_T die maximale σ -Algebra. Die zu dazwischenliegenden Zeitpunkten n vorhandene Information hängt mit dem Kauf- und Verkaufverhalten sowie von der Preisentwicklung bis zu diesem Zeitpunkt zusammen; daher ist die Information monoton in n . Gehandelt werden zu jedem Zeitpunkt n insgesamt maximal $d \in \mathbb{N}$ Finanzgüter, wobei vereinbarungsgemäß die Komponente [0] dem rein monetären Teil (Kredit, "risikolose" Geldanlage) entspreche. Das Finanzgut k wird zum Zeitpunkt n mit dem Preis $S_n[k]$ gehandelt bzw. bewertet (z.B. Kurs einer Aktie zur Zeit n). Die Bedingungen $S_0[0]=1$ und $S_n[0]=r^n$ besagen hier nur, dass "1" die monetäre Einheit ist, die zur Zeit n durch Zinseszinsen auf den Wert r^n anwächst.

Als Konvention sei dabei vereinbart, dass der Vektor ϕ_n für $n \geq 0$ die Menge der zur Zeit n gehaltenen Finanzgüter bezeichne; d.h. Umschichtungen im Portfolio, die zum Zeitpunkt $n > 0$ zum Bestand ϕ_n führen, geschehen grundsätzlich zum Zeitpunkt $n-1$. ϕ_0 gibt dabei den Anfangsbestand im Portfolio an. Für spekulative Zwecke wird in der Regel $\phi_0 = 0$ sein (vgl. S. 6), beim Hedging eines Portfolios enthält ϕ_0 die entsprechenden anfänglichen Bestände der vorhandenen Finanzgüter (z.B. Aktien; vgl. S. 10). Die vorausgesetzte Vorhersagbarkeit der Handelstrategien bedeutet in diesem Zusammenhang, dass Kauf- und Verkaufsentscheidungen zur Zeit $n-1$ (die ja dann zum Bestand ϕ_n führen) nur von der bisher verfügbaren Information bis einschließlich $n-1$ abhängen dürfen (und nicht etwa bis zur Zeit n , da dies ggf. die Kenntnis zukünftiger Preise implizieren würde). Aus maßtheoretischer Sicht bedeutet diese Bedingung im wesentlichen, dass die Handelsstrategie eine Funktion der bis zur Zeit $n-1$ beobachteten Preise und Kauf- und Verkaufsaktionen ist; insofern ist die Handelsstrategie also "vorhersagbar". Die Strategien ϕ_0 und ϕ_1 sind dabei voraussetzungsgemäß konstant (als \mathcal{F}_0 -messbare Abbildungen).

Eine genauere Beschreibung der Struktur endlich-diskreter Wahrscheinlichkeitsräume wird im folgenden vorgenommen.

Definition 1: Es sei Ω eine endliche, nicht-leere Menge und \mathcal{F} eine σ -Algebra über Ω . Dann heißt das für jedes $\omega \in \Omega$ eindeutig bestimmte Ereignis

$$A_\omega := \bigcap \{F \mid \omega \in F \in \mathcal{F}\}$$

das durch ω induzierte *Atom* der σ -Algebra \mathcal{F} .

Man beachte hierbei, dass bei der Durchschnittsbildung nur endlich viele Ereignisse aus \mathcal{F} zur Anwendung kommen, der Durchschnitt also wieder ein Ereignis ist. Atome sind also bezüglich Inklusion gerade die nicht-trivialen (d.h. von \emptyset verschiedenen) minimalen Elemente der σ -Algebra; insbesondere gilt:

$$A_\eta = A_\omega \text{ für alle } \eta \in A_\omega, \omega \in \Omega.$$

Es ist nämlich $\eta \in A_\eta \cap A_\omega$ für alle $\eta \in A_\omega$, woraus wegen der Minimalität der Atome die Behauptung folgt. Die folgende Eigenschaft ist eine unmittelbare Konsequenz hieraus:

$$\omega, \eta \in \Omega, \eta \neq \omega \Rightarrow A_\eta = A_\omega \text{ oder } A_\eta \cap A_\omega = \emptyset.$$

Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass paarweise voneinander verschiedene Atome auch paarweise disjunkt sind.

Satz 1: Es sei Ω eine endliche, nicht-leere Menge und \mathcal{F} eine σ -Algebra über Ω . $\mathcal{A} := \{A_1, \dots, A_m\}$ sei die Menge der paarweise verschiedenen (und damit disjunkten) induzierten Atome von \mathcal{F} , mit $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \subseteq \{1, \dots, m\} \right\},$$

d.h. eine Menge $F \subseteq \Omega$ ist genau dann Element von \mathcal{F} , wenn sie als (disjunkte) Vereinigung von Atomen darstellbar ist, wobei

$$\#(\mathcal{F}) = 2^m$$

gilt, d.h. die Mächtigkeit einer endlichen σ -Algebra ist stets eine Zweierpotenz.

Ist ferner $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, so gilt:

$$Z \text{ ist } \mathcal{F}\text{-messbar} \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \text{ mit } Z = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{1}_{A_i},$$

d.h. Z ist \mathcal{F} -messbar genau dann, wenn Z auf den Atomen der σ -Algebra konstant (und damit eine Elementarfunktion) ist. Dabei bezeichne $\mathbf{1}_A$ wie üblich die Indikatorfunktion der Menge A .

Ist ferner Q eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf \mathcal{F} , so lässt sich Q zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung Q^\oplus auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ fortsetzen vermöge

$$Q^\oplus(\{\omega\}) := \frac{Q(A_\omega)}{\#(A_\omega)} \quad \text{für } \omega \in \Omega.$$

Beweis: Es ist für $F \in \mathcal{F}$

$$F = \bigcup_{\omega \in F} \{\omega\} \subseteq \bigcup_{\omega \in F} A_\omega \subseteq F$$

aufgrund der Inklusions-Minimalität von Atomen, also ist F Vereinigung o.B.d.A. paarweise verschiedener und damit disjunkter Atome. Umgekehrt liegen alle Atome in \mathcal{F} , so auch ihre endlichen Vereinigungen. Sei nun Z \mathcal{F} -messbar. Da Ω endlich ist, kann Z ebenfalls höchstens endlich viele verschiedene Werte $W = \{Z(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ annehmen. Die in \mathcal{F} liegenden Urbilder $Z^{-1}(\{w\})$ lassen sich für jedes $w \in W$ nach dem oben gesagten als disjunkte Vereinigung von Atomen darstellen, wobei noch $Z^{-1}(W) = \Omega$ gilt. Daraus resultiert die angegebene Darstellbarkeit von Z als Elementarfunktion. Umgekehrt ist jede Elementarfunktion Z aus \mathcal{F} -Mengen trivialerweise \mathcal{F} -messbar.

Man beachte schließlich, dass der für Q^\oplus angegebene Ausdruck wegen $\omega \in A_\omega$, also $\#(A_\omega) \geq 1$ wohldefiniert ist mit

$$Q^\oplus(\{\omega\}) \geq 0 \quad \text{und} \quad Q^\oplus(A_\omega) = \sum_{\eta \in A_\omega} Q^\oplus(\{\eta\}) = \frac{Q(A_\omega)}{\#(A_\omega)} \cdot \#(A_\omega) = Q(A_\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega,$$

d.h. Q und Q^\oplus stimmen auf \mathcal{F} überein.

Die in unserem Grundmodell getroffenen Voraussetzungen besagen also, dass sich die induzierten Atome beim Übergang von \mathcal{F}_n auf \mathcal{F}_{n+1} bezüglich Inklusion "verkleinern" und damit die zugehörigen σ -Algebren entsprechend "verfeinern". Dabei kann nach dem letzten Teil von Satz 1 sogar o.B.d.A. angenommen werden, dass für die finale σ -Algebra gilt: $\mathcal{F}_T = \mathfrak{P}(\Omega)$, mit einer Fortsetzung P^\oplus von P auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ mit

$$P^\oplus(\{\omega\}) > 0 \quad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

Diese Annahme werden wir später aus technischen Gründen treffen. Die ursprüngliche Forderung $P(A) > 0$ für alle $A \in \mathcal{F}_T$, $A \neq \emptyset$ bedeutet dabei keine wesentliche Einschränkung an das Modell. Dazu betrachten wir im allgemeinen Fall (d.h. ohne diese Forderung) die "größte" Nullmenge $N := \bigcup_{A \in \mathcal{F}_T} \{A \mid P(A) = 0\}$, die wegen $\#(\mathcal{F}_T) < \infty$ selbst in \mathcal{F}_T liegt mit $P(N) = 0$. Insbesondere ist

N (disjunkte) Vereinigung von Atomen A_i . Bezeichnen wir mit $I_N := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid A_i \subseteq N\}$, so gilt $N = \bigcup_{i \in I_N} A_i$, d.h. I_N ist die Menge der Indices derjenigen Atome, aus denen N zusammengesetzt ist. (Im Fall von $N = \emptyset$ ist trivialerweise auch $I_N = \emptyset$). Die kleinere Menge $\Omega^\circ := \Omega \setminus N$ leistet nun das Gewünschte, wobei die auf Ω° eingeschränkte σ -Algebra \mathcal{F}_T° analog zu oben dargestellt werden kann als

$$\mathcal{F}_T^\circ = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \subseteq \{1, \dots, m\} \setminus I_N \right\} \subseteq \mathcal{F}_T.$$

Die Atome der σ -Algebra \mathcal{F}_T° bestehen also gerade aus den "restlichen" Atomen von \mathcal{F}_T , die nicht zur Darstellung von N benötigt werden. Für die Einschränkung P° von P auf \mathcal{F}_T° , die definiert ist durch

$$P^\circ(A) := P(A \cap \Omega^\circ) \text{ für alle } A \in \mathcal{F}_T,$$

gilt entsprechend

$$P^\circ(A) = P(A \cap \Omega^\circ) = P(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{F}_T^\circ.$$

Alle "wesentlichen" Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten bleiben also in dem reduzierten Modell erhalten; es werden lediglich nicht-leere Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit Null entfernt.

Im Anfangsbeispiel gilt nun etwa $T = 1$, $\phi = (\phi_0, \phi_1)$, $S = (S_0, S_1)$ mit:

$$\begin{array}{llll} \phi_0[0] = 0 & \phi_1[0] = 161,90 & S_0[0] = 1 & S_1[0] = 1,05 \\ \phi_0[1] = 0 & \phi_1[1] = -2 & \text{und } S_0[1] = 100 & S_1[1] = 80 + 50I_1 \\ \phi_0[2] = 0 & \phi_1[2] = 5 & S_0[2] = 7,62 & S_1[2] = (S_1[1] - 110)^+ = 20I_1, \end{array}$$

wobei I_1 eine $B(1, p)$ -binomialverteilte Zufallsgröße mit $p=0.4$ bezeichne. Dabei bezieht sich die Komponente [1] auf den Aktien-, die Komponente [2] auf den Derivate-Markt.

Für die σ -Algebra \mathcal{F}_1 bedeutet die Messbarkeit von I_1 dabei, dass die Beziehung

$$\mathcal{F}_1 \supseteq \{\emptyset, A, A^c, \Omega\} \text{ mit } A = I_1^{-1}(\{1\})$$

gelten muss.

Für die Werte $V_0(\phi)$ und $V_1(\phi)$ ergibt sich entsprechend:

$$\begin{aligned} V_0(\phi) &= \langle \phi_0, S_0 \rangle = 0 = \langle \phi_1, S_0 \rangle = 161,90 \cdot 1 - 2 \cdot 100 + 5 \cdot 7,62 \\ V_1(\phi) &= \langle \phi_1, S_1 \rangle = 161,90 \cdot 1,05 - 2 \cdot (80 + 50I_1) + 5 \cdot 20I_1 = 170 - 160 = 10, \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der Tabelle auf S. 6. Hierbei ist zu beachten, dass die linke Spalte „Kontobewegung“ gerade die *entgegengesetzten* Vorzeichen enthält, wenn man die Bewertung des Portfolios nach obigem Muster vornimmt:

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Bewertung	$S_T^+ > X$	$S_T^- \leq X$
Leerverkauf 2 Aktien	-200,00	-260,00	-160,00
Kauf 5 Call-Optionen	+38,10	+100,00	0,00
Geld	+161,90	+170,00	+170,00
Saldo	0,00	+10,00	+10,00

Das nachfolgende Rechenbeispiel zur Arbitragefreiheit zeigt den Vorteil des hier gewählten Modellierungsansatzes. Dazu kürzen wir in der obigen Notation wie folgt ab:

$$\phi_1[0] =: x, \phi_1[1] =: y, \phi_1[2] =: z,$$

d.h. x repräsentiert die eingesetzte Geldmenge, y die Anzahl der gehandelten Aktien und z die Anzahl der gehandelten Optionen. Wählen wir die Zahlen des ursprünglichen Beispiels von Eberlein mit dem arbitragefreien Optionspreis $C_0 = 9,52 = 10v$ und überlegen uns eine "optimale" Kombination der genannten Finanzgüter, so ergeben sich folgende (Un-)Gleichungen:

$$\begin{aligned} x + 100y + 10vz &= 0 && \text{(Anfangswert Null)} \\ 1,05x + (80 + 50I_1)y + 20I_1z &\geq 0 && \text{(Endwert nicht-negativ).} \end{aligned}$$

Löst man die erste Gleichung nach x auf und setzt das Ergebnis in die zweite Ungleichung ein, so erhält man nach Ausklammern:

$$25(2I_1 - 1)y + 10(2I_1 - 1)z \geq 0.$$

Setzt man abwechselnd für I_1 die möglichen Werte 0 und 1 ein, so ergeben sich für $2I_1 - 1$ entsprechend die Werte -1 und 1 , d.h. die letzte Ungleichung geht nach weiterem Kürzen über in die Gleichung

$$5y + 2z = 0,$$

was bedeutet, dass die ursprüngliche zweite Ungleichung (Endwert nicht-negativ) faktisch eine Gleichung ist (Endwert Null), und damit gerade die Arbitragefreiheit widerspiegelt. Zugleich erhält man hier die zur Hedge Ratio analoge Beziehung $z = -\frac{5}{2}y$, d.h. die Anzahl ge-/verkaufter Optionen und ver-/gekaufter Aktien muss wie bekannt im Verhältnis 2:5 stehen.

10. Selbstfinanzierende Handelsstrategien

In diesem Abschnitt wollen wir einen für die gesamte Theorie derivativer Finanzinstrumente fundamentalen Finanzierbarkeitsbegriff ausführlicher diskutieren.

Definition 2: Eine Handelsstrategie ϕ heißt *selbstfinanzierend*, wenn gilt:

$$\langle \phi_n, S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle \text{ für } n = 0, \dots, T-1.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass zum Zeitpunkt $n-1$ Umschichtungen des Portfolios nur so erfolgen dürfen, dass sich sein aktueller Wert nicht verändert; insbesondere sind externe Zuführung oder Abführung von Finanzgütern (z.B. Schenkungen oder Spenden) nicht erlaubt.

Die obige Strategie aus dem Anfangsbeispiel ist beispielsweise selbstfinanzierend, da hier wegen $\phi_0 = 0$ beabsichtigterweise $0 = \langle \phi_0, S_0 \rangle = \langle \phi_1, S_0 \rangle$ gilt.

Das folgende Resultat gibt verschiedene Charakterisierungen von Selbstfinanzierbarkeit.

Satz 2: Äquivalent sind:

1. ϕ ist selbstfinanzierend
2. $V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \langle \phi_{n+1}, S_{n+1} - S_n \rangle$, $n = 0, \dots, T-1$
3. $\tilde{V}_{n+1}(\phi) - \tilde{V}_n(\phi) = \langle \phi_{n+1}, \tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n \rangle$, $n = 0, \dots, T-1$
4. $V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta S_j \rangle$, $n = 0, \dots, T$ mit $\Delta S_j = S_j - S_{j-1}$, $j = 1, \dots, T$
5. $\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle$, $n = 0, \dots, T$ mit $\Delta \tilde{S}_j = \tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}$
 $= v^j S_j - v^{j-1} S_{j-1}$, $j = 1, \dots, T$.

Beweis: Wir führen einige Ringschlüsse:

1 \Rightarrow 2: Für selbstfinanzierendes ϕ gilt:

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) &= \langle \phi_{n+1}, S_{n+1} \rangle - \langle \phi_n, S_n \rangle \\ &= \langle \phi_{n+1}, S_{n+1} - S_n \rangle + \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle - \langle \phi_n, S_n \rangle \\ &= \langle \phi_{n+1}, S_{n+1} - S_n \rangle, \quad n = 0, \dots, T-1, \end{aligned}$$

wie behauptet.

2 \Rightarrow 4: Es gilt

$$\begin{aligned}
V_n(\phi) - V_0(\phi) &= \sum_{j=1}^n [V_j(\phi) - V_{j-1}(\phi)] \\
&= \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, S_j - S_{j-1} \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta S_j \rangle, \quad n = 0, \dots, T,
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

4 \Rightarrow 1: Es folgt durch Summation

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \langle \phi_{n+1}, S_{n+1} - S_n \rangle, \quad n = 0, \dots, T-1,$$

also

$$\langle \phi_{n+1}, S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, S_{n+1} \rangle - V_{n+1}(\phi) + V_n(\phi) = \langle \phi_n, S_n \rangle$$

für $n = 0, \dots, T-1$, d.h. ϕ ist selbstfinanzierend.

Analog lässt sich 1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1 zeigen, wenn überall $V_n(\phi)$ und S_n durch $\tilde{V}_n(\phi)$ und \tilde{S}_n ersetzt werden.

Das folgende Ergebnis zeigt, dass die Annahme der Selbstfinanzierbarkeit keine wesentliche Einschränkung für Handelsstrategien bedeutet.

Satz 3: Es sei V_0 eine \mathcal{F}_0 -messbare (d.h. hier: konstante) Zufallsvariable. Dann kann in jeder Handelsstrategie ϕ die Teilstrategie $\phi[0] = (\phi_0[0], \dots, \phi_T[0])$ in eindeutiger Weise so gewählt werden, dass ϕ selbstfinanzierend ist mit $V_0(\phi) = V_0$.

Beweis: Wegen $\Delta \tilde{S}_j[0] = 0$ ist

$$\delta_j := \langle \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle = \sum_{k=1}^d \phi_j[k] \Delta \tilde{S}_j[k]$$

unabhängig von $\phi_0[0]$ für alle $j = 1, \dots, T$. Mit

$$\rho_n := \sum_{k=1}^d \phi_n[k] \tilde{S}_n[k], \quad n = 0, \dots, T$$

folgt:

$$\phi_n^*[0] := V_0 + \sum_{j=1}^n \delta_j - \rho_n, \quad n = 0, \dots, T$$

definiert über $\phi^* = (\phi_0^*, \dots, \phi_T^*)$ mit $\phi_n^* = (\phi_n^*[0], \phi_n^*[1], \dots, \phi_n^*[d])$, $n = 0, \dots, T$ die gewünschte Lösung:

ϕ^* ist selbstfinanzierend: für $n = 0, \dots, T$ gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_n(\phi^*) &= \langle \phi_n^*, \tilde{S}_n \rangle = \phi_n^*[0] + \rho_n = V_0 + \sum_{j=1}^n \delta_j = V_0 + \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^n \langle \phi_j^*, \Delta \tilde{S}_j \rangle = V_0(\phi^*) + \sum_{j=1}^n \langle \phi_j^*, \Delta \tilde{S}_j \rangle,\end{aligned}$$

wobei die Gleichung $V_0 = V_0(\phi^*)$ aus dem Fall $n = 0$ (wegen $\tilde{V}_0(\phi^*) = V_0(\phi^*)$) resultiert. (Man beachte, dass $\langle \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle = \langle \phi_j^*, \Delta \tilde{S}_j \rangle$ gilt wegen $\Delta \tilde{S}_j[0] = 0$.) Nach Satz 2, Teil 5 ist also ϕ^* selbstfinanzierend.

$\phi^*[0]$ ist vorhersagbar: für $n = 1, \dots, T$ gilt:

$$\begin{aligned}\phi_n^*[0] &= V_0 + \sum_{j=1}^n \delta_j - \rho_n = V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j + \delta_n - \rho_n \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \langle \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle - \sum_{k=1}^d \phi_n[k] \tilde{S}_{n-1}[k],\end{aligned}$$

und dies ist nach Voraussetzung \mathcal{F}_{n-1} -messbar.

$\phi_0^*[0]$ ist eindeutig: jede selbstfinanzierende Handelsstrategie ϕ mit $V_0 = V_0(\phi)$ impliziert (nach Satz 2, Teil 5):

$$\begin{aligned}\tilde{V}_n(\phi) &= \langle \phi_n, \tilde{S}_n \rangle = \phi_n[0] + \sum_{k=1}^d \phi_n[k] \tilde{S}_n[k] \\ &= V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle = V_0 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d \phi_j[k] \Delta \tilde{S}_j[k],\end{aligned}$$

also

$$\phi_n[0] = V_0 + \sum_{j=1}^n \delta_j - \rho_n.$$

Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

11. Martingale und Arbitrage

In diesem Abschnitt wollen wir den für die Optionsbewertung zentralen Begriff des *Martingals* näher untersuchen, der auch generell in der Stochastik eine bedeutende Rolle spielt. Es wird sich später zeigen, dass die Arbitragefreiheit des Marktes mit diesem Begriff eng gekoppelt ist. Dabei werden wir vorübergehend die betrachteten Filtrationen etwas allgemeiner fassen, d.h. die Randbedingungen $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_T = \mathfrak{P}(\Omega)$ werden hier fallengelassen.

Eine wesentliche Begriffsbildung ist hier die des (bedingten) *Erwartungswerts* einer reellen Zufallsvariablen Z auf (Ω, \mathcal{F}) mit einer gegebenen σ -Algebra \mathcal{F} über Ω . Z ist also insbesondere eine \mathcal{F} -messbare Abbildung auf Ω . Nach den Ausführungen in Abschnitt 8 können wir o.B.d.A. die ursprüngliche Wahrscheinlichkeitsverteilung P als auf ganz $\mathfrak{P}(\Omega)$ definiert ansehen; ggf. ist P auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ geeignet fortzusetzen. Es gilt dann in jedem Falle

$$E(Z) = \int Z dP = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{z \in \mathcal{Z}} z P(Z = z),$$

wobei $\mathcal{Z} = \{Z(\omega) | \omega \in \Omega\}$ die Wertemenge der Zufallsvariablen Z bezeichne; der obige Ausdruck ist dabei invariant gegenüber der ggf. gewählten Fortsetzung von P auf $\mathfrak{P}(\Omega)$.

Sei nun $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine Teil- σ -Algebra von \mathcal{F} über Ω . Unter dem bedingten Erwartungswert $E(Z|\mathcal{G})$ versteht man dann die folgende, \mathcal{G} -messbare Zufallsvariable:

$$E(Z|\mathcal{G}) := \sum_{j=1}^s \frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_{B_j})}{P(B_j)} \mathbf{1}_{B_j},$$

wobei $\{B_1, \dots, B_s\}$ die Menge der (paarweise disjunkten) Atome von \mathcal{G} bezeichne. $E(Z|\mathcal{G})$ ist also konstant auf den Atomen von \mathcal{G} mit den Werten $\frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_{B_j})}{P(B_j)}$, $j = 1, \dots, s$. Nach unserer generellen

Voraussetzung ist dabei $P(B_j) > 0$ für $j = 1, \dots, s$, d.h. $E(Z|\mathcal{G})$ ist wohldefiniert. Die angenommenen Werte von $E(Z|\mathcal{G})$ können noch wie folgt interpretiert werden: für $B \in \mathcal{G}$ mit $P(B) > 0$ ist

$$\frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_B)}{P(B)} = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{Z(\omega) \cdot \mathbf{1}_B(\omega)}{P(B)} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in B} \frac{Z(\omega)}{P(B)} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{Z(\omega) \cdot P(\{\omega\} \cap B)}{P(B)} = \int Z dP(\cdot | B)$$

mit der elementaren bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ für $A \in \mathcal{G}$. Der Ausdruck

$\frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_B)}{P(B)}$ entspricht also gerade dem Erwartungswert von Z bezüglich der elementaren bedingten

Verteilung $P(\cdot | B)$.

Die folgenden Eigenschaften des bedingten Erwartungswerts können unmittelbar aus der obigen Definition abgeleitet werden:

$$E(Z|\{\emptyset, \Omega\}) = E(Z) \text{ bzw. allgemeiner:}$$

$$E(Z|\mathcal{G}) = E(Z) \text{ falls } Z \text{ und } \mathcal{G} \text{ stochastisch unabhängig}$$

(d.h. Z und $\mathbf{1}_B$ stochastisch unabhängig für alle $B \in \mathcal{G}$)

$$E(Z|\mathfrak{P}(\Omega)) = Z$$

$$E(E(Z|\mathcal{G})) = E(Z)$$

$$E(Z|\mathcal{G}) = Z \text{ falls } Z \text{ } \mathcal{G}\text{-messbar}$$

$$E(E(Z|\mathcal{G})|\mathcal{J}) = E(Z|\mathcal{J}) \text{ falls } \mathcal{G} \supseteq \mathcal{J}$$

$$E(YZ|\mathcal{G}) = Y E(Z|\mathcal{G}) \text{ für alle } \mathcal{G}\text{-messbaren Zufallsvariablen } Y \text{ bzw. allgemeiner}$$

$$E(f(Y, Z)|\mathcal{G}) = E(f(y, Z)|\mathcal{G})\Big|_{y=Y} \text{ für alle } \mathcal{G}\text{-messbaren Zufallsvariablen } Y$$

mit (Borel-)messbarem f .

Definition 3: Es sei $\{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_T \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Filtration. Eine (endliche) Familie $\{X_n\}_{n=0, \dots, T}$ von Zufallsvariablen auf (Ω, P) heißt

- *der Filtration* $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0, \dots, T}$ *adaptiert*, wenn X_n \mathcal{F}_n -messbar ist für $n = 0, \dots, T$;
- *vorhersagbar*, wenn sie der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0, \dots, T}$ adaptiert und X_n \mathcal{F}_{n-1} -messbar ist für $n = 1, \dots, T$;
- ein *Martingal*, wenn sie der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0, \dots, T}$ adaptiert ist mit

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \text{ für } n = 0, \dots, T-1;$$

- ein *Vektor-Martingal*, wenn $X_n = (X_n[0], \dots, X_n[d]) \in \mathbb{R}^{d+1}$ für $n = 0, \dots, T$ und $\{X_n[i]\}_{n=0, \dots, T}$ für jedes $i = 0, \dots, d$ ein Martingal ist.

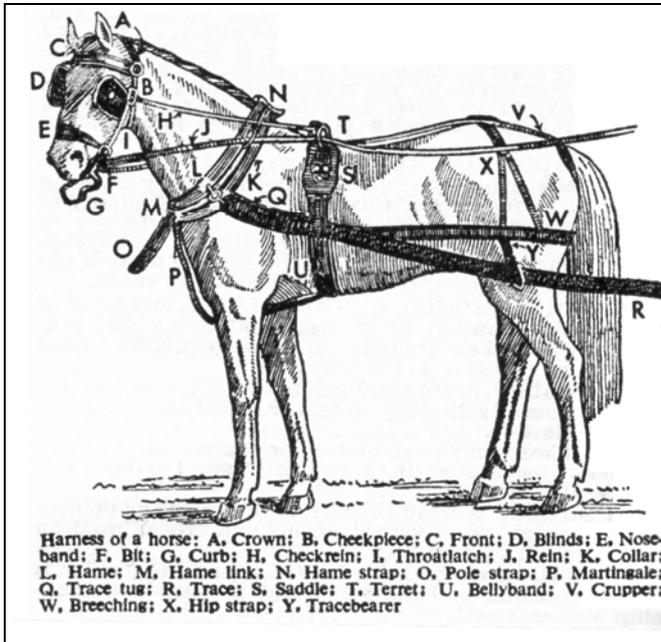
Ist beispielsweise $\{Y_n\}_{n=0, \dots, T}$ eine der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0, \dots, T}$ adaptierte Familie von Zufallsvariablen auf (Ω, P) mit $E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$ für $n = 0, \dots, T-1$ und definiert man

$$X_n := \sum_{i=0}^n Y_i, \quad n = 0, \dots, T,$$

so ist $\{X_n\}_{n=0, \dots, T}$ ein Martingal wegen

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(X_n + Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(X_n|\mathcal{F}_n) + E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \text{ für } n = 0, \dots, T-1.$$

Dieser Fall liegt z.B. vor für eine unabhängige Familie $\{Y_n\}_{n=0,\dots,T}$ mit $E(Y_n)=0$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n)$ (= die von $\{Y_i\}_{i=0,\dots,n}$ erzeugte σ -Algebra) für alle n .



Unter einem Martingal wird in der Reiterei ein Teil des Zaumzeugs des Pferdes (engl.: *harness*) verstanden. Es handelt sich dabei um den Hilfszügel (P), der das unkontrollierte Hochwerfen des Kopfes verhindern soll.

Der Begriff wurde früher zur Bezeichnung eines Spielsystems verwendet, bei dem der Einsatz nach einem Verlust jeweils verdoppelt wird (z.B. beim Roulette). In der modernen Stochastik beschreibt ein Martingal ein Modell eines fairen Spiels. Der Begriff wurde 1939 von J. Ville eingeführt. In dem Text *Étude Critique de la Notion de Collectif* diskutiert er von Mises's These, dass ein erfolgreiches Spielsystem bei Zufallsfolgen unmöglich sei; so nennt er ein Martingal "un jeu équitable."

Die Graphik links stammt aus dem *American College Dictionary*, Random House, N.Y. 1969.

Satz 4: $\{M_n\}_{n=0,\dots,T}$ sei ein Martingal und $\{H_n\}_{n=0,\dots,T}$ eine bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$ vorhersagbare Familie. Ferner sei $\Delta M_n := M_n - M_{n-1}$, $n = 1, \dots, T$. Dann ist auch die durch

$$X_n := \begin{cases} H_0 M_0, & n = 0 \\ X_0 + \sum_{i=1}^n H_i \Delta M_i, & n = 1, \dots, T \end{cases}$$

definierte Familie ein Martingal bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$ (die sog. *durch* $\{H_n\}_{n=0,\dots,T}$ induzierte Martingal-Transformation von $\{M_n\}_{n=0,\dots,T}$).

Beweis:

- $\{X_n\}_{n=0,\dots,T}$ ist adaptiert
- Es gilt für $n = 0, \dots, T-1$:

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) &= E(H_{n+1} \cdot (M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n) \\ &= H_{n+1} E(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n) = H_{n+1} \cdot (M_n - M_n) = 0, \end{aligned}$$

also

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(X_n | \mathcal{F}_n) = X_n, \quad n = 0, \dots, T-1.$$

Satz 5: Eine der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$ adaptierte Familie $\{M_n\}_{n=0,\dots,T}$ ist genau dann ein Martingal, wenn für jede vorhersagbare Familie $\{H_n\}_{n=0,\dots,T}$ gilt:

$$E\left(\sum_{n=1}^T H_n \Delta M_n\right) = 0.$$

Beweis:

\Rightarrow : Wähle für $\{X_n\}_{n=0,\dots,T}$ die durch $\{H_n\}_{n=0,\dots,T}$ induzierte Martingal-Transformation. Dann ist

$$E\left(\sum_{n=1}^T H_n \Delta M_n\right) = E(X_T - X_0) = E\left(E(X_T - X_0 | \mathcal{F}_{T-1})\right) = E(X_{T-1} - X_0) = E(X_0 - X_0) = 0.$$

\Leftarrow : Für $m = 0, \dots, T-1$ wähle $H_n := \begin{cases} 0, & n \neq m+1 \\ \mathbf{1}_A, & n = m+1 \end{cases}$ mit einer beliebigen, aber festen \mathcal{F}_m -messbaren Menge A . Dann ist $\{H_n\}_{n=0,\dots,T}$ vorhersagbar mit

$$E(\mathbf{1}_A \cdot (M_{m+1} - M_m)) = E\left(\sum_{n=1}^T H_n \Delta M_n\right) = 0,$$

also

$$\begin{aligned} \int_A E(M_{m+1} | \mathcal{F}_m) dP &= \int \mathbf{1}_A E(M_{m+1} | \mathcal{F}_m) dP = \int E(M_{m+1} \mathbf{1}_A | \mathcal{F}_m) dP \\ &= E(E(M_{m+1} \mathbf{1}_A | \mathcal{F}_m)) = E(M_{m+1} \mathbf{1}_A) = \int_A M_m dP \end{aligned}$$

nach Voraussetzung, d.h. wegen der Beliebigkeit von A :

$$E(M_{m+1} | \mathcal{F}_m) = M_m,$$

was gerade der Martingaleigenschaft entspricht.

Die Sätze 4 und 5 lassen sich sofort auch auf Vektor-Martingale übertragen. Dazu wird das reelle Produkt (zweier Zahlen) durch das Skalarprodukt (zweier Vektoren) ersetzt. Der Δ -Operator ist entsprechend komponentenweise anzuwenden, gleiches gilt für den Begriff der Adaptiertheit und Vorhersagbarkeit.

Satz 6: $\{M_n\}_{n=0,\dots,T}$ sei ein Vektor-Martingal und $\{H_n\}_{n=0,\dots,T}$ eine bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$ vorhersagbare Familie von Zufallsvektoren. Dann ist auch die durch

$$X_n := \begin{cases} \langle H_0, M_0 \rangle, & n = 0 \\ X_0 + \sum_{i=1}^n \langle H_i, \Delta M_i \rangle, & n = 1, \dots, T \end{cases}$$

definierte Familie ein Martingal bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$.

Beweis:

- $\{X_n\}_{n=0,\dots,T}$ ist adaptiert
- Es gilt für $n = 0, \dots, T-1$:

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) &= E(\langle H_{n+1}, M_{n+1} - M_n \rangle | \mathcal{F}_n) = E\left(\sum_{i=0}^d H_{n+1}[i](M_{n+1}[i] - M_n[i]) | \mathcal{F}_n\right) \\ &= \sum_{i=0}^d H_{n+1}[i] E(M_{n+1}[i] - M_n[i] | \mathcal{F}_n) = \sum_{i=0}^d H_{n+1}[i] \cdot (M_n[i] - M_n[i]) = 0, \end{aligned}$$

also

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(X_n | \mathcal{F}_n) = X_n, \quad n = 0, \dots, T-1.$$

Satz 7: Eine der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$ adaptierte Familie von Zufallsvektoren $\{M_n\}_{n=0,\dots,T}$ ist genau dann ein Vektor-Martingal, wenn für jede vorhersagbare Familie von Zufallsvektoren $\{H_n\}_{n=0,\dots,T}$ gilt:

$$E\left(\sum_{n=1}^T \langle H_n, \Delta M_n \rangle\right) = 0.$$

Beweis:

\Rightarrow : Es ist

$$E\left(\sum_{n=1}^T \langle H_n, \Delta M_n \rangle\right) = \sum_{n=1}^T \sum_{i=0}^d E(H_n[i] \Delta M_n[i]) = \sum_{i=0}^d E\left(\sum_{n=0}^T H_n[i] \Delta M_n[i]\right) = 0$$

nach Satz 5 bei komponentenweiser Anwendung.

\Leftarrow : Für festes $j \in \{0, \dots, d\}$ wähle $\{H_n[j]\}_{n=0,\dots,T}$ als beliebige vorhersagbare Familie; setze weiter $H_n[i] := 0$ für $i \in \{0, \dots, d\}$, $i \neq j$. Dann ist $\{H_n\}_{n=0,\dots,T}$ eine vorhersagbare Familie von Zufallsvektoren. Aus

$$E\left(\sum_{n=1}^T \langle H_n, \Delta M_n \rangle\right) = E\left(\sum_{n=1}^T H_n[j] \Delta M_n[j]\right) = 0$$

folgt nach Satz 5, dass die Familie $\{M_n[j]\}_{j=0,\dots,T}$ ein Martingal ist; da j beliebig war, ist also $\{M_n\}_{n=0,\dots,T}$ ein Vektor-Martingal.

Für das folgende seien nun wieder die Voraussetzungen vom Anfang dieses Kapitels gültig.

Definition 4: Eine Handelsstrategie ϕ heißt *zulässig*, wenn sie selbstfinanzierend ist und $V_n(\phi) \geq 0$ gilt für $n = 0, \dots, T$. Eine Handelsstrategie ϕ heißt *Arbitrage-Strategie*, wenn sie zulässig ist mit $V_0(\phi) = 0$ und $P(V_T(\phi) > 0) > 0$. Ein Markt heißt *arbitragefrei*, wenn es keine Handelsstrategie ϕ gibt, die Arbitrage-Strategie ist.

Man beachte, dass nach den getroffenen Annahmen, insbesondere der Zulässigkeit und der Bedingung $P(A) > 0$ für alle $A \in \mathcal{F}_T$, die Arbitrage-Bedingung $P(V_T(\phi) > 0) > 0$ äquivalent ist zu $V_T(\phi) \neq 0$.

In unserem Anfangsbeispiel ist die Strategie ϕ erwartungsgemäß eine Arbitrage-Strategie, da sie offensichtlich zulässig ist mit $V_1(\phi) = 10 > 0$.

Im weiteren benötigen wir noch folgende **Bezeichnungen**:

- Der konvexe Kegel der schwach positiven Zufallsvariablen Z auf (Ω, P) werde mit Γ bezeichnet (d.h. es gelte $Z(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und $Z(\eta) > 0$ für mindestens ein $\eta \in \Omega$, d.h. Z ist nicht-negativ, aber nicht konstant Null).
- Für $n = 0, \dots, T$ seien die kumulativen Gewinne mit $G_n(\phi)$, die diskontierten kumulativen Gewinne mit $\tilde{G}_n(\phi)$ bezeichnet:

$$G_n(\phi) = V_n(\phi) - V_0(\phi) = \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta S_j \rangle,$$

$$\tilde{G}_n(\phi) = \tilde{V}_n(\phi) - V_0(\phi) = \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle \text{ für } n = 0, \dots, T.$$

Man beachte, dass beide Ausdrücke unabhängig von ϕ_0 sind. Ferner werde mit \mathcal{H} die Menge der Handelsstrategien ϕ bezeichnet.

Für die nachfolgenden Überlegungen ist es sinnvoll, Zufallsvariablen X auf (Ω, P) wegen der Endlichkeit von Ω – etwa $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_\alpha\}$ mit $\#(\Omega) = \alpha \in \mathbb{N}$ – als Elemente des Funktionenraumes \mathbb{R}^Ω bzw. hierzu isomorph des euklidischen Raumes \mathbb{R}^α aufzufassen, indem wir die Abbildung X mit dem Vektor $(X(\omega_1), \dots, X(\omega_\alpha))$ identifizieren. Wir können dann leicht von dem folgenden, in der konvexen Analysis und linearen Optimierung bekannten Satz Gebrauch machen:

Satz 8: Es sei K eine nicht-leere, kompakte, konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^α und $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^\alpha$ ein linearer Teilraum mit $K \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Dann existiert ein $z \in \mathbb{R}^\alpha$ mit

$$\begin{aligned} \|z\| &= \inf \{\|x - y\| \mid x \in K, y \in \mathcal{V}\} =: \delta(K, \mathcal{V}) > 0 \\ \langle z, y \rangle &= 0 \text{ für alle } y \in \mathcal{V} \\ \langle z, x \rangle &\geq \|z\|^2 > 0 \text{ für alle } x \in K. \end{aligned}$$

Dabei bezeichne wie üblich $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\alpha} x_i^2}$ die euklidische Norm des Vektors $x \in \mathbb{R}^\alpha$.

Beweis: Sei zunächst $\mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$, wobei $\mathbf{0}$ den Nullvektor bezeichne, und F eine beliebige, nicht-leere, abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^α mit $F \cap \mathcal{W} = \emptyset$, d.h. $\mathbf{0} \notin F$. Dann existiert ein $f \in F$ mit

$$\|f\| = \delta(F, \mathcal{W}) = \inf \{\|x - y\| \mid x \in F, y \in \mathcal{W}\} = \inf \{\|x\| \mid x \in F\} > 0.$$

Ist nämlich $g \in F$ beliebig, aber fest gewählt und $\varepsilon := \|g\| > 0$ (wegen $\mathbf{0} \notin F$), so gilt offenbar auch

$$\delta(F, \mathcal{W}) = \inf \{\|x\| \mid x \in F\} = \inf \{\|x\| \mid x \in F \cap K_\varepsilon(\mathbf{0})\},$$

wobei $K_\varepsilon(\mathbf{0}) := \{x \in \mathbb{R}^\alpha \mid \|x\| \leq \varepsilon\}$ die abgeschlossene Kugel um den Nullpunkt mit Radius $\varepsilon > 0$ bezeichne. Auf der nunmehr kompakten, nicht-leeren Menge $F \cap K_\varepsilon(\mathbf{0}) \ni g$ besitzt die stetige Abbildung $x \mapsto \|x\|$ aber ein Minimum, das etwa in $f \in F \cap K_\varepsilon(\mathbf{0}) \subseteq F$ angenommen wird. Wegen $f \neq \mathbf{0}$ nach Voraussetzung ist dann

$$\|f\| = \delta(F, \mathcal{W}) = \inf \{\|x\| \mid x \in F\} > 0,$$

wie behauptet.

Sei nun zusätzlich F konvex. Für $0 < t \leq 1$ gehören dann mit f auch alle Punkte $f + t(u - f)$ mit $u \in F$ ebenfalls zu F , mit

$$\begin{aligned} \|f\|^2 + t^2 \|u - f\|^2 + 2t \langle f, u - f \rangle &= \|f + t(u - f)\|^2 \geq \|f\|^2 \quad \forall t \in (0, 1] \\ \Leftrightarrow t \|u - f\|^2 + 2 \langle f, u - f \rangle &\geq 0 \quad \forall t \in (0, 1] \\ \Leftrightarrow \langle f, u \rangle &\geq \langle f, f \rangle = \|f\|^2 > 0; \end{aligned}$$

nach Voraussetzung folgt also

$$\langle f, u \rangle \geq \|f\|^2 > 0 \text{ für alle } u \in F.$$

Damit ist der Satz in der speziellen Situation $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ und $K = F$ (für sogar nur abgeschlossene) konvexe Mengen F mit $z = f$ bewiesen, da hier trivialerweise

$$\langle z, y \rangle = 0 \text{ für alle } y \in \mathcal{V}$$

gilt.

Sei nun \mathcal{V} ein beliebiger, von $\{\mathbf{0}\}$ verschiedener Teilraum und K konvex und kompakt, mit $K \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Wir betrachten dann die Menge $L := K - \mathcal{V} = \{x - y \mid x \in K, y \in \mathcal{V}\}$. Diese ist abgeschlossen und konvex, mit

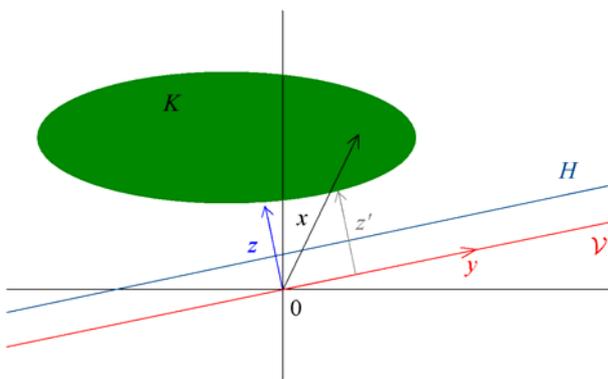
$$\delta(L, \{\mathbf{0}\}) = \delta(K, \mathcal{V}) > 0,$$

also insbesondere $L \cap \{\mathbf{0}\} = \emptyset$. Ersetzt man nun in der obigen Argumentation F durch L , so folgt die Existenz eines Vektors $z \in L$ mit

$$\langle z, x - \beta y \rangle = \langle z, x \rangle - \beta \langle z, y \rangle \geq \|z\|^2 > 0$$

wegen $x - \beta y \in L$ für alle $x \in K, y \in \mathcal{V}, \beta \in \mathbb{R}$. Da β beliebig groß gewählt werden kann, folgt nun direkt $\langle z, y \rangle = 0$ für alle $y \in \mathcal{V}$ sowie $\langle z, x \rangle \geq \|z\|^2 > 0$ für alle $x \in K$, wie behauptet. Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

Satz 8 ist in der Literatur auch als eine Version des *Satzes von der trennenden Hyperebene* bekannt:



Der Vektor z ist nämlich orthogonal zu \mathcal{V} (wegen $\langle z, y \rangle = 0$ für alle $y \in \mathcal{V}$), wobei $\|z\|$ den Abstand von K zur Hyperebene (dem Teilraum) \mathcal{V} angibt; verschiebt man nun die Hyperebene \mathcal{V} parallel in Richtung z , d.h. betrachtet man die affine Hyperebene $H = \eta z + \mathcal{V}$ mit $0 < \eta < 1$, so "trennt" diese gerade die Menge K und den Teilraum \mathcal{V} .

Die andere Bedingung $\langle z, x \rangle > 0$ besagt hier anschaulich, dass die Winkel zwischen z und den vom Fußpunkt des Vektors z in die Menge K führenden Vektoren x stets strikt zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen.

Die Bedeutung des Satzes 8 zeigt sich nun bei der Charakterisierung der Arbitragefreiheit eines Marktes.

Satz 9: Notwendig für die Arbitragefreiheit eines Marktes ist folgende Bedingung:

$$\tilde{G}_T(\phi) \notin \Gamma \text{ für jedes } \phi \in \mathcal{H}.$$

Beweis durch Widerspruch: Der Markt sei arbitragefrei mit $\tilde{G}_T(\phi) \in \Gamma$ für $\phi \in \mathcal{H}$. Da $\tilde{G}_T(\phi)$ unabhängig von ϕ_0 ist, kann nach Satz 3 ϕ als selbstfinanzierend angenommen werden mit $V_0(\phi) = 0$. Wegen $\tilde{G}_n(\phi) = \tilde{V}_n(\phi) - V_0(\phi) = \tilde{V}_n(\phi)$ kann nicht $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$ gelten für alle $n = 0, \dots, T$ (sonst Widerspruch zur Arbitragefreiheit wegen $v^T V_T(\phi) = \tilde{V}_T(\phi) = \tilde{G}_T(\phi) \in \Gamma$, also $P(V_T(\phi) > 0) > 0$). Wähle

$$m := \max \left\{ k \in \{0, \dots, T-1\} \mid P(\tilde{G}_k(\phi) < 0) > 0 \right\}.$$

Definiere die Handelsstrategie ψ durch

$$\psi_n := \begin{cases} \mathbf{1}_{A_m} \cdot \phi_n, & n > m \\ 0, & n \leq m \end{cases} \quad \text{mit } A_m := \{\tilde{G}_m(\phi) < 0\}.$$

Dann ist A_m \mathcal{F}_m -messbar und ψ vorhersagbar (da ϕ vorhersagbar). Damit folgt für $n = 0, \dots, T$:

$$\tilde{G}_n(\psi) = \sum_{j=1}^n \langle \psi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle = \sum_{j=m+1}^n \langle \mathbf{1}_{A_m} \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle = \mathbf{1}_{A_m} \sum_{j=m+1}^n \langle \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle,$$

also

$$\tilde{G}_n(\psi) = \begin{cases} \mathbf{1}_{A_m} \cdot (\tilde{G}_n(\phi) - \tilde{G}_m(\phi)), & n > m \\ 0, & n \leq m \end{cases} \geq 0,$$

da auf A_m $\tilde{G}_m(\phi)$ negativ ist und für $n > m$ gilt: $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$. Insbesondere ist damit auch $\tilde{G}_T(\psi) > 0$ auf A_m : Widerspruch zur Arbitragefreiheit! Die Annahme von $\tilde{G}_T(\phi) \in \Gamma$ ist also falsch, der Satz damit bewiesen.

Wir wollen uns im folgenden überlegen, was die Aussage des Satzes 9 für unser anfängliches Beispiel von Eberlein konkret bedeutet. Wir legen dazu wieder die Notation von S. 41 zugrunde, d.h.

$$\phi_1[0] =: x, \phi_1[1] =: y, \phi_1[2] =: z,$$

mit reellen Zahlen x, y, z . Wie erhalten dann mit zunächst nicht spezifiziertem Optionspreis C_0

$$\tilde{G}_1(\phi) = \langle \phi_1, \Delta \tilde{S}_1 \rangle = y(80v - 100 + 50vI_1) + z(20vI_1 - C_0).$$

Das (stochastische) Modell beinhaltet lediglich eine einzelne binomialverteilte Zufallsvariable I_1 ; es genügt daher, für Ω eine zweielementige Menge anzusetzen: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ mit

$$I_1(\omega_1) = 0$$

$$I_1(\omega_2) = 1.$$

Für diesen Fall können wir also $\alpha = 2$ wählen; in vektorieller Schreibweise können wir demnach die Größe $\tilde{G}_1(\phi)$ identifizieren mit

$$\tilde{G}_1(\phi) \triangleq y \begin{bmatrix} 80v - 100 \\ 130v - 100 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -C_0 \\ 20v - C_0 \end{bmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Der lineare (Teil-)Raum, in dem die "Vektoren" $\tilde{G}_1(\phi)$ liegen, wird also aufgespannt durch die Vektoren $\begin{bmatrix} 80v - 100 \\ 130v - 100 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -C_0 \\ 20v - C_0 \end{bmatrix}$. Die Bedingung $\tilde{G}_T(\phi) \notin \Gamma$ lässt sich also dann und nur dann realisieren, wenn diese beiden Vektoren *linear abhängig* sind (anderenfalls spannen sie ganz \mathbb{R}^2 auf), d.h. wenn gilt

$$50v(32v - 40 + C_0) = \det \begin{bmatrix} (80v - 100) & -C_0 \\ (130v - 100) & (20v - C_0) \end{bmatrix} = 0, \quad \text{also } C_0 = 40 - 32v = 10v = 9,52\dots$$

in Übereinstimmung mit unserer früheren Berechnung des (eindeutig bestimmten) arbitragefreien Call-Preises C_0 .

Wir kommen jetzt zum sogenannten *Fundamentalsatz der Optionspreis-Theorie*:

Satz 10: Ein Markt ist arbitragefrei *genau dann*, wenn es ein zu P äquivalentes Maß P^* gibt (d.h. mit denselben Nullmengen wie P), unter dem die diskontierten Preise $(\tilde{S}_0, \dots, \tilde{S}_T)$ ein Vektor-Martingal bilden. P^* heißt dann ein *zu P äquivalentes Martingalmaß*.

Beweis:

⇐: Für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ϕ gilt nach Satz 2, Teil 5:

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{i=1}^n \langle \phi_i, \Delta \tilde{S}_i \rangle$$

[mit $\tilde{V}_0(\phi) = V_0(\phi)$], d.h. $(\tilde{V}_0(\phi), \dots, \tilde{V}_T(\phi))$ ist als Martingal-Transformation der Preise ebenfalls ein Martingal unter P^* nach Satz 6; also gilt

$$E^*(\tilde{V}_T(\phi)) = E^*(V_0(\phi)).$$

Dabei bezeichne E^* den Erwartungswert bezüglich P^* . Für ϕ zulässig mit $V_0(\phi) = 0$ folgt somit

$$E^*(\tilde{V}_T(\phi)) = 0 \quad \text{mit} \quad \tilde{V}_T(\phi) \geq 0,$$

also $\tilde{V}_T(\phi) = 0$ (einzige Nullmenge unter P und P^* ist \emptyset). Damit ist der Markt aber arbitragefrei.

\Rightarrow : $K := \left\{ Z \in \Gamma \mid \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) = 1 \right\}$ ist eine kompakte, konvexe Teilmenge von Γ mit $K \cap \mathcal{V} = \emptyset$ nach Satz 9, wobei $\mathcal{V} := \left\{ \tilde{G}_T(\phi) \mid \phi \in \mathcal{H} \right\}$ sei; dies ist ein linearer Teilraum von \mathbb{R}^Ω bzw. \mathbb{R}^α im Sinne der oben angesprochenen Identifikation. Nach sinngemäßer Anwendung von Satz 8 existiert dann ein $\lambda \in \mathbb{R}^\Omega$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) Z(\omega) &\geq \sum_{\omega \in \Omega} \lambda^2(\omega) > 0 \quad \text{für alle } Z \in K \\ \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \tilde{G}_T(\phi; \omega) &= 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Wählen wir in der oberen Ungleichung für beliebiges, aber festes $\omega \in \Omega$ speziell $Z_\omega(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta = \omega \\ 0, & \eta \neq \omega \end{cases}$ für $\eta \in \Omega$, so ist offenbar $Z_\omega \in K$ mit

$$\lambda(\omega) = \sum_{\eta \in \Omega} \lambda(\eta) Z_\omega(\eta) > 0.$$

Mit dem Ansatz

$$P^*(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\eta \in \Omega} \lambda(\eta)} > 0, \quad \omega \in \Omega$$

ist ferner ein zu P äquivalentes Mass P^* gefunden mit

$$E^* \left(\sum_{j=1}^T \langle \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle \right) = E^*(\tilde{G}_T(\phi)) = \frac{\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \tilde{G}_T(\phi; \omega)}{\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega)} = 0$$

für alle $\phi \in \mathcal{H}$. Nach Satz 7 ist also $(\tilde{S}_0, \dots, \tilde{S}_T)$ ein Vektor-Martingal.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Das im Anschluss an Satz 9 behandelte konkrete Beispiel lässt sich nunmehr wie folgt ergänzen:

Der eindimensionale lineare Teilraum \mathcal{V} , der von den "Vektoren" $\tilde{G}_1(\phi)$ erzeugt wird, wenn der arbitragefreie Call-Preis $C_0 = 10v$ zugrundegelegt wird, besitzt den Basisvektor $\begin{bmatrix} 80v - 100 \\ 130v - 100 \end{bmatrix}$ bzw.

nach Multiplikation mit $\frac{r}{25}$ als skalarem Faktor: $\frac{1}{25} \begin{bmatrix} 80 - 105 \\ 130 - 105 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} =: \mathbf{b}$. Da der zur Bestim-

mung des äquivalenten Martingalmaßes P^* benötigte "Vektor" λ nach Satz 8 bzw. 10 orthogonal zu \mathcal{V} und damit zu \mathbf{b} ist, also

$$\langle \lambda, \mathbf{b} \rangle = \lambda(\omega_1)b_1 + \lambda(\omega_2)b_2 = -\lambda(\omega_1) + \lambda(\omega_2) = 0$$

gilt, folgt $\lambda(\omega_1) = \lambda(\omega_2)$ und somit $P^*(\{\omega_1\}) = P^*(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$, was sich inhaltlich mit der schon früher gefundenen äquivalenten Wahrscheinlichkeit $p^* = P^*(\{\omega_1\}) = 1 - p^* = 1 - P^*(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$ deckt.

Es bietet sich nunmehr an, die Bedeutung von Satz 10 für das allgemeinere Modell von Cox, Ross und Rubinstein genauer zu studieren. Dazu betrachten wir zunächst das Zwei-Stufen-Ein-Perioden-Modell vom Anfang, das sich mit der früheren Notation und den Annahmen auf S. 5 (vgl. auch S. 38) folgendermaßen darstellen lässt:

$$\begin{aligned} S_0[0] &= 1 & S_1[0] &= r \\ S_0[1] &= S_0 & S_1[1] &= S_T^- + (S_T^+ - S_T^-)I_1 \\ S_0[2] &= C_0 & S_1[2] &= (S_1[1] - X)^+ = (S_T^+ - X)I_1, \end{aligned}$$

wobei I_1 wieder eine $B(1, p)$ -binomialverteilte Zufallsgröße bezeichnet. Wollen wir nun Arbitragefreiheit nach Satz 10 erreichen, müssen wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P^* so finden, dass die diskontierten Preise ein Vektor-Martingal unter P^* bilden. Für das obige einfache Modell ist diese Bedingung offensichtlich wegen $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ äquivalent zu

$$vE^*(S_1[k]) = S_0[k] \text{ bzw. } E^*(S_1[k]) = rS_0[k], \quad k = 0, 1, 2,$$

wobei die Bedingung für $k = 0$ (auch voraussetzungsgemäß) stets erfüllt ist. Wählen wir analog zu oben wieder die Bezeichnung $p^* = P^*(I_1 = 1)$, so liefern die beiden unteren Gleichungen jetzt

$$\begin{aligned} S_T^- + p^*(S_T^+ - S_T^-) &= E^*(S_1[1]) = rS_0[1] = rS_0 \\ p^*(S_T^+ - X) &= E^*(S_1[2]) = rS_0[2] = rC_0, \end{aligned}$$

woraus sich sofort die beiden (bekannten) Lösungen

$$p^* = \frac{rS_0 - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} \text{ und } C_0 = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} (S_0 - vS_T^-)$$

ergeben.

Wir betrachten nun die entsprechende Zwei-Perioden-Erweiterung des Anfangsbeispiels von Eberlein im Sinne von Cox, Ross und Rubinstein, die formal wie folgt beschrieben werden kann (mit $r = 1 + i = 1,05$):

$$\begin{array}{lll}
S_0[0] = 1 & S_1[0] = r & S_2[0] = r^2 \\
S_0[1] = 100 & S_1[1] = 80 + 50I_1 & S_2[1] = 64 + 40I_1 + 40I_2 + 25I_1I_2 \\
S_0[2] = C_0 & S_1[2] = C_1(I_1) & S_2[2] = 59I_1I_2,
\end{array}$$

wobei I_1 und I_2 zwei stochastisch unabhängige, je wieder $B(1, p)$ -binomialverteilte Zufallsgrößen bezeichnen. Als σ -Algebra \mathcal{F}_1 wählen wir dabei zweckmäßigerweise die von I_1 erzeugte σ -Algebra, also

$$\mathcal{F}_1 = \sigma(I_1) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\} \text{ mit } A = I_1^{-1}(\{1\}).$$

Die Schlusskurse $S_2[1]$ zur Zeit $2T$ sind also gegeben durch die Werte $\{64, 104, 169\}$, die für die Fälle $I_1 = I_2 = 0$, $I_1 = (1 - I_2) = 0$ bzw. $I_2 = (1 - I_1) = 0$, und $I_1 = I_2 = 1$ realisiert werden; entsprechend für die Optionswerte $S_2[2]$. Man beachte dabei, dass im Gegensatz zum Ein-Perioden-Fall der Preis $C_1(I_1)$ der Option zur Zeit T hier *nicht* durch $20I_1$ gegeben ist, da der Ausübungszeitpunkt der Option der spätere Zeitpunkt $2T$ ist. Für eine Anwendung von Satz 10 benötigen wir noch folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
E(S_1[1] | \mathcal{F}_0) &= E(S_1[1]) = 80 + 50p \\
E(S_1[2] | \mathcal{F}_0) &= E(S_1[2]) = E[C_1(I_1)] \\
E(S_2[1] | \mathcal{F}_1) &= 64 + 40p + (40 + 25p)I_1 \\
E(S_2[2] | \mathcal{F}_1) &= 59pI_1.
\end{aligned}$$

Die diskontierten Preise bilden also genau dann ein Vektor-Martingal, wenn

$$\begin{aligned}
100r &= rS_0[1] = E(S_1[1] | \mathcal{F}_0) = E(S_1[1]) = 80 + 50p \\
r(80 + 50I_1) &= rS_1[1] = E(S_2[1] | \mathcal{F}_1) = 64 + 40p + (40 + 25p)I_1 \\
rC_0 &= rS_0[2] = E(S_1[2] | \mathcal{F}_0) = E[C_1(I_1)] \\
rC_1(I_1) &= rS_1[2] = E(S_2[2] | \mathcal{F}_1) = 59pI_1
\end{aligned}$$

gilt; dies ist genau dann der Fall, wenn

$$p = p^* = \frac{1}{2} \text{ (Zeile 1), } C_1(I_1) = 59vpI_1 \text{ (Zeile 4) und } C_0 = vE[C_1(I_1)] = 59v^2p^2 = 13,37 \text{ (Zeile 3)}$$

ist. (Man beachte, dass Zeile 2 mit diesen Lösungen konsistent ist.) Nach Satz 10 ist der Markt also unter demselben p^* wie im Ein-Perioden-Modell arbitragefrei, mit einem zugehörigen Optionspreis von $C_0 = 13,37$. Im Gegensatz zum Ein-Perioden-Modell ist aber der Optionspreis zur Zeit 1 abhängig von der vorherigen Kursentwicklung, d.h. es ist $C_1 = 0$, wenn der Kurs fällt, und $C_1 = 59vp = 28,09$, wenn der Kurs steigt.

Wir wollen nun einige (zulässige) Handelsstrategien ϕ genauer untersuchen. Betrachten wir dazu zunächst die einfache Strategie, bei Leerverkauf von n Aktien m Call-Optionen zum Preis von $C_0 = 13,37$ zum Zeitpunkt 0 zu erwerben und diese Positionen bis zum Zeitpunkt $2T$ zu halten, also zum Zeitpunkt T keine Umschichtungen im Portfolio vorzunehmen (sog. „Buy-and-Hold“-Strategie). Wir erhalten dann folgende Tabelle, bei der es in der Rechnung wieder nur auf das Verhältnis von n zu m ankommt:

$t = 0$		$t = 2T$		
Aktion	Bewertung	$S_{2T} = 169$	$S_{2T} = 104$	$S_{2T} = 64$
Leerverkauf n Aktien	$-100n$	$-169n$	$-104n$	$-64n$
Kauf m Call-Optionen	$+mC_0$	$+59m$	0	0
Geld	$100n - mC_0$	$+r^2(100n - mC_0)$	$+r^2(100n - mC_0)$	$+r^2(100n - mC_0)$
Saldo	0,00	$-58,75n + 44,25m$	$6,25n - 14,75m$	$46,25n - 14,75m$

Die für das Vorliegen einer Arbitrage-Möglichkeit notwendigen Bedingungen

$$\begin{aligned} -58,75n + 44,25m &\geq 0 \\ 6,25n - 14,75m &\geq 0 \\ 46,25n - 14,75m &\geq 0 \end{aligned}$$

sind aber äquivalent zu der Bedingung $\frac{177}{235}m \geq n \geq \max\left\{\frac{59}{25}m, \frac{59}{185}m\right\}$, die jedoch nur für $m = n = 0$ erfüllt ist und somit in allen drei Kurssituationen zu einem Saldo von Null führt. Damit ist eine Arbitrage-Möglichkeit zwar ausgeschlossen, jedes nicht-triviale Portfolio (d.h. mit von Null verschiedenen Kontobewegungen) führt aber in wenigstens einer der drei Situationen zu einem echten Verlust. Insbesondere bedeutet dies auch, dass ein Hedging mit der obigen Strategie nicht mehr möglich ist, wie die folgende Tabelle, die sich direkt aus der obigen ergibt, zeigt:

$t = 0$		$t = 2T$		
Aktion	Bewertung	$S_{2T} = 169$	$S_{2T} = 104$	$S_{2T} = 64$
Besitz n Aktien	$+100n$	$+169n$	$+104n$	$+64n$
Verkauf m Call-Optionen	$-mC_0$	$-59m$	0	0
Geld	$+mC_0$	$+r^2mC_0$	$+r^2mC_0$	$+r^2mC_0$
Saldo	$+100n$	$169n - 44,25m$	$104n + 14,75m$	$64n + 14,75m$

mit den für ein Hedging analogen Bedingungen

$$\begin{aligned} 169n - 44,25m &\geq 110,25n \\ 104n + 14,75m &\geq 110,25n \\ 46,25n + 14,75m &\geq 110,25n, \end{aligned}$$

die wieder auf $\frac{177}{235}m \geq n \geq \frac{59}{25}m$ und damit bei $n > 0$ zu einer nicht erfüllbaren Bedingung an m führen. Aufgrund der Tatsache, dass der Optionspreis $C_1(I_1)$ für $I_1 = 0$ (anfängliche Kursabwärtsbewegung) zur Zeit T den Wert Null annimmt, ist ein Hedging sogar für keine (zulässige) Handelsstrategie ϕ möglich, jedenfalls nicht für Call-Optionen mit einem Ausübungspreis oberhalb von 104. Bei einem beispielhaften Ausübungspreis von $X = 100$ – der mit $p = p^* = \frac{1}{2}$ analog zu obiger Rechnung zu $C_1(I_1) = v\left(2 + \frac{69}{2}I_1\right)$ und $C_0 = vE[C_1(I_1)] = \frac{77}{4}v^2 = 17,46$ führt – lässt sich aber eine geeignete Hedging-Strategie ϕ finden, nämlich die folgende:

$$\begin{aligned} \phi_0[0] &= 0 & \phi_1[0] &= \frac{1925}{69}vn & \phi_2[0] &= \left(\frac{185}{4} - 36I_1\right)v^2n \\ \phi_0[1] &= n & \phi_1[1] &= n & \phi_2[1] &= n \\ \phi_0[2] &= 0 & \phi_1[2] &= -\frac{100rn}{69} & \phi_2[2] &= (-10 + 9I_1)n \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften:

$$V_0(\phi) = \langle \phi_0, S_0 \rangle = \langle \phi_1, S_0 \rangle = \frac{1925}{69}vn \cdot 1 + n \cdot 100 - \frac{100rn}{69} \cdot \frac{77}{4}v^2 = \mathbf{100n}$$

$$\begin{aligned} V_1(\phi) &= \langle \phi_1, S_1 \rangle = \frac{1925}{69}vn \cdot r + n \cdot (80 + 50I_1) - \frac{100rn}{69}v\left(2 + \frac{69}{2}I_1\right) \\ &= \frac{1925}{69}n + 80n - \frac{200}{69}n + 50nI_1 - 50nI_1 = 105n = \mathbf{r \cdot 100n} \\ &= \langle \phi_2, S_1 \rangle = \left(\frac{185}{4} - 36I_1\right)v^2nr + (80 + 50I_1)n + (-10 + 9I_1)nv\left(2 + \frac{69}{2}I_1\right) \\ &= n\left\{\left(\frac{185}{4} - 20\right)v + 80 + \left[\left(-36 + 18 - 345 + \frac{621}{2}\right)v + 50\right]I_1\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2(\phi) &= \langle \phi_2, S_2 \rangle = \left(\frac{185}{4} - 36I_1\right)v^2nr^2 + (64 + 40I_1 + 40I_2 + 25I_1I_2)n + \dots \\ &\quad + (4I_1 + 4I_2 + 61I_1I_2)(-10 + 9I_1)n \\ &= \left(\frac{185}{4} + 64\right)n + [(-36 + 40 - 40 + 36)I_1 + (40 - 40)I_2 + (25 - 610 + 36 + 549)I_1I_2]n \\ &= \frac{441}{4}n = \mathbf{r^2 \cdot 100n}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Komponenten $\phi_2[k]$ explizit nur von I_1 und nicht von I_2 abhängen, also in der Tat \mathcal{F}_1 -messbar sind. Insbesondere ist ϕ zulässig und selbstfinanzierend.

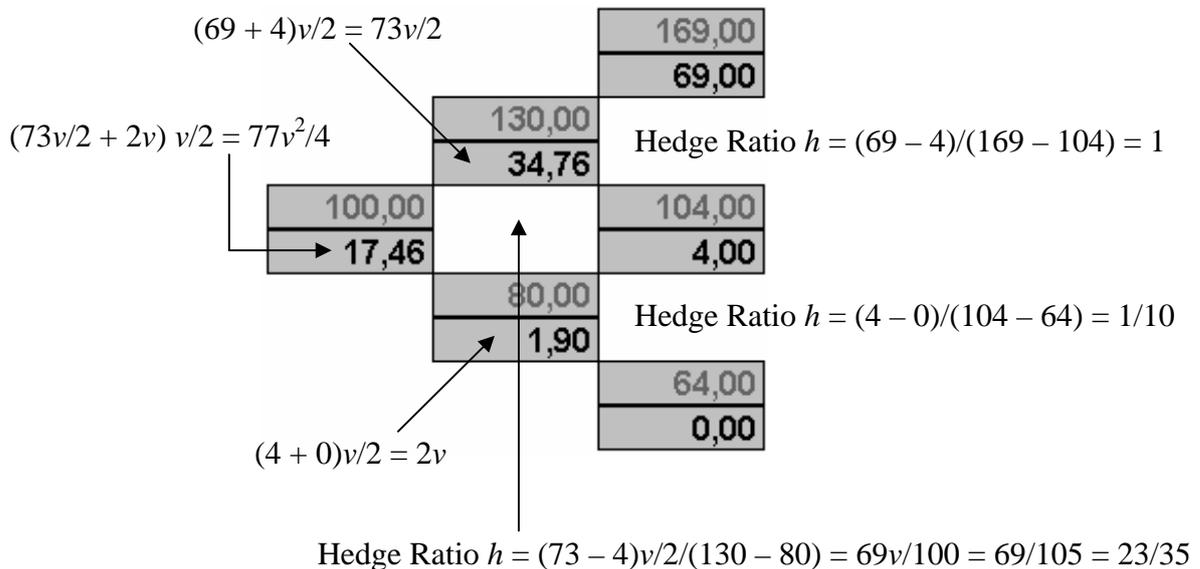
Diese Handelsstrategie ϕ kann konkret wie folgt realisiert werden:

$t = 0 :$	<p>Verkauf von $\frac{35}{23}n = 1,5217n$ Call-Optionen zum Preis von je $\frac{77}{4}v^2 = 17,4603 \text{ €}$</p> <p>Guthaben (Geld): $\frac{1925}{69}vn = 26,5700n \text{ €}$</p> <p>Bewertungs-Saldo: $100n \text{ €}$</p>
$t = T :$	<p>$I_1 = 1$ (Kursaufwärtsbewegung):</p> <p>(Rück-)Kauf von $\frac{12}{23}n = 0,5217n$ Call-Optionen zum Preis von je $\frac{73}{2}v = 34,7619 \text{ €}$</p> <p>Neuer Bestand: $-n$ Call-Optionen.</p> <p>Neues Guthaben (Geld): $\left(\frac{1925}{69} - \frac{438}{23}v\right)n = 9,7619n \text{ €}$</p> <p>Neuer Bewertungs-Saldo: $105n \text{ €}$</p>
	<p>$I_1 = 0$ (Kursabwärtsbewegung):</p> <p>Verkauf von $\frac{195}{23}n = 8,4783n$ Call-Optionen zum Preis von je $2v = 1,9048 \text{ €}$</p> <p>Neuer Bestand: $-10n$ Call-Optionen.</p> <p>Neues Guthaben (Geld): $\left(\frac{1925}{69} + \frac{390}{23}v\right)n = 44,0476n \text{ €}$</p> <p>Neuer Bewertungs-Saldo: $105n \text{ €}$</p>

Für Optionen mit anfänglichen Ausübungspreisen X oberhalb von 104 lässt sich noch eine ähnliche Hedging-Strategie konstruieren, wenn man zur Zeit $t = T$ *sämtliche* Call-Optionen zum aktuellen Preis zurückkauft (dies nennt man „Glattstellen“ der Optionsposition) und stattdessen Optionen mit einem geeigneten, niedrigeren Ausübungspreis neu verkauft. Formal enthält das Portfolio dann aber *vier* Bestandteile: Aktien, zwei unterschiedliche Optionstypen sowie die Geldposition.

Eine erhebliche technische Vereinfachung ergibt sich, wenn man in dem Binomialbaum des Cox-Ross-Rubinstein-Modells rekursiv von „hinten“ nach „vorne“ rechnet. Dazu mittelt man jeweils in

jedem „Knoten“ die diskontierten Optionswerte aus den beiden rechts benachbarten Verzweigungen mit der äquivalenten Wahrscheinlichkeit p^* und berechnet aus diesen Angaben die jeweilige Hedge Ratio. Dieses Verfahren ist rechnerisch gleichwertig zu der oben hergeleiteten Verfahrensweise; hierauf kommen wir später noch einmal im Detail zurück. Für das obige Beispiel ergibt sich mit $p^* = \frac{1}{2}$ (oberer Wert: Aktienkurs, unterer Wert: Optionspreis):



Die obigen Rechnungen haben gezeigt, dass für das ursprüngliche Options-Bewertungsproblem offensichtlich nur die Martingal-Eigenschaft der diskontierten Aktienkurse eine zentrale Rolle spielt, welche im wesentlichen durch die Eigenschaft $p = p^*$ charakterisiert ist. Dass dies allgemeiner im Cox-Ross-Rubinstein-Modell immer der Fall ist, zeigt der folgende

Satz 11: Betrachtet werde das n -Perioden-Cox-Ross-Rubinstein-Modell aus Kapitel 6, d.h. gegeben sind der Grundraum $\Omega = \{0,1\}^n$ mit dem Produktmaß $\otimes_{i=1}^n B(1, p)$ und Abbildungen I_1, \dots, I_n auf Ω mit $I_k : (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \omega_k$, $k = 1, \dots, n$. Dann sind I_1, \dots, I_n unabhängige, je $B(1, p)$ -verteilte Zufallsvariablen, und die Aktienkurse lassen sich darstellen vermöge

$$S_{kT} = (1 + k^+)^{N_k} (1 + k^-)^{k - N_k} S_0, \quad k = 1, \dots, n,$$

wobei $N_k := \sum_{i=1}^k I_i$ für $k = 1, \dots, n$ bezeichne. Ferner sei $\mathcal{F}_k = \sigma(I_1, \dots, I_k)$ für $k = 1, \dots, n$. Die diskontierten Aktienkurse seien mit

$$Z_k := v^{kT} S_{kT}, \quad k = 0, \dots, n$$

bezeichnet. Dann gilt: Die Folge $\{Z_k\}_{k=0, \dots, n}$ ist genau dann ein Martingal bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0, \dots, n}$, wenn $p = p^*$ ist, mit

$$p^* = \frac{rS_0 - (1+k^-)S_0}{(1+k^+)rS_0 - (1+k^-)S_0} = \frac{i_T - k^-}{k^+ - k^-}.$$

Beweis: Zunächst ist $\mathcal{F}_k = \sigma(I_1, \dots, I_k) = \sigma(Z_0, \dots, Z_k)$ für $k = 1, \dots, n-1$. Für diese k gilt dann:

$$\begin{aligned} E(Z_{k+1} | \mathcal{F}_k) &= E(Z_{k+1} | Z_0, \dots, Z_k) \\ &= v^T E \left[v^{kT} S_{kT} (1+k^+)^{I_{k+1}} (1+k^-)^{1-I_{k+1}} \mid S_0, \dots, v^{kT} S_{kT} \right] \\ &= v^T v^{kT} S_{kT} E \left[(1+k^+)^{I_{k+1}} (1+k^-)^{1-I_{k+1}} \right] \\ &= v^T v^{kT} S_{kT} \left[p(1+k^+) + (1-p)(1+k^-) \right] = v^{kT} S_{kT} = Z_k \end{aligned}$$

genau dann, wenn

$$v^T \left[p(1+k^+) + (1-p)(1+k^-) \right] = 1$$

bzw.

$$p = \frac{r^T - 1 - k^-}{k^+ - k^-} = p^*$$

ist.

Der auf S. 24 diskutierte Ansatz zur Bewertung von Optionen stellt sich also im nachhinein als richtig heraus; vgl. hierzu auch den späteren Satz 14.

12. Markt-Vollständigkeit

Im letzten Abschnitt stellte sich die (nicht-triviale) Frage nach der Bewertung von Optionen zu Zwischenzeitpunkten, wenn ein Mehr-Perioden-Modell für die Betrachtung zugrunde gelegt wird. Für das Cox-Ross-Rubinstein-Modell konnte diese Frage über die Martingal-Eigenschaft der diskontierten Aktienpreise gelöst werden. Wie man im allgemeinen Fall vorgehen kann, soll in diesem Abschnitt ausführlicher diskutiert werden. Dabei wollen wir – vor allem im Hinblick auf den nachfolgenden Satz 13 – ab jetzt voraussetzen, dass für die finale σ -Algebra $\mathcal{F}_T = \mathfrak{F}(\Omega)$ gilt, was wir nach Satz 1 ohne weiteres annehmen können, da das Wahrscheinlichkeitsmaß P gegebenenfalls auf ganz $\mathfrak{F}(\Omega)$ fortsetzbar ist.

Definition 5: Unter einem Claim [zum Zeitpunkt T] versteht man eine (\mathcal{F}_T -messbare) Abbildung $H \geq 0$ [z.B. den Wert einer Option am Verfalltag T]. Ein Claim heißt *absicherbar*, wenn es eine zulässige Handelsstrategie ϕ gibt mit $V_T(\phi) = H$. Ein Markt heißt *vollständig*, wenn jeder Claim absicherbar ist.

Beispielsweise ist $H = r^T V_0$ ein Claim, wenn das Anfangsportfolio V_0 nicht-negativ ist. Absicherbarkeit dieses Claims bedeutet also gerade, dass es für das Portfolio ein perfektes Hedging gibt, d.h.

die Wertentwicklung des Portfolios zum Ende der Laufzeit T der risikolosen Verzinsung des Anfangswertes des Portfolios entspricht.

Satz 12: In einem arbitragefreien Markt ist ein Claim H bereits dann absicherbar, wenn es eine *selbstfinanzierende* Handelsstrategie ϕ gibt mit $V_T(\phi) = H$.

Beweis: Sei ϕ selbstfinanzierend mit $V_T(\phi) = H$. Unter dem nach Satz 10 existierenden, zu P äquivalenten Martingalmaß P^* ist dann nach Satz 6 $(\tilde{V}_0(\phi), \dots, \tilde{V}_T(\phi))$ als Martingal-Transformation ebenfalls P^* -Martingal, so dass

$$\tilde{V}_n(\phi) = E^*(\tilde{V}_T(\phi) | \mathcal{F}_n), \quad n = 0, \dots, T$$

gilt. Wegen $\tilde{V}_T(\phi) = v^T H \geq 0$ ist also auch

$$V_n(\phi) = r^n \tilde{V}_n(\phi) = v^{T-n} E^*(H | \mathcal{F}_n) \geq 0, \quad n = 0, \dots, T,$$

also ϕ zulässig.

Satz 13: Ein arbitragefreier Markt ist vollständig genau dann, wenn es ein zu P äquivalentes, *eindeutig bestimmtes* Martingalmaß P^* gibt, unter dem $(\tilde{S}_0, \dots, \tilde{S}_T)$ ein Vektor-Martingal ist.

Beweis:

\Rightarrow : Sei H ein absicherbarer Claim. Dann gibt es eine selbstfinanzierende Strategie ϕ mit $H = V_T(\phi)$. Es folgt

$$v^T H = \tilde{V}_T(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^T \langle \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle.$$

Sind P_1 und P_2 zu P äquivalente Martingalmaße mit der geforderten Eigenschaft, gilt nach Satz 6 und der Erwartungswertkonstanz von Martingalen

$$E_i(\tilde{V}_T(\phi)) = E_i(V_0(\phi)) = V_0(\phi), \quad i = 1, 2$$

[wegen $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$], also

$$E_1(v^T H) = E_2(v^T H).$$

Da H beliebig war und voraussetzungsgemäß $\mathcal{F}_T = \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt, folgt $P_1 = P_2$.

\Leftarrow : Annahme: der Markt sei arbitragefrei [mit: P^* zu P äquivalentes Martingalmaß] und unvollständig; $H \geq 0$ sei ein nicht absicherbarer Claim. Ferner sei ähnlich wie in Satz 10

$$\mathcal{W} := \{\tilde{V}_T(\phi) \mid \phi \in \mathcal{H}\} = \{V_0 + \tilde{G}_T(\phi) \mid \phi \in \mathcal{H}, V_0 \in \mathbb{R}\} = \left\{ V_0 + \sum_{n=1}^T \langle \phi_n, \Delta \tilde{S}_n \rangle \mid \phi \in \mathcal{H}, V_0 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^\Omega$$

mit Konstanten $V_0 \in \mathbb{R}$ aufgrund der \mathcal{F}_0 -Messbarkeit von ϕ_0 . Für Zufallsvariablen X, Y auf (Ω, P) betrachten wir jetzt das (gewichtete) Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle := E^*(X \cdot Y) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)Y(\omega)P^*(\{\omega\}), \quad X, Y \in \mathbb{R}^\Omega.$$

Da H voraussetzungsgemäß nicht absicherbar ist, d.h. $v^T H \notin \mathcal{W}$ gilt, folgt die Existenz eines $X^\perp \neq \mathbf{0}$, $X^\perp \in \mathcal{W}^\perp$ (bezgl. des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Definiere P^{**} auf $\mathcal{F}_T = \mathfrak{P}(\Omega)$ durch

$$P^{**}(\{\omega\}) := \left(1 + \frac{X^\perp(\omega)}{2 \max_{\eta \in \Omega} |X^\perp(\eta)|} \right) \cdot P^*(\{\omega\}), \quad \omega \in \Omega.$$

Dann ist $P^{**}(\{\omega\}) \geq \frac{1}{2} P^*(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} P^{**}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} P^*(\{\omega\}) + \frac{\langle X^\perp, \mathbf{1} \rangle}{2 \max_{\eta \in \Omega} |X^\perp(\eta)|} = \sum_{\omega \in \Omega} P^*(\{\omega\}) = 1$$

wegen $\mathbf{1} \in \mathcal{W}$, also $\langle X^\perp, \mathbf{1} \rangle = E^*(X^\perp) = 0$, d.h. P^{**} ist ein zu P^* äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}_T = \mathfrak{P}(\Omega)$ mit $P^{**} \neq P^*$. Mit $\tilde{G}_T(\phi) = \sum_{n=1}^T \langle \phi_n, \Delta \tilde{S}_n \rangle \in \mathcal{W}$ folgt nun

$$E^{**} \left(\sum_{n=1}^T \langle \phi_n, \Delta \tilde{S}_n \rangle \right) = E^{**}(\tilde{G}_T(\phi)) = E^*(\tilde{G}_T(\phi)) + \frac{\langle X^\perp, \tilde{G}_T(\phi) \rangle}{2 \max_{\eta \in \Omega} |X^\perp(\eta)|} = E^*(\tilde{G}_T(\phi)) = 0$$

nach Satz 7. Also ist $(\tilde{S}_0, \dots, \tilde{S}_T)$ Vektor-Martingal auch unter P^{**} nach Satz 7. Damit existieren also mindestens zwei verschiedene zu P äquivalente Martingalmaße, womit der Satz bewiesen ist.

Der Beweis des Satzes 13 zeigt also insbesondere, dass im Falle der Unvollständigkeit auch alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$P^{**} = \left(1 + \frac{X^\perp(\omega)}{c} \right) P^*(\{\omega\}), \quad \omega \in \Omega \quad \text{mit } c > \max_{\omega \in \Omega} \{|X^\perp(\omega)|\}$$

zu P^* äquivalent sind mit der Eigenschaft, dass $(\tilde{S}_0, \dots, \tilde{S}_T)$ Vektor-Martingal auch unter P^{**} ist.

In einem arbitragefreien und vollständigen Markt kann also jeder Claim H zum Zeitpunkt 0 eindeutig bewertet werden durch

$$V_0(\phi) = E^*(\tilde{V}_T(\phi)) = E^*(v^T H),$$

wobei P^* das zu P äquivalente, eindeutig bestimmte Martingalmaß und ϕ eine geeignete selbstfinanzierende Handelsstrategie ist. Allgemeiner kann der Wert des Claims zu jedem Zeitpunkt n eindeutig bewertet werden durch

$$V_n(\phi) = v^{T-n} E^*(H | \mathcal{F}_n) \geq 0, \quad n = 0, \dots, T.$$

Hieraus folgt auch unmittelbar die bereits früher vorgestellte, allgemeine *Put-Call-Parity-Relation*, denn für den Call-Preis zur Zeit n erhalten wir unter der Annahme, dass eine einzelne Handelsperiode die Länge 1 besitzt und T ganzzahlig ist, aus der letzten Beziehung sofort

$$C_n = v^{T-n} E^*[C_T | \mathcal{F}_n] = v^{T-n} E^*[(S_T - X)^+ | \mathcal{F}_n], \quad n = 0, \dots, T$$

und daraus wegen $P_T = C_T - S_T + X$:

$$P_n = v^{T-n} E^*[P_T | \mathcal{F}_n] = C_n - r^n E^*[v^T S_T | \mathcal{F}_n] + v^{T-n} X = C_n - S_n + v^{T-n} X,$$

also

$$C_t - P_t = S_t - v^{T-t} X, \quad t = 0, \dots, T,$$

da ja die diskontierten Aktienpreise unter P^* ein Martingal bilden, also insbesondere $E^*[v^T S_T | \mathcal{F}_n] = v^n S_n$, $n = 0, \dots, T$ ist. Die Formel am Ende von Kapitel 2 ergibt sich, wenn man die Handelsperiode T in n Subperioden der Länge T/n unterteilt und $t \in \left\{0, \frac{T}{n}, \frac{2T}{n}, \dots, \frac{(n-1)T}{n}, T\right\}$ wählt.

Wir wollen die letzten Ergebnisse noch einmal an der allgemeinen Situation des anfänglich betrachteten Zwei-Stufen-Ein-Perioden-Modells veranschaulichen (zur Vermeidung von Verwechslungen werde hier der Anfangskurs der Aktie mit S_{0A} bezeichnet):

Bezeichnet wieder wie oben $h = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-}$ die Hedge Ratio, so folgt mit $\phi_0 = \begin{bmatrix} h(S_{0A} - vS_T^-) \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} -hvS_T^- \\ h \end{bmatrix}:$$

$$\begin{aligned}
V_0(\phi) &= \langle \phi_0, S_0 \rangle = \langle \phi_1, S_0 \rangle = h(S_{0A} - vS_T^-) > 0 \\
V_1(\phi) &= \langle \phi_1, S_1 \rangle = -rhvS_T^- + h[S_T^- + (S_T^+ - S_T^-)I_1] \\
&= h(S_T^+ - S_T^-)I_1 = (S_T^+ - X)I_1 = (S_1[1] - X)^+ = H,
\end{aligned}$$

d.h. der Call ist als Claim absicherbar durch einen anfänglichen Geldbestand von $C_0 = h(S_{0A} - vS_T^-)$ sowie Verkauf von gerade h Aktienanteilen, was die Bedeutung des anfänglichen Call-Preises C_0 noch einmal aus anderer Sicht erklärt. Für das konkrete Anfangsbeispiel von Eberlein ergibt sich in Übereinstimmung mit den Ausführungen in Kapitel 2 noch

$$\phi_0 = \begin{bmatrix} 9,52 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} -30,48 \\ 0,40 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} V_0(\phi) &= \langle \phi_0, S_0 \rangle = \langle \phi_1, S_0 \rangle = -30,48 + 40 = 9,52 \\ V_1(\phi) &= \langle \phi_1, S_1 \rangle = -32 + 0,4 \cdot (80 + 50I_1) = 20I_1 = H. \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall eines Claims H mit den Werten H_T^+ und H_T^- im Fall eines steigenden bzw. fallenden Aktienkurses in der Situation des obigen Beispiels lässt sich genau so behandeln: die Martingal-Eigenschaft der diskontierten Aktien-Kurse führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\phi_1[0]r + \phi_1[1]S_T^+ &= H^+ \\
\phi_1[0]r + \phi_1[1]S_T^- &= H^-
\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\phi_1[1](S_T^+ - S_T^-) = H^+ - H^- \text{ bzw. } \phi_1[1] = \frac{H^+ - H^-}{S_T^+ - S_T^-} \text{ und } \phi_1[0] = v \frac{H^- S_T^+ - H^+ S_T^-}{S_T^+ - S_T^-},$$

was die vorige Lösung als Spezialfall $H^+ = C_T^+ = S_T^+ - X$, $H^- = 0$ enthält.

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir noch die Vollständigkeit des Cox-Ross-Rubinstein-Modells zeigen.

Satz 14: Unter den Voraussetzungen von Satz 11 gilt: das Cox-Ross-Rubinstein-Modell ist markt-vollständig.

Beweis: Wir können aufgrund der speziellen Gestalt des in Satz 11 spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraumes wieder von der dortigen Darstellung für den Aktienkurs-Verlauf ausgehen, wobei jetzt allerdings die Unabhängigkeit und identische Verteilung der Zufallsvariablen I_1, \dots, I_n (zunächst) fallengelassen werden muss. Die Martingal-Eigenschaft impliziert nun analog zum Beweis von Satz 11 für $k = 0, \dots, n-1$

$$\begin{aligned}
E(Z_{k+1} | \mathcal{F}_k) = Z_k &\Leftrightarrow E\left(\left(1+k^+\right)^{I_{k+1}} \left(1+k^-\right)^{1-I_{k+1}} | \mathcal{F}_k\right) \\
&= E\left(\left(1+I_{k+1}k^+\right)\left(1+(1-I_{k+1})k^-\right) | \mathcal{F}_k\right) = r^T \\
&\Leftrightarrow E\left(1+k^- + (k^+ - k^-)I_{k+1} | \mathcal{F}_k\right) = r^T \\
&\Leftrightarrow P(I_{k+1} = 1 | \mathcal{F}_k) = E(I_{k+1} | \mathcal{F}_k) = \frac{r^T - 1 - k^-}{k^+ - k^-} = p^*.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir wegen der $\{0,1\}$ -Wertigkeit von I_{k+1} von den Gleichungen

$$(1+k^+)^{I_{k+1}} = 1 + I_{k+1}k^+ \quad \text{und} \quad (1+k^-)^{1-I_{k+1}} = 1 + (1-I_{k+1})k^-$$

Gebrauch gemacht.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Bedingung

$$P(I_{k+1} = 1 | \mathcal{F}_k) = E(I_{k+1} | \mathcal{F}_k) = \frac{r^T - 1 - k^-}{k^+ - k^-} = p^* \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1$$

äquivalent ist zur Unabhängigkeit der Zufallsvariablen I_1, \dots, I_n , mit $P(I_{k+1} = 1) = p^*$ für $k = 0, \dots, n-1$.

\Rightarrow : Da die σ -Algebra \mathcal{F}_k auch von den Zufallsvariablen I_1, \dots, I_k erzeugt wird, reicht es, die (elementaren) bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(I_{k+1} = 1 | I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k)$ für alle Werte $i_1, \dots, i_k \in \{0,1\}$ zu betrachten. Es ergibt sich für diese Werte:

$$\begin{aligned} P(I_{k+1} = 1 | I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k) &= \frac{P(I_{k+1} = 1, I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k)}{P(I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k)} = p^* \\ \Leftrightarrow P(I_{k+1} = 1, I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k) &= p^* \cdot P(I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} P(I_{k+1} = 0 | I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k) &= \frac{P(I_{k+1} = 0, I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k)}{P(I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k)} = 1 - p^* \\ \Leftrightarrow P(I_{k+1} = 0, I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k) &= (1 - p^*) \cdot P(I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k), \end{aligned}$$

also die stochastische Unabhängigkeit von I_{k+1} und I_1, \dots, I_k bzw.

$$P^{(I_1, \dots, I_{k+1})} = P^{(I_1, \dots, I_k)} \otimes B(1, p^*).$$

Induktiv erhält man hieraus

$$P^{(I_1, \dots, I_n)} = P^{(I_1, \dots, I_{n-1})} \otimes B(1, p^*) = P^{(I_1, \dots, I_{n-2})} \otimes B(1, p^*) \otimes B(1, p^*) = \dots = \bigotimes_{k=1}^n B(1, p^*),$$

also die (vollständige) stochastische Unabhängigkeit von I_1, \dots, I_n , mit $P(I_{k+1} = 1) = p^*$ für $k = 0, \dots, n-1$.

\Leftarrow : Aus der Unabhängigkeit von I_1, \dots, I_n folgt sofort

$$\begin{aligned}
P(I_{k+1} = 1 | I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k) &= \frac{P(I_{k+1} = 1, I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k)}{P(I_1 = i_1, \dots, I_k = i_k)} \\
&= \frac{P(I_{k+1} = 1)P(I_1 = i_1) \cdots P(I_k = i_k)}{P(I_1 = i_1) \cdots P(I_k = i_k)} = P(I_{k+1} = 1) = p^*,
\end{aligned}$$

unabhängig von der Wahl der $i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}$, also auch

$$P(I_{k+1} = 1 | \mathcal{F}_k) = p^* \text{ für } k = 0, \dots, n-1.$$

Insgesamt ergibt sich, dass das äquivalente Martingalmaß eindeutig bestimmt und im Rahmen des vorgegebenen Modells gegeben ist durch

$$P^* = \bigotimes_{k=1}^n B(1, p^*).$$

Das anfangs vorgeschlagene Vorgehen zur Bewertung von Call-Optionen im Cox-Ross-Rubinstein-Modell ist damit also im nachhinein endgültig abgesichert. Insbesondere erklärt sich jetzt auch das bereits früher angesprochene rekursive Verfahren von Optionspreisen im Cox-Ross-Rubinstein-Modell, da z.B. für die Call-Optionsbewertung nach obigem gilt:

$$\begin{aligned}
C_n &= v^{T-n} E^* [C_T | \mathcal{F}_n] = v^{T-n} E^* [(S_T - X)^+ | \mathcal{F}_n] = v^{T-n} E^* [(S_n \cdot Y_{n,T} - X)^+ | \mathcal{F}_n] \\
&= v^{T-n} E^* \left[(s \cdot Y_{n,T} - X)^+ | \mathcal{F}_n \right] \Big|_{s=S_n}, \quad n = 0, \dots, T
\end{aligned}$$

mit $Y_{n,T} = \prod_{i=n+1}^T (1+k^+)^{I_i} (1+k^-)^{1-I_i}$, was stochastisch unabhängig von S_n ist. Dies ist formal derselbe Ausdruck wie für ein $T-n$ -Perioden-Modell mit dem Anfangskurs S_n statt S_0 , d.h. die Entwicklung der Bewertungen von Derivaten "rechts" von einem Knoten des Baums zu einem beliebigen positiven Zeitpunkt erfolgt prinzipiell genau so wie zum Zeitpunkt Null. Insbesondere folgt hieraus, dass wie im Ein-Perioden-Modell die Optionspreise an den jeweiligen Knoten aus dem sich "rechts" anschließenden Ein-Perioden-Teilbaum berechnet werden können, was somit auch das rekursive Verfahren nachträglich vollständig rechtfertigt.

13. Unvollständige Märkte

In diesem Abschnitt wollen wir eine geringfügige Modifikation des Cox-Ross-Rubinstein-Modells vorstellen, die unvollständig ist und damit die Problematik der Preisfindung von Optionen noch einmal aus anderer Sicht beleuchtet. In der Notation folgen wir dabei im wesentlichen Kapitel 6.

Das klassische Cox-Ross-Rubinstein-Modell ist gekennzeichnet durch die Tatsache, dass entweder genau eine Aufwärts- oder genau eine Abwärtsbewegung des Aktienkurses zu jedem Handelszeitpunkt mit festen relativen Änderungsraten möglich ist. Durch die hieraus resultierende multiplikative Struktur des Modells konnte relativ einfach die Martingal-Eigenschaft des diskontierten Preis-

prozesses sowie die Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes hergeleitet werden; vgl. Satz 11. In unserem modifizierten Modell wollen wir nun die multiplikative Struktur beibehalten; allerdings erlauben wir mehr Möglichkeiten für die Kursbewegung zu jedem Handelszeitpunkt, wodurch zwar die Martingal-Eigenschaft des diskontierten Preisprozesses erhalten bleibt, nicht jedoch die Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes.

Dazu betrachten wir stochastisch unabhängige, je $B(1, p_I)$ bzw. $B(1, p_J)$ -verteilte Zufallsvariablen I_1, \dots, I_n und J_1, \dots, J_n mit $0 < p_I, p_J < 1$ und $N_k := \sum_{i=1}^k I_i$, $M_k := \sum_{i=1}^k J_i$. Für die Grundmenge wählen wir dabei analog zu Satz 11 $\Omega = \{\{0,1\} \times \{0,1\}\}^n$ und als I_k bzw. J_k wieder die entsprechenden Projektionen. Der Aktienkursverlauf sei in Analogie modelliert durch

$$S_{kT} = S_0 (1 + k^+)^{N_k} (1 + k^-)^{M_k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Der Unterschied zum klassischen Modell besteht also darin, dass dort die mit der Anzahl N_k der Aufwärtsbewegungen bis zur Zeit k korrelierte Größe $k - N_k$ der Abwärtsbewegungen durch die von N_k unabhängige Größe M_k ersetzt wird.

Bezeichnen wir wieder wie in Satz 11 mit $Z_k := v^{kT} S_{kT}$, $k = 0, \dots, n$ die diskontierten Aktienkurse und mit $\mathcal{F}_k := (I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k)$, $k = 0, \dots, n$ in Analogie die (natürliche) Filtration, so erhalten wir folgendes Resultat:

Satz 15: In dem modifizierten Cox-Ross-Rubinstein-Modell ist die Folge $\{Z_k\}_{k=0, \dots, n}$ der diskontierten Aktienkurse genau dann ein Martingal bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0, \dots, n}$, wenn gilt

$$(1 + k^+ p_I)(1 + k^- p_J) = r^T.$$

Beweis: Wie im Beweis zu Satz 14 ergibt sich für $k = 0, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} E(Z_{k+1} | \mathcal{F}_k) &= E(Z_{k+1} | I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k) \\ &= v^T E \left[v^{kT} S_{kT} (1 + k^+)^{I_{k+1}} (1 + k^-)^{J_{k+1}} \middle| I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k \right] \\ &= v^T v^{kT} S_{kT} E \left[(1 + k^+)^{I_{k+1}} (1 + k^-)^{J_{k+1}} \right] \\ &= v^T v^{kT} S_{kT} \left[(1 + k^+ p_I)(1 + k^- p_J) \right] = v^{kT} S_{kT} = Z_k \end{aligned}$$

genau dann, wenn

$$(1 + k^+ p_I)(1 + k^- p_J) = r^T$$

gilt. Man beachte dabei, dass hier wegen der $\{0,1\}$ -Wertigkeit und der Unabhängigkeit der I_k und J_k wieder die Vereinfachung

$$E\left[\left(1+k^+\right)^{I_{k+1}}\left(1+k^-\right)^{J_{k+1}}\right]=E\left[\left(1+k^+I_{k+1}\right)\left(1+k^-J_{k+1}\right)\right]=\left(1+k^+p_I\right)\left(1+k^-p_J\right)$$

möglich ist.

Offensichtlich ist das modifizierte Cox-Ross-Rubinstein-Modell damit nicht vollständig, da die Lösungen p_I^* und p_J^* der Gleichung $\left(1+k^+p_I\right)\left(1+k^-p_J\right)=r^T$ verschiedene äquivalente Martingalmaße P^* zulassen, wobei beispielsweise noch die Darstellung

$$p_J^*=\frac{i_T-k^+p_I^*}{k^-\left(1+k^+p_I^*\right)} \quad \text{mit} \quad \frac{i_T}{k^+}<p_I^*<\min\left\{1,\frac{i_T-k^-}{k^+\left(1+k^-\right)}\right\}$$

gilt. Als einzige Einschränkung ergibt sich hier wieder wie zuvor die Bedingung $i_T < k^+$, d.h. am Aktienmarkt kann je nach Kursverlauf eine höhere Rendite erzielt werden als bei der risikolosen Geldanlage.

Wir wollen dieses Ergebnis jetzt auf das Anfangsbeispiel von Eberlein anwenden, wobei wir die frühere Notation zugrundelegen. Es ist dann

$$\begin{aligned} S_0[0] &= 1 & S_1[0] &= r \\ S_0[1] &= 100 & S_1[1] &= 100 + 30I_1 - 20J_1 - 6I_1J_1 \\ S_0[2] &= C_0 & S_1[2] &= (S_1[1] - 110)^+ = 20I_1(1 - J_1). \end{aligned}$$

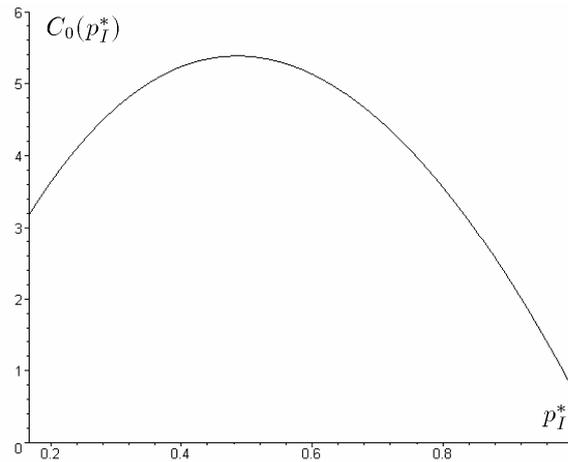
Mit

$$p_J^* = \frac{30p_I^* - 5}{6p_I^* + 20}, \quad \frac{1}{6} < p_I^* < 1$$

erhält man hier die äquivalenten Wahrscheinlichkeiten, unter denen die diskontierten Aktienkurse $(S_0[1], \nu S_1[1])$ ein Martingal bilden. Der gesamte Preisprozess $(S_0, \nu S_1)$ bildet somit ein Vektor-Martingal, wenn

$$\begin{aligned} C_0 &= C_0(p_I^*) = \nu E^*(S_1[1] - 110)^+ = \nu E^*(20I_1(1 - J_1))^+ \\ &= 20\nu p_I^*(1 - p_J^*) = \frac{250 - 240p_I^*}{10 + 3p_I^*} p_I^* \nu = \frac{5000 - 4800p_I^*}{210 + 63p_I^*} p_I^* \quad \text{mit} \quad \frac{1}{6} < p_I^* < 1 \end{aligned}$$

ist. Die folgende Graphik zeigt den Verlauf von $C_0(p_I^*)$ im angegebenen Definitionsbereich:



Das Maximum von $C_0(p_I^*)$ wird dabei für $p_I^* = -\frac{10}{3} + \frac{5}{6}\sqrt{21} = 0.4854$ erreicht (mit Wert $\frac{37000}{63} - \frac{8000}{63}\sqrt{21} = 5.3872$), das Infimum für $p_I^* \downarrow 1$ (mit Grenzwert $\frac{10}{13}v = \frac{200}{273} = 0.7326$).

Allerdings erhält man auf diese Weise nicht *alle* äquivalenten Martingalmaße, da man hierfür analog zum Beweis von Satz 14 wieder sämtliche (zulässigen) gemeinsamen Verteilungen von $(I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_n)$ betrachten müsste. Beispielsweise ergibt sich hier asymptotisch das "klassische" Cox-Ross-Rubinstein-Modell für die korrelierten Zufallsvariablen $J_k = 1 - I_k$, $k = 1, \dots, n$. Man kann aber z.B. die Menge der äquivalenten Martingalmaße im Ein-Perioden-Modell direkt aus dem (Un-)Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 130p_1^* + 104p_2^* + 100p_3^* + 80p_4^* &= E^*(S_T) = rS_0 = 105 \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* &= 1 \\ p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^* &> 0 \end{aligned}$$

berechnen und mit der so gefundenen Lösung dann den Call-Preis über die Beziehung

$$C_0 = 20p_1^*v$$

festsetzen. Wählt man hier etwa p_1^* und p_2^* als freie Parameter, so erhält man aus dem obigen System das (Un-)gleichungssystem

$$\begin{aligned} p_3^* &= \frac{5}{4} - \frac{5}{2}p_1^* - \frac{6}{5}p_2^* \\ p_4^* &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}p_1^* + \frac{1}{5}p_2^* \end{aligned}$$

mit den beiden Nebenbedingungen

$$25p_1^* + 12p_2^* < \frac{25}{2} \quad (I) \quad \text{und} \quad p_1^*, p_2^* > 0.$$

$$15p_1^* + 2p_2^* > \frac{5}{2} \quad (II)$$

In der nachfolgenden Grafik entspricht dies dem grau markierten offenen Dreieck oberhalb der durch (II) und unterhalb der durch (I) beschriebenen Halbräume im ersten Quadranten. Zusätzlich eingezeichnet ist hier als Stück eines Hyperbelbogens die Menge der Paare (p_1^*, p_2^*) , die dem äquivalenten Martingalmaß des Modells aus Satz 15 entsprechen. Die zugehörige Gleichung lautet

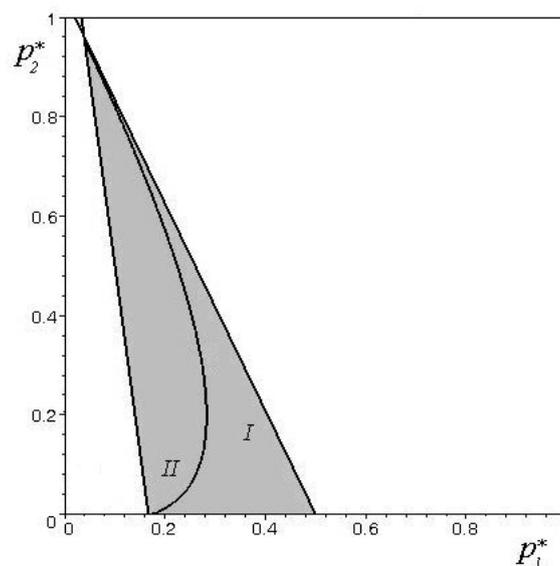
$$30p_1^{*2} + 54p_1^*p_2^* + 24p_2^{*2} - 5p_1^* - 25p_2^* = 0.$$

Man erhält sie aus dem parametrischen Ansatz

$$p_1^* = t \frac{25 - 24t}{6t + 20} \quad \text{für} \quad \frac{1}{6} < t < 1,$$

$$p_2^* = t \frac{30t - 5}{6t + 20}$$

wenn man auf der vorigen Seite $p_i^* = t$ und $p_j^* = \frac{30t - 5}{6t + 20}$ substituiert und $p_1^* = p_i^*(1 - p_j^*)$ und $p_2^* = p_i^*p_j^*$ beachtet.



Die Menge der Arbitrage-freien Call-Preise ist damit in dem allgemeineren Modell gegeben durch

$$0,7326 = \frac{10}{13}v < C_0 < 10v = 9,5238.$$

Die untere Preisgrenze ist also identisch mit derjenigen aus dem vorher betrachteten, restriktiveren modifizierten Cox-Ross-Rubinstein-Modell, die obere mit derjenigen aus dem Anfangsbeispiel (einfaches Cox-Ross-Rubinstein-Modell).

Allerdings gibt es in einem Markt, der lediglich aus Aktien (mit einer Kursentwicklung mit einperiodischer Vierfachverzweigung wie im obigen allgemeinen Modell) und Call-Optionen zum Ausübungspreis $X = 110$ besteht, außer der trivialen Handelsstrategie $\phi = \mathbf{0}$ keine weitere Arbitragefreie Handelsstrategie. Dies kann man wie folgt sehen: bezeichnen wir wieder wie früher

$$\phi_1[0] =: x, \phi_1[1] =: y, \phi_1[2] =: z,$$

so ergibt sich aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} \langle \phi_1, S_0 \rangle = x + 100y + C_0z = 0 &= \langle \phi_0, S_0 \rangle && \text{(Anfangswert Null)} \\ \langle \phi_1, S_1 \rangle = rx + S_T y + C_T z \geq 0 &&& \text{(Endwert nicht-negativ)} \end{aligned}$$

durch Subtraktion des r -fachen der ersten von der zweiten Zeile sowie Einsetzen der vier möglichen Werte $\{80, 100, 104, 130\}$ für S_T und der zugehörigen Werte $C_T = (S_T - 110)^+$ das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} -25y - rC_0z &\geq 0 && (I) \\ -5y - rC_0z &\geq 0 && (II) \\ -y - rC_0z &\geq 0 && (III) \\ 25y + (20 - rC_0)z &\geq 0 && (IV) \end{aligned}$$

und daraus durch weitere Umformungen (Addition von (I) und (IV), Addition des 25-fachen von (III) zu (IV))

$$\begin{aligned} (20 - 2rC_0)z &\geq 0 \\ (20 - 26rC_0)z &\geq 0. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{10}{13}v < C_0 < 10v$ ergibt sich nun die eindeutige Lösung $z = 0$, also auch $y = x = 0$, was zu zeigen war.

Entsprechend lässt sich z.B. eine Call-Option mit Ausübungspreis $X = 90$ in diesem Markt nicht absichern. Eine Lösung der zugehörigen Gleichung

$$V_1(\phi) = \langle \phi_1, S_1 \rangle = rx + S_T y + C_T(110)z = H = C_T(90)$$

bzw. nach Einsetzen der vier verschiedenen Werte für S_T eine Lösung der Gleichungen

$$\begin{aligned} rx + 80y &= 0 \\ rx + 100y &= 10 \\ rx + 104y &= 14 \\ rx + 130y + 20z &= 40 \end{aligned}$$

existiert nicht. Hierbei bezeichne $C_T(X)$ den Wert einer Call-Option am Verfalltag zum Ausübungspreis X . Allerdings lässt sich der Markt durch Hinzunahme von bereits *einer* weiteren Call-Option mit einem geeigneten anderen Ausübungspreis vervollständigen, etwa mit $X = 100$. Bei "richtiger" Wahl der Preise $C_{01} = av \geq 0$ und $C_{02} = bv \geq 0$ existiert nämlich ein eindeutig bestimmtes Martingalmaß P^* im Sinne von Satz 10. Zur Abkürzung nummerieren wir die Elemente der Produktmenge $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\}$ auf die folgende Art und Weise:

$$\begin{aligned} \omega_1 &:= (1,0) & \omega_2 &:= (1,1) & \omega_3 &:= (0,0) & \omega_4 &:= (0,1) \quad \text{so daß} \\ S_T(\omega_1) &= 130 & S_T(\omega_2) &= 104 & S_T(\omega_3) &= 100 & S_T(\omega_4) &= 80. \end{aligned}$$

Ferner setzen wir

$$p_i^* := P^*(\{\omega_i\}), \quad i = 1, \dots, 4.$$

Das Gleichungssystem zur Bestimmung von P^* lautet nun:

$$\begin{aligned} p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* &= 1 \\ 80p_1^* + 100p_2^* + 104p_3^* + 130p_4^* &= 105 \\ 20p_1^* &= a \\ 30p_1^* + 4p_2^* &= b \end{aligned}$$

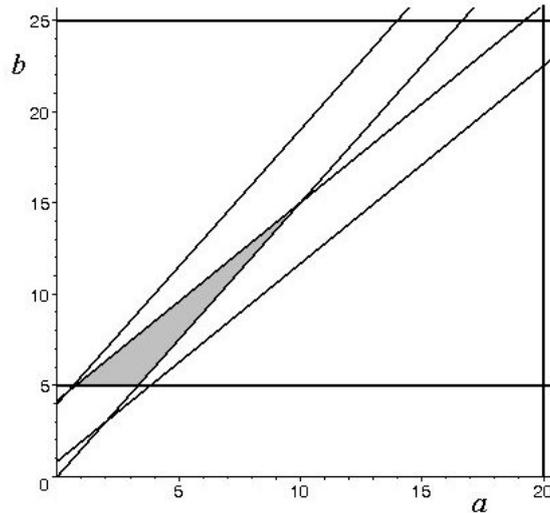
mit der eindeutigen "Lösung"

$$\begin{aligned} p_1^* &= \frac{a}{20} \\ p_2^* &= -\frac{3a}{8} + \frac{b}{4} \\ p_3^* &= \frac{13a}{40} - \frac{3b}{10} + \frac{5}{4} \\ p_4^* &= \frac{b}{20} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Hier ist nur noch sicherzustellen, dass alle "Lösungswerte" für die p_i^* im Intervall $(0,1)$ liegen. Dies führt auf die folgenden Ungleichungen:

$$\frac{3a}{2} < b < \frac{3a}{2} + 4, \quad \frac{13}{12}a + \frac{5}{6} < b < \frac{13}{12}a + \frac{25}{6}, \quad 0 < a < 20, \quad 5 < b < 25.$$

In der folgenden Grafik ist der entsprechende Bereich als graues Dreieck (ohne Rand) dargestellt:



Offensichtlich liegt das Paar $(a, b) = (5, 8)$ in dieser Lösungsmenge. Für die Call-Preise $C_0(110) = 5v = 4,7619$ und $C_0(100) = 8v = 7,6190$ erhält man damit als "das" äquivalente Martingalmaß

$$p_1^* = \frac{10}{40}, \quad p_2^* = \frac{5}{40}, \quad p_3^* = \frac{19}{40}, \quad p_4^* = \frac{6}{40}.$$

Dieser Markt ist also vollständig. Die fragliche Call-Option mit Ausübungspreis $X = 90$ lässt sich hier mit der folgenden Handelsstrategie ϕ absichern (Komponenten: [0] = Geld, [1] = Aktie, [2] = Call-Option zum Ausübungspreis 110, [3] = Call-Option zum Ausübungspreis 100):

$$\begin{array}{ll} \phi_0[0] = 50 - 36v & \phi_1[0] = -40v \\ \phi_0[1] = 0 & \phi_1[1] = 1/2 \\ \phi_0[2] = 0 & \phi_1[2] = 0 \\ \phi_0[3] = 0 & \phi_1[3] = 1/2 \end{array}$$

mit

$$\begin{aligned} V_0 &= \langle \phi_0, S_0 \rangle = 50 - 36v = -40v + 100/2 + 8v/2 = \langle \phi_1, S_0 \rangle \\ V_1 &= \langle \phi_1, S_1 \rangle = -40 + S_T/2 + C_T(100)/2 = C_T(90) \end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned} -40 + S_T(\omega_1)/2 + C_T(100; \omega_1)/2 &= -40 + 65 + 15 = 40 = C_T(90; \omega_1) \\ -40 + S_T(\omega_2)/2 + C_T(100; \omega_2)/2 &= -40 + 52 + 2 = 14 = C_T(90; \omega_2) \\ -40 + S_T(\omega_3)/2 + C_T(100; \omega_3)/2 &= -40 + 50 + 0 = 10 = C_T(90; \omega_3) \\ -40 + S_T(\omega_4)/2 + C_T(100; \omega_4)/2 &= -40 + 40 + 0 = 0 = C_T(90; \omega_4). \end{aligned}$$

Der Wert der fraglichen Call-Option zur Zeit Null beträgt also nach dieser Rechnung $C_0(90) = 50 - 36v = \frac{33}{2}v = 15,7142$. Dasselbe Ergebnis erhält man auch direkt über das äquivalente Martingalmaß vermöge

$$C_0(90) = vE^*(C_T(90)) = vE^*[(S_T - 90)^+] = v\left(\frac{10}{40} \cdot 40 + \frac{5}{40} \cdot 14 + \frac{19}{40} \cdot 10\right) = \frac{33}{2}v.$$

Das Problem der Eindeutigkeit von Optionspreisen ist damit aber selbst in vollständigen Märkten nicht abschließend gelöst. Das letzte Beispiel zeigt, dass das äquivalente Martingalmaß zwar eindeutig bestimmt ist, wenn die Call-Preise $C_0(110) = av$ und $C_0(100) = bv$ festliegen; jedoch lassen sich in der Regel verschiedene solcher Paare (a, b) angeben. Jedes zulässige Paar (a, b) führt dabei im Allgemeinen zu einem anderen – dann allerdings eindeutig bestimmten – äquivalenten Martingalmaß. Beispielsweise erhält man für die ebenfalls mögliche Wahl $(a, b) = (6, 10)$ das äquivalente Martingalmaß

$$p_1^* = \frac{6}{20}, \quad p_2^* = \frac{5}{20}, \quad p_3^* = \frac{4}{20}, \quad p_4^* = \frac{5}{20}$$

mit den zugehörigen Optionspreisen

$$C_0(110) = 6v, \quad C_0(100) = 10v, \quad C_0(90) = \frac{35}{2}v,$$

die von den ersteren offenkundig verschieden sind.

Wir wollen uns abschließend noch mit einer anderen Erweiterung des Cox-Ross-Rubinstein-Modells beschäftigen, die mit dem obigen Modellierungsansatz verwandt ist, und zwar der (unabhängigen) Kopplung von solchen Modellen. Dazu betrachten wir wieder wie oben stochastisch unabhängige, je $B(1, p_I)$ bzw. $B(1, p_J)$ -verteilte Zufallsvariablen I_1, \dots, I_n und J_1, \dots, J_n mit

$0 < p_I, p_J < 1$ und $N_k := \sum_{i=1}^k I_i$, $M_k := \sum_{i=1}^k J_i$. Für die Grundmenge wählen wir wie zuvor

$\Omega = \{\{0, 1\} \times \{0, 1\}\}^n$ und als I_k bzw. J_k die entsprechenden Projektionen. Im Unterschied zu vorher modellieren wir jetzt aber *zwei* Aktienkursverläufe durch

$$S_{kT}[1] = (1 + k[1]^+)^{N_k} (1 + k[1]^-)^{k - N_k} S_0[1], \quad S_{kT}[2] = (1 + k[2]^+)^{M_k} (1 + k[2]^-)^{k - M_k} S_0[2], \quad k = 0, \dots, n,$$

wobei die Indizes $[i]$ für $i = 1, 2$ das entsprechende CRR-Teilmodell bezeichnen und $S_0[i]$ die Anfangskurse, $k[i]^\pm$ die entsprechenden (ggf. unterschiedlichen) Auf-/Abwärtsvolatilitäten bezeichnen. Für beide Teilmodelle seien die Bedingungen $i_T < k[i]^+$ erfüllt.

Bezeichnen wir wieder wie in Satz 11 mit $Z_k := v^{kT} S_{kT}$, $k = 0, \dots, n$ die diskontierten Aktienkurse (Vektoren!) und mit $\mathcal{F}_k := (I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k)$, $k = 0, \dots, n$ in Analogie die (natürliche) Filtration, so erhalten wir folgendes Resultat:

Satz 16: In dem unabhängig gekoppelten Cox-Ross-Rubinstein-Modell ist die Folge $\{Z_k\}_{k=0, \dots, n}$ der diskontierten Aktienkurse genau dann ein Vektor-Martingal bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0, \dots, n}$, wenn gilt

$$p_I = \frac{i_T - k[1]^-}{k[1]^+ - k[1]^-} =: p_I^* \quad \text{und} \quad p_J = \frac{i_T - k[2]^-}{k[2]^+ - k[2]^-} =: p_J^*.$$

Beweis: Wie im Beweis zu Satz 11 ergibt sich für $k = 0, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} E(Z_{k+1}[1] | \mathcal{F}_k) &= E(Z_{k+1}[1] | Z_0, \dots, Z_k) = E(Z_{k+1}[1] | I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k) \\ &= v^T E \left[v^{kT} S_{kT}[1] (1 + k[1]^+)^{I_{k+1}} (1 + k[1]^-)^{1 - I_{k+1}} \middle| I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k \right] \\ &= v^T v^{kT} S_{kT}[1] E \left[(1 + k[1]^+)^{I_{k+1}} (1 + k[1]^-)^{1 - I_{k+1}} \right] \\ &= v^T v^{kT} S_{kT}[1] \left[p(1 + k[1]^+) + (1 - p)(1 + k[1]^-) \right] = v^{kT} S_{kT}[1] = Z_k[1] \end{aligned}$$

genau dann, wenn

$$p(1 + k[1]^+) + (1 - p)(1 + k[1]^-) = r^T \quad \text{bzw.} \quad p_I = \frac{i_T - k[1]^-}{k[1]^+ - k[1]^-} = p_I^*$$

gilt. Für $E(Z_{k+1}[2] | \mathcal{F}_k)$ rechnet man völlig analog.

Auch das gekoppelte Cox-Ross-Rubinstein-Modell ist nicht vollständig, da die obigen Lösungen p_I^* und p_J^* zwar eindeutig sind und damit im Fall der vollständigen Unabhängigkeit für den Vektor-Prozess der Aktienkurse stets das äquivalente Martingalmaß $P^* = P_I^* \otimes P_J^*$ ermöglichen, wobei P_I^* und P_J^* die jeweiligen äquivalenten Martingalmaße der einzelnen CRR-Modelle sind, aber i. Allg. trotzdem verschiedene äquivalente Martingalmaße P^* zulassen. Dies sieht man schon im Einperioden-Fall, wenn man setzt

$$p_{ij} := P(I_1 = i, J_1 = j) \quad \text{mit} \quad i, j \in \{0, 1\}.$$

Die zentrale Bedingung in Satz 16 bleibt nämlich gültig, solange

$$\begin{aligned} p_I^* &= p_{10} + p_{11} \\ p_J^* &= p_{01} + p_{11} \end{aligned} \quad (*)$$

gilt. Wählen wir der Einfachheit halber etwa zwei gleichartige CRR-Modelle wie im Anfangsbeispiel, so ist $p_I^* = p_J^* = \frac{1}{2}$, und wir können $\alpha = p_{00}$ als freien Parameter wählen, so dass

$$p_{00} = p_{11} = \alpha, \quad p_{01} = p_{10} = \frac{1}{2} - \alpha \quad \text{mit } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \quad (**)$$

alle gemeinsamen Verteilungen von I_1 und J_1 beschreibt, für die $p_I^* = p_J^* = \frac{1}{2}$ ist. Damit bleibt (Z_0, Z_1) ein Vektor-Martingal auch unter diesen Verteilungen, wie man dem Beweis von Satz 16 sofort entnehmen kann. Allerdings sind die Aktienkursentwicklungen hier i. Allg. voneinander abhängig; so gilt in dem hier betrachteten Beispiel etwa

$$\text{Cov}(S_T[1], S_T[2]) = E(S_T[1] \cdot S_T[2]) - E(S_T[1])E(S_T[2]) = 2500\alpha - 625 \quad \text{bzw.}$$

$$\rho(S_T[1], S_T[2]) = \frac{\text{Cov}(S_T[1], S_T[2])}{\sqrt{\text{Var}(S_T[1])\text{Var}(S_T[2])}} = \frac{2500\alpha - 625}{625} = 4\alpha - 1$$

für die Korrelation $\rho(S_T[1], S_T[2])$, die offenbar alle Werte im offenen Intervall $(-1, 1)$ annehmen kann.

Satz 16 bleibt damit – wie der obige Beweis zeigt – offensichtlich auch in dem allgemeineren Fall gültig, wo zwar die Paare (I_k, J_k) für $k = 1, \dots, n$ stochastisch unabhängig sind, aber die Zufallsvariablen I_k und J_k *untereinander* abhängig sein können, jedenfalls solange die obige Bedingung (*) erfüllt bleibt. Dies führt allerdings zu keinerlei Komplikationen, solange in dem gekoppelten Markt nur Derivate betrachtet werden, die sich auf genau einen Aktientyp beziehen. Sowohl deren Preisfindung als auch ihre positiven Eigenschaften in Bezug auf Hedging bleiben vollständig und unverändert erhalten. Probleme ergeben sich nur dann, wenn Kombi-Optionen betrachtet werden, die sich auf mehrere Aktien beziehen. So könnte man etwa in dem zuletzt betrachteten Beispiel eine Call-Option C° betrachten, die nur dann zur Ausübung gelangt, wenn *beide* Aktienkurse den Ausübungspreis X überschreiten, verbunden mit dem Recht, in diesem Fall auch jeweils eine von *beiden* Aktientypen günstiger erwerben zu können. Der Wert dieser Option zum Verfalltag beträgt hier bei $X = 110$ gerade $C_T^\circ = 40I_1J_1$, und der Arbitrage-freie Preis ergäbe sich mit jedem der durch (**) beschriebenen äquivalenten Martingalmaße zu

$$C_0^\circ = v^T E^*(C_T^\circ) = 40v^T E^*(I_1J_1) = 40v^T p_{11} = 40v^T \alpha$$

mit einem Preisintervall von $(0, 20v^T) = (0, 19.05)$. Betrachtet man dagegen die Kombi-Option C^\oplus , die zur Ausübung kommt, wenn *mindestens einer* der Aktienkurse den Ausübungspreis X überschreitet, mit dem Recht, von jedem X überschreitenden Aktientyp eine Aktie erwerben zu können, so ergibt sich hier $C_T^\oplus = 20I_1(1 - J_1) + 20J_1(1 - I_1) + 40I_1J_1 = 20I_1 + 20J_1$, also die gewöhnliche Kombination zweier gewöhnlicher Call-Optionen (jede einzelne bezogen auf "ihren" Aktientyp), mit einem eindeutigen Arbitrage-freien Preis von

$$C_0^\oplus = v^T E^*(C_T^\oplus) = 20v^T E^*(I_1 + J_1) = 20v^T = 19.05.$$

Die folgende Rechnung zeigt, dass mit dem ersten Optionstyp in der Regel kein Hedging möglich ist, wohl aber mit dem zweiten. Dazu nehmen wir an, dass ein Anfangsbestand von je n Aktien beiden Typs vorhanden ist, mit $n > 0$:

$t = 0$		$t = T$			
Aktion	Wert	$S_T = (80,80)$	$S_T = (80,130)$	$S_T = (130,80)$	$S_T = (130,130)$
n Aktien Typ [1]	$+100n$	$+80n$	$+80n$	$+130n$	$+130n$
n Aktien Typ [2]	$+100n$	$+80n$	$+130n$	$+80n$	$+130n$
Verkauf m mal C^\ominus	$-m C_0^\ominus$	0	0	0	$-40m$
Geld	$+m C_0^\ominus$	$+40\alpha m$	$+40\alpha m$	$+40\alpha m$	$+40\alpha m$
Saldo	$+200n$	$160n + 40\alpha m$	$210n + 40\alpha m$	$210n + 40\alpha m$	$260n - 40(1 - \alpha)m$

Für ein perfektes Hedging müssten hier die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
 160n + 40\alpha m &\geq 210n \\
 210n + 40\alpha m &\geq 210n \\
 260n - 40(1 - \alpha)m &\geq 210n
 \end{aligned}
 \quad \text{bzw.} \quad
 \frac{5}{4\alpha}n \leq m \leq \frac{5}{4(1 - \alpha)}n,$$

was nur im – nicht zugelassenen – Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ eine Lösung ergäbe. Für den anderen Optionstyp ergibt sich dagegen:

$t = 0$		$t = T$			
Aktion	Wert	$S_T = (80,80)$	$S_T = (80,130)$	$S_T = (130,80)$	$S_T = (130,130)$
n Aktien Typ [1]	$+100n$	$+80n$	$+80n$	$+130n$	$+130n$
n Aktien Typ [2]	$+100n$	$+80n$	$+130n$	$+80n$	$+130n$
Verkauf m mal C^\oplus	$-m C_0^\oplus$	0	$-20m$	$-20m$	$-40m$
Geld	$+m C_0^\oplus$	$+20m$	$+20m$	$+20m$	$+20m$
Saldo	$+200n$	$160n + 20m$	$210n$	$210n$	$260n - 20m$

mit einem konstanten Saldo von $210n$ für $t = T$ bei der Wahl $m = \frac{5}{2}n$.

14. Das Black-Scholes-Modell

In diesem Teil vertiefen wir der Vollständigkeit halber kurz den schon in Abschnitt 8 betrachteten Grenzfall des Cox-Ross-Rubinstein-Modells, das so genannte *Black-Scholes-Modell für Aktienkurse*, d.h. den Stochastischen Prozess

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma W_t), \quad t \geq 0$$

mit Drift $\mu \in \mathbb{R}$, Volatilität $\sigma > 0$ und Anfangskurs $S_0 > 0$, wobei $\{W_t\}_{t \geq 0}$ einen Standard-Wiener-Prozess bezeichne (für die stochastischen Grundlagen vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Kapitel IV). Ferner bezeichne $\tilde{r} > 0$ die risikolose Zinsrate, d.h. es gelte

$$B_t = e^{\tilde{r}t} B_0, \quad t \geq 0$$

für die zeitliche Entwicklung eines Bankkontos mit Anfangsbestand $B_0 > 0$. (In der früheren Terminologie bedeutet das: $\tilde{r} = \ln r$.) Wir klären zunächst die Frage, wann der entsprechend diskontierte Aktienkursprozess

$$\tilde{S}_t = e^{-\tilde{r}t} S_t, \quad t \geq 0$$

ein Martingal bildet. Hierbei legen wir die natürliche Filtration $\{\mathcal{F}_t | t \geq 0\}$ zu Grunde, die durch

$$\mathcal{F}_t := \sigma(W_s | 0 \leq s \leq t)$$

gegeben ist.

Satz 17. Im Black-Scholes-Modell bildet der diskontierte Aktienkursprozess genau dann ein Martingal bezüglich der natürlichen Filtration, wenn

$$\mu = \tilde{r} - \frac{\sigma^2}{2}$$

gilt.

Beweis: Da der Prozess $\{S_t\}_{t \geq 0}$ und damit auch $\{\tilde{S}_t\}_{t \geq 0}$ ein Markov-Prozess ist, genügt es, die zur Martingal-Bedingung äquivalente Bedingung

$$E(\tilde{S}_t | \mathcal{F}_s) = E(\tilde{S}_t | \tilde{S}_s) = \tilde{S}_s \quad \text{fast sicher für alle } 0 < s < t$$

zu überprüfen bzw. äquivalent dazu

$$\begin{aligned}
& E\left[\exp((\mu - \tilde{r})t + \sigma W_t) \mid \exp((\mu - \tilde{r})s + \sigma W_s)\right] \\
&= E\left[\exp((\mu - \tilde{r})(s + (t - s)) + \sigma(W_s + (W_t - W_s))) \mid \exp((\mu - \tilde{r})s + \sigma W_s)\right] \\
&= \exp((\mu - \tilde{r})(t - s)) E\left[\exp((\mu - \tilde{r})s + \sigma W_s) \exp(\sigma(W_t - W_s)) \mid \underbrace{\exp((\mu - \tilde{r})s + \sigma W_s)}_{=\tilde{S}_s}\right] \\
&= \exp((\mu - \tilde{r})(t - s)) \tilde{S}_s E\left[\exp(\sigma(W_t - W_s))\right] = \exp((\mu - \tilde{r})(t - s)) \tilde{S}_s \exp\left(\frac{\sigma^2(t - s)}{2}\right) \\
&= \tilde{S}_s \text{ fast sicher,}
\end{aligned}$$

was genau dann gilt, wenn für alle $0 < s < t$

$$\exp((\mu - \tilde{r})(t - s)) \exp\left(\frac{\sigma^2(t - s)}{2}\right) = 1, \text{ also } \mu - \tilde{r} + \frac{\sigma^2}{2} = 0 \text{ ist,}$$

was gerade der Aussage des Satzes entspricht. Dabei wurde benutzt, dass der Zuwachs $W_t - W_s$ von W_s und damit auch von $\tilde{S}_s = \exp((\mu - \tilde{r})s + \sigma W_s)$ unabhängig und normalverteilt ist mit Erwartungswert Null und Varianz $t - s$.

Die nachfolgenden Überlegungen stellen sicher, dass ein beliebiges Black-Scholes-Modell (also mit beliebiger Drift $\mu \in \mathbb{R}$ und Volatilität $\sigma > 0$) allein durch einen Maßwechsel auf dem zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum stets in ein Black-Scholes-Modell transferiert werden kann, für das der diskontierte Aktienkursprozess ein Martingal ist.

Satz 18. Es sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine auf Ω definierte reellwertige Zufallsvariable. Ferner sei \tilde{Q} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Borel'schen σ -Algebra \mathcal{B} , welches dieselben Nullmengen wie die Verteilung von X , P^X , besitze (und damit zu P^X äquivalent ist). Dann gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf \mathcal{A} , so dass X unter Q die Verteilung $Q^X = \tilde{Q}$ besitzt.

Beweis: Nach dem Satz von Radon-Nikodym (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Satz 21) existiert eine Dichte $h > 0$ von \tilde{Q} bezüglich P^X , d.h. es gilt

$$\tilde{Q}(B) = \int_B h dP^X = \int_{X^{-1}(B)} h \circ X dP \text{ für jede Borel-Menge } B \in \mathcal{B},$$

wobei die zweite Gleichung aus dem Transformationssatz für Maße (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Satz 22) folgt. Definiert man nun das Maß Q vermöge

$$Q(A) := \int_A h \circ X dP \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A},$$

so ist die gewünschte Wahrscheinlichkeitsverteilung gefunden: es folgt nämlich nach obigem gerade

$$Q^X(B) = Q(X^{-1}(B)) = \int_{X^{-1}(B)} h \circ X dP = \int_B h dP^X = \tilde{Q}(B) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung 1: Ist unter den Voraussetzungen von Satz 18 die Zufallsvariable $Y := aX + b$ gegeben mit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, und besitzt X eine auf \mathbb{R} positive Dichte, so existiert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung Q auf \mathcal{A} , unter der X verteilt ist wie Y .

Beweis: Die Verteilungsfunktion von Y ist gegeben durch

$$F_Y(z) = P(Y \leq z) = P(aX + b \leq z) = P\left(X \leq \frac{z-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{z-b}{a}\right) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R},$$

also besitzt Y die auf \mathbb{R} ebenfalls positive Dichte

$$f_Y(z) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{z-b}{a}\right) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R},$$

d.h. P^X und P^Y besitzen dieselben Nullmengen, die identisch sind mit den Nullmengen des Lebesgue-Maßes.

Die obige Folgerung 1 kann insbesondere auf normalverteilte Zufallsvariablen angewendet werden und lautet dann spezieller:

Folgerung 2: Ist (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine auf Ω definierte reellwertige normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 > 0$, so existiert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung Q auf \mathcal{A} , unter der X normalverteilt ist mit Erwartungswert $\nu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\tau^2 > 0$ für jedes solche vorgegebene Paar $(\nu, \tau^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Beweis: Wenn wir die Zufallsvariable $Y := \frac{\tau}{\sigma}(X - \mu) + \nu$ definieren, so ist Y normalverteilt mit Erwartungswert

$$E(Y) = E\left(\frac{\tau}{\sigma}(X - \mu) + \nu\right) = \frac{\tau}{\sigma}E(X - \mu) + \nu = \nu$$

und Varianz

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}\left(\frac{\tau}{\sigma}(X - \mu) + \nu\right) = \frac{\tau^2}{\sigma^2} \text{Var}(X) = \frac{\tau^2}{\sigma^2} \sigma^2 = \tau^2.$$

Die Aussage folgt nun aus Folgerung 1.

Wir wollen jetzt den angekündigten Sachverhalt, dass ein beliebiges Black-Scholes-Modell allein durch einen Maßwechsel auf dem zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum in ein Black-Scholes-Modell transferiert werden kann, für das der diskontierte Aktienkursprozess ein Martingal ist, beweisen. Dazu gehen wir von der klassischen Paley-Wiener-Konstruktion des Wiener-Prozesses $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ auf einem Zeitintervall $[0, T]$ aus, die lediglich eine unabhängige Folge standard-normalverteilter Zufallsvariablen $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ benutzt (modifiziert nach BREIMAN [77], Proposition 12.24 oder ITÔ UND MCKEAN [78], S. 21, Problem 3):

$$W_t = \frac{Y_0}{\sqrt{T}}t + \frac{\sqrt{2T}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)}{n} Y_n, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Als Ausgangsraum können wir dabei einen Produktraum $\left(\prod_{n=0}^{\infty} \Omega_n, \bigotimes_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n, \bigotimes_{n=0}^{\infty} P_n\right)$ zu Grunde legen, bei dem jede Zufallsvariable Y_n auf $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ definiert ist und $P_n^{Y_n} = \mathcal{N}(0,1)$ für alle $n \in \mathbb{Z}^+$ gilt. Wir wenden jetzt Folgerung 2 auf die Zufallsvariable Y_0 an: Demnach existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q_0 auf \mathcal{A}_0 , unter dem die Zufallsvariable Y_0 normalverteilt ist mit Erwartungswert $\frac{\sqrt{T}}{\sigma} \left(\tilde{r} - \mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ und Varianz 1. Unter dem Maß $Q := Q_0 \times \bigotimes_{n=1}^{\infty} P_n$ ist dann der originäre diskontierte Aktienkursprozess $\{\tilde{S}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ ein Martingal, denn unter Q_0 ist Y_0 verteilt wie die Zufallsvariable $Y_0 + \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \left(\tilde{r} - \mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ unter P_0 , womit unter $P := P_0 \times \bigotimes_{n=1}^{\infty} P_n$ der Prozess $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t &:= S_0 \exp \left((\mu - \tilde{r})t + \sigma \left(\frac{Y_0 + \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \left(\tilde{r} - \mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{T}} t + \frac{\sqrt{2T}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)}{n} Y_n \right) \right) \\ &= S_0 \exp \left((\mu - \tilde{r})t + \left(\tilde{r} - \mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \left(\frac{Y_0}{\sqrt{T}} t + \frac{\sqrt{2T}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)}{n} Y_n \right) \right) \\ &= S_0 \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t \right), \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

ein Martingal ist nach Satz 17 und dabei dieselbe Verteilungsstruktur besitzt wie der originäre diskontierte Aktienkursprozess $\{\tilde{S}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ unter $Q = Q_0 \times \bigotimes_{n=1}^{\infty} P_n$. Damit ist Q das (sogar eindeutig bestimmte) äquivalente Martingalmaß für $\{\tilde{S}_t\}_{0 \leq t \leq T}$, und wie im diskreten Fall des Cox-Ross-Rubinstein-Modells lassen sich die arbitragefreien Preise eines Derivats, das zum Fälligkeitszeitpunkt T die Auszahlung $D_T(s) = D(s)$ bei gegebenem Aktienkurs $S_T = s$ realisiert, zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ darstellen als

$$D_t(s) = e^{-\tilde{r}(T-t)} E^* (D(S_T) | S_t = s) = e^{-\tilde{r}(T-t)} E \left(D \left(s \cdot \exp \left\{ \left(\tilde{r} - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right\} \exp \{ \sigma \sqrt{T-t} Z \} \right) \right)$$

(vgl. ETHERIDGE [11], Proposition 5.2.1), wobei Z eine standard-normalverteilte Zufallsvariable bezeichnet und E^* wieder den Erwartungswert bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes Q bezeichnet. Die zweite Gleichung ergibt sich dabei so: bezeichnet $\{S_t^*\}_{0 \leq t \leq T}$ den undiskontierten modifizierten Prozess, gegeben durch

$$S_t^* := e^{\tilde{r}t} S_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

so ist nach obigem, ähnlich wie im Beweis zu Satz 1,

$$\begin{aligned} E^* (D(S_T) | S_t = s) &= E (D(S_T^*) | S_t^* = s) \\ &= E \left(D \left(S_0 \exp \left(\left(\tilde{r} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T \right) \right) \middle| S_0 \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t \right) = s \right) \\ &= E \left(D \left(S_0 \exp \left(\left(\tilde{r} - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t + (T-t)) + \sigma (W_t + (W_T - W_t)) \right) \right) \middle| S_0 \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t \right) = s \right) \\ &= E \left(D \left(s \cdot \exp \left(\left(\tilde{r} - \frac{\sigma^2}{2} \right) ((T-t) + \sigma (W_T - W_t)) \right) \right) \right) \\ &= E \left(D \left(s \cdot \exp \left\{ \left(\tilde{r} - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right\} \exp \{ \sigma \sqrt{T-t} Z \} \right) \right), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

denn $W_T - W_t$ ist normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz $T-t$. Die Abbildung $D_t(s)$ ist zugleich Lösung der folgenden partiellen Differenzialgleichung (so genannte *Black-Scholes-Gleichung*):

$$\frac{\partial}{\partial t} D_t(s) + \tilde{r}s \frac{\partial}{\partial s} D_t(s) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} D_t(s) - \tilde{r} D_t(s) = 0$$

mit der Endbedingung $D_T(s) = D(s)$, der Auszahlung (dem Wert) des Derivats zum Fälligkeitszeitpunkt für gegebenen Aktienkurs $S_T = s$ (vgl. ETHERIDGE [11], Proposition 5.2.3). Dies sieht man etwa so: das ursprüngliche allgemeine Black-Scholes-Modell erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

also das P^* -Martingal-modifizierte Modell die Gleichung

$$dS_t^* = \tilde{r} S_t^* dt + \sigma S_t^* dW_t,$$

so dass die Abbildung $F(t, s) := E(D(S_T^*) | S_t^* = s)$ nach der Feynman-Kac-Darstellung (vgl. ETHERIDGE [11], KAPITEL 4.8) die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, s) + \tilde{r} s \frac{\partial}{\partial s} F(t, s) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} F(t, s) = 0 \quad (*)$$

mit der Endbedingung $F(T, s) = E(D(S_T^*) | S_T^* = s) = D(s)$ erfüllt. Wegen $D_t(s) = e^{-\tilde{r}(T-t)} F(t, s)$ bzw. $F(t, s) = e^{\tilde{r}(T-t)} D_t(s)$ ergibt sich also mit

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} e^{\tilde{r}(T-t)} D_t(s) = -\tilde{r} t e^{\tilde{r}(T-t)} D_t(s) + e^{\tilde{r}(T-t)} \frac{\partial}{\partial t} D_t(s)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial s} F(t, s) = e^{\tilde{r}(T-t)} \frac{\partial}{\partial s} D_t(s), \quad \frac{\partial^2}{\partial s^2} F(t, s) = e^{\tilde{r}(T-t)} \frac{\partial^2}{\partial s^2} D_t(s)$$

aus (*) die Gleichung

$$-\tilde{r} t e^{\tilde{r}(T-t)} D_t(s) + e^{\tilde{r}(T-t)} \frac{\partial}{\partial t} D_t(s) + \tilde{r} s e^{\tilde{r}(T-t)} \frac{\partial}{\partial s} D_t(s) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 e^{\tilde{r}(T-t)} \frac{\partial^2}{\partial s^2} D_t(s) = 0,$$

woraus durch Ausklammern des Terms $e^{\tilde{r}(T-t)}$ die Black-Scholes-Gleichung folgt. Bemerkenswert hieran ist also, dass **jeder** arbitragefreie Derivate-Preis Lösung ein und derselben partielle Differentialgleichung ist, die Lösungen sich dabei nur nach der jeweiligen Endbedingung $D_T(s) = D(s)$ unterscheiden!

Eine anschauliche heuristische Erklärung für (*) ergibt wie folgt: Sei

$$V(t) f(s) := E\left(f\left(s \cdot \exp(\tilde{r}t + \sigma W_t)\right)\right) \text{ für } s, t \geq 0 \text{ und „geeignete“ reelle Funktionen } f.$$

Dann bildet die Familie $\{V(t)|t \geq 0\}$ eine Halbgruppe von Operatoren mit dem infinitesimalen Erzeuger

$$Af(s) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} [V(t)f - f](s) = \tilde{r}s \cdot f'(s) + \frac{\sigma^2 s^2}{2} f''(s)$$

(vergl. das Skript ANALYTISCHE PRINZIPIEN DER STOCHASTIK, Kapitel II.3). Setzt man nun $G(t, s) := V(t)f(s)$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, s) = \frac{d}{dt} V(t)f(s) = AV(t)f(s) = \tilde{r}s \frac{\partial}{\partial s} G(t, s) + \frac{\sigma^2 s^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} G(t, s).$$

Die Modifikation $F(t, s) := V(T - t)f(s)$ führt entsprechend zu

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, s) = \frac{d}{dt} V(T - t)f(s) = -AV(T - t)f(s) = -\tilde{r}s \frac{\partial}{\partial s} F(t, s) - \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} F(t, s)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, s) + \tilde{r}s \frac{\partial}{\partial s} F(t, s) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} F(t, s) = 0,$$

was (*) entspricht. Man beachte, dass im obigen speziellen Fall wegen der Homogenität des Markov-Prozesses

$$F(t, s) := E(D(S_T^*) | S_t^* = s) = E(D(S_{T-t}^*) | S_0^* = s) = V(T - t)D(s)$$

gilt.

Zum Abschluß leiten wir mit dem obigen Kalkül noch einmal die Preisformel für eine europäische Call-Option $C_t(s)$ her (vgl. Abschnitt 8 und ETHERIDGE [11], Example 5.2.2)). Hier ist speziell $D(s) = (s - X)^+$, wobei wir mit X wieder den Ausübungspreis bezeichnen. Mit

$$A := \frac{\ln\left(\frac{X}{s}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

gilt dann

$$\begin{aligned}
C_t(s) &= e^{-\tilde{r}(T-t)} E^* \left((S_T - X)^+ | S_t = s \right) = e^{-\tilde{r}(T-t)} E \left[\left(\left[s \cdot \exp \left\{ \left(\tilde{r} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right\} \exp \left\{ \sigma \sqrt{T-t} Z \right\} - X \right]^+ \right) \right] \\
&= e^{-\tilde{r}(T-t)} \int_A^\infty \left[s \cdot \exp \left\{ \left(\tilde{r} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right\} \exp \left\{ \sigma \sqrt{T-t} z \right\} - X \right] \varphi(z) dz \\
&= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \int_A^\infty \left(\exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} z - \frac{z^2}{2} \right\} \right) dz - e^{-\tilde{r}(T-t)} X (1 - \Phi(A)) \\
&= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \int_A^\infty \left(\exp \left\{ -\frac{1}{2} (z - \sigma \sqrt{T-t})^2 \right\} \right) dz - e^{-\tilde{r}(T-t)} X \cdot \Phi(-A) \\
&= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \int_{A - \sigma \sqrt{T-t}}^\infty \left(\exp \left\{ -\frac{1}{2} z^2 \right\} \right) dz - e^{-r(T-t)} X \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{X} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) \\
&= s \left(1 - \Phi \left(A - \sigma \sqrt{T-t} \right) \right) - e^{-\tilde{r}(T-t)} X \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{X} \right) + \left(\tilde{r} - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) \\
&= s \cdot \Phi \left(-A + \sigma \sqrt{T-t} \right) - e^{-\tilde{r}(T-t)} X \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{X} \right) + \left(\tilde{r} - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) \\
&= s \cdot \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{r^{T-t} s}{X} \right) + \frac{\sigma^2}{2} (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) - v^{T-t} X \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{r^{T-t} s}{X} \right) - \frac{\sigma^2}{2} (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right), \quad 0 \leq t \leq T,
\end{aligned}$$

wobei φ die Dichte der Standard-Normalverteilung und Φ die entsprechende Verteilungsfunktion bezeichnet.

Für $t = 0$ ist dies identisch mit der Formel auf S. 32, die durch den Grenzübergang aus dem Cox-Ross-Rubinstein-Modell gewonnen wurde. Man beachte, dass in diesem Fall $s = S_0$ zu setzen ist.

Für vertiefende, weitergehende Ausführungen sei auf die Monographie von APPLEBAUM [3] verwiesen.

Literatur

- [1] M. ADELMAYER (2000): *Call & Put*. Einführung in Optionen aus wirtschaftlicher und mathematischer Sicht. Orell Füssli, Zürich.
- [2] M. ADELMAYER, E. WARMUTH (2003): *Finanzmathematik für Einsteiger*. Eine Einführung für Studierende, Schüler und Lehrer. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
- [3] D. APPLEBAUM (2004): *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 93, Cambridge University Press, Cambridge.
- [4] M. AVELLANEDA, P. LAURENCE (2000): *Quantitative Modeling of Derivative Securities*. From Theory to Practice. Chapman & Hall, London.
- [5] E. BANKS (Ed.) (2002): *Weather Risk Management*. Markets, Products and Applications. Palgrave, N.Y.
- [6] J. BANNISTER (1998): *Alternative Risk Financing*. Changing the Face of Insurance. Published by Jim Bannister Developments Ltd. (in association with AON Group and Zurich International).
- [7] M. BAXTER, A. RENNIE (1998): *Financial Calculus*. An Introduction to Derivative Pricing. Cambridge University Press, Cambridge.
- [8] N.H. BINGHAM, R. KIESEL (1998): *Risk-Neutral Valuation*. Pricing and Hedging of Financial Derivatives. Springer-Verlag, Berlin.
- [9] T. BJÖRK (1998): *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, Oxford.
- [10] D. DUFFIE (1992): *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, Princeton.
- [11] A. ETHERIDGE (2002): *A Course in Financial Calculus*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [12] E. EBERLEIN (1998): *Grundideen moderner Finanzmathematik*. Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Heft 3, 10 - 20.
- [13] P.C. FUSARO (2002): *Energy Convergence*. The Beginning of the Multi-Commodity Market. Wiley, N.Y.
- [14] P. GÄNSSLER, W. STUTE (1977): *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag, Berlin.
- [15] H. GEMAN (Ed.) (1999): *Insurance and Weather Derivatives*. From Exotic Options to Exotic Underlyings. RISK Books, London.
- [16] A. IRLE (1998): *Finanzmathematik*. Die Bewertung von Derivaten. Teubner-Verlag, Stuttgart.
- [17] J. KREMER (2006): *Einführung in die Diskrete Finanzmathematik*. Springer, Berlin.
- [18] D. LAMBERTON, B. LAPEYRE (1997): *Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall, London.
- [19] M. MUSIELA, M. RUTKOWSKI (1997): *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer-Verlag, Berlin.
- [20] D. PFEIFER (2000): *Zur Mathematik derivativer Finanzinstrumente: Anregungen für den Stochastik-Unterricht*. *Stochastik in der Schule* 20, 25 - 37.
- [21] D. PILIPOVIĆ (1998): *Energy Risk*. Valuing and Managing Energy Derivatives. McGraw-Hill, N.Y.
- [22] S.R. PLISKA (1997): *Introduction to Mathematical Finance*. Discrete Time Models. Blackwell Publishers, Massachusetts.

- [23] REUTERS Ltd. (1999): *An Introduction to Derivatives*. John Wiley & Sons, Singapore.
- [24] CH. B. SCHAREK, M. SCHUMACHER, M. GRISCHEK (1999): *Die Aktienindexgebundene Lebensversicherung*. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- [25] P. STEINER, H. UHLIR (2001): *Wertpapieranalyse*. 4. Aufl., Physica-Verlag, Heidelberg.
- [26] P. WILMOTT (1998): *Derivatives*. The Theory and Practice of Financial Engineering. John Wiley & Sons, Chichester.

Ergänzende und weiterführende Literatur

- [27] M. AMMANN (2001): *Credit Risk Valuation*. Methods, Models, and Application. Springer-Verlag, Berlin.
- [28] T.R. BIELECKI, M. RUTKOWSKI (2001): *Credit Risk*. Modeling, Valuation and Hedging. Springer-Verlag, Berlin.
- [29] N. BOULEAU (1998): *Glück und Strategie auf Finanzmärkten*. Birkhäuser-Verlag, Basel.
- [30] D. BRIGO, F. MERCURIO (2001): *Interest Rate Models*. Theory and Practice. Springer-Verlag, Berlin.
- [31] E. BRIYS, M. BELLALAH, H.M. MAI, F. DE VARENNE (1998): *Options, Futures and Exotic Derivatives*. Theory, Application and Practice. John Wiley & Sons, Chichester.
- [32] H. CREMERS (1998): *Stochastik für Banker*. Bankakademie-Verlag, Frankfurt am Main.
- [33] H. CREMERS (1999): *Basiswissen Mathematik und Stochastik für Banker*. Bankakademie-Verlag, Frankfurt am Main.
- [34] M.M. DACAROGNA, R. GENÇAY, U. MÜLLER, R.B. OLSEN, O.V. PICTET (2001): *An Introduction to High-Frequency Finance*. Academic Press, San Diego.
- [35] R.-A. DANA, M. JEANBLANC (2002): *Financial Markets in Continuous Time*. Springer, Berlin.
- [36] M.U. DOTHAN (1990): *Prices in Financial Markets*. Oxford University Press, Oxford.
- [37] D. DUFFIE (1988): *Security Markets*. Stochastic Models. Academic Press, San Diego.
- [38] D. DUFFIE (1989): *Futures Markets*. Prentice-Hall, London.
- [39] R.J. ELLIOTT, P.E. KOPP (1999): *Mathematics of Financial Markets*. Springer-Verlag, Berlin.
- [40] E.R. FERNHOLZ (2002): *Stochastic Portfolio Theory*. Springer, Berlin.
- [41] J.-P. FOUQUE, G. PAPANICOLAOU, K.R. SIRCAR (2000): *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [42] J. FRANKE, W. HÄRDLE, C. HAFNER (2001): *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*. Springer-Verlag, Berlin.
- [43] W. HÄRDLE, T. KLEINOW, G. STAHL (2002): *Applied Quantitative Finance*. Theory and Computational Tools. Springer-Verlag, Berlin.
- [44] W. HAUSMANN, K. DIENER, J. KÄSLER (2002): *Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection*. Stochastische Finanzmarktmodelle und ihre Anwendungen. Vieweg-Verlag, Braunschweig / Wiesbaden.
- [45] J.C. HULL (1998): *Introduction to Futures and Options Markets*. Prentice-Hall, London.
- [46] J.C. HULL (2000): *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice-Hall, London.

- [47] P.J. HUNT, J.E. KENNEDY (2000): *Financial Derivatives in Theory and Practice*. John Wiley & Sons, Chichester.
- [48] R.A. JARROW, V. MAKSIMOVIC, W.T. ZIEMBA (Eds.) (1995): *Finance*. Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 9. North-Holland, Elsevier, Amsterdam.
- [49] G. KALLIANPUR, R.L. KARANDIKAR (2000): *Introduction to Option Pricing Theory*. Birkhäuser-Verlag, Basel.
- [50] I. KARATZAS, S.E. SHREVE (1998): *Methods of Mathematical Finance*. Springer-Verlag, New York.
- [51] M. KOBEL (1996): *Bewertung multivariater Derivate*. Zeit- und zustandsdiskrete Modellierungen. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- [52] R. KORN, E. KORN (1999): *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung*. Vieweg-Verlag, Braunschweig / Wiesbaden.
- [53] Y.-K. KWOK (1998): *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer-Verlag, Berlin.
- [54] M. LANE (Ed.): *Alternative Risk Strategies*. RISK Books, London.
- [55] Y.-D. LYUU (2002): *Financial Engineering and Computation*. Principles, Mathematics, Algorithms. Cambridge University Press, Cambridge.
- [56] B.B. MANDELBROT (1997): *Fractals and Scaling in Finance*. Discontinuity, Concentration, Risk. Springer-Verlag, New York.
- [57] A.V. MEL'NIKOV, S.N. VOLKOV, M.L. NECHAEV (2002): *Mathematics of Financial Obligations*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 212. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [58] M. MEYER (2001): *Continuous Stochastic Calculus with Applications to Finance*. Chapman & Hall, London.
- [59] S.N. NEFTCI (2000): *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press, San Diego.
- [60] M. OBERHAUS, A. FERRARIS, T. KNUDSEN, R. MILWARD, L. NGUYEN-NGOC, G. SCHINDLMAYR (2002): *Equity Derivatives*. Theory and Applications. Wiley, N.Y.
- [61] W. PAUL, J. BASCHNAGEL (1999): *Stochastic Processes*. From Physics to Finance. Springer, Berlin.
- [62] A. PELSSER (2000): *Efficient Methods for Valuing Interest Rate Derivatives*. Springer-Verlag, Berlin.
- [63] E.Z. PRISMAN (2000): *Pricing Derivative Securities*. Academic Press, San Diego.
- [64] R. REBONATO (1996): *Interest-Rate Option Models*. Understanding, Analysing and Using Models for Exotic Interest-Rate Options. John Wiley & Sons, Chichester.
- [65] S. REITZ, W. SCHWARZ, M.R.W. MARTIN (2004): *Zinsderivate*. Eine Einführung in Produkte, Bewertung, Risiken. Vieweg-Verlag, Wiesbaden.
- [66] D.M. SALOPEK (1997): *American Put Options*. Longman, Harlow.
- [67] M. SANDMANN (1999): *Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte*. Springer-Verlag, Berlin.
- [68] R. SEYDEL (2002): *Tools for Computational Finance*. Springer, Berlin.

- [69] A.N. SHIRYAEV (1999): *Essentials of Stochastic Finance*. Facts, Models, Theory. World Scientific, Singapore.
- [70] S. E. SHREEVE (2004): *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer-Verlag, New York.
- [71] S. E. SHREEVE (2004): *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous Time Models*. Springer-Verlag, New York.
- [72] J.M. STEELE (2001): *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer-Verlag, New York.
- [73] R.S. TSAY (2002): *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons, Chichester.
- [74] P. WILMOTT (1998): *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. Vol.1, Vol. 2. John Wiley & Sons, Chichester.
- [75] P. WILMOTT, S. HOWISON, J. DEWYNNE (1995): *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [76] R. ZAGST (2002): *Interest Rate Management*. Springer-Verlag, Berlin.

Sonstige Literatur

- [77] L. BREIMAN (1968): *Probability*. Addison Wesley, Reading, Mass.
- [78] K. ITÔ, H.P. MCKEAN, JR. (1965): *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, Ac. Press, N.Y.

Danksagung

Herr M.Sc. Hervé Awoumlac Tsatedem hat den Text sorgfältig geprüft und zahlreiche Verbesserungsvorschläge gemacht, wofür ich ihm hiermit herzlich danke.