

Räumliche Statistik

Inhalt

Vorbemerkung	3
I. Punktprozess-Modelle	3
I. 1. Maßtheoretische Grundlagen	3
I. 2. Der Poisson-Punktprozess	8
I. 3. Der homogene Poisson-Punktprozess	16
I. 4. Besonderheiten des homogenen Poisson-Punktprozesses	23
I. 5. Statistik für den homogenen Poisson-Punktprozess	26
I. 6. Weitere Punktprozess-Modelle	35
II. Zufällige abgeschlossene Mengen	46
II. 1. Maßtheoretische Grundlagen	46
II. 2. Messbare Operationen mit zufälligen abgeschlossenen Mengen	52
II. 3. Das Minimal-Areal-Problem der Statistischen Ökologie	62
II. 4. Boole-Modelle	71
III. Zufallsfelder (Geostatistik)	79
III. 1. Maßtheoretische Grundlagen	79
III. 2. Gauß'sche Zufallsfelder	91
III. 3. Variogramm und Semivariogramm	99
III. 4. Krige-Prädiktoren	103
Verzeichnis der Definitionen, Sätze und Lemmata	108
Danksagung	108
Literatur	109

Vorbemerkung

Hinter dem Begriff *Räumliche Statistik* verbirgt sich eine Vielzahl stochastischer Methoden, die teilweise recht unterschiedliche mathematische Hintergründe haben, die sich aber alle mit der Modellierung und Auswertung raumbezogener zufälliger Vorgänge befassen. Grob lassen sich vielleicht zwei Hauptrichtungen unterscheiden: zum einen *diskrete* Phänomene, die sich idealisiert in zufälligen „Punktwolken“ manifestieren (Regentropfen auf dem Gehweg, kristalline Verunreinigungen in Metallen, Standorte von Bäumen in einem Wald usw.) oder die daraus abgeleitet werden können (etwa *Boole-Modelle* wie Luftblasen in Brot oder Käse, Muschelbänke im Watt, Schimmelpilzkolonien auf Wänden usw.) Der wahrscheinlichkeitstheoretische Hintergrund ist hier in der Theorie der *zufälligen Maße* (insbesondere *Punktprozesse*) und *zufälligen (abgeschlossenen) Mengen* zu finden, die häufig auch unter dem Oberbegriff *Stochastische Geometrie* oder *Geometrie-Statistik* zusammengefasst werden (vgl. STOYAN, KENDALL AND MECKE (1987), D. STOYAN AND H. STOYAN (1992), MOLCHANOV (1997,2005), SCHNEIDER UND WEIL (2000), ILLIAN, PENTTINEN, D. STOYAN AND H. STOYAN (2008) oder GELFAND, DIGGLE, FUENTES AND GUTTORP (2010), Part IV und V).

Auf der anderen Seite werden *kontinuierliche* räumliche Phänomene oft mit dem Oberbegriff *Geostatistik* in Verbindung gebracht, ein Gebiet im Überschneidungsbereich der *Linearen Statistischen Modelle* und der Theorie der *Zufallsfelder*, das sind *Stochastische Prozesse* mit mehrdimensionalen Indexmengen. Anwendungsgebiete dieser Theorie liegen klassischerweise im Bergbau (Kohlevorkommen, Erze, Erdöl) und in den Umweltwissenschaften (z.B. Konzentrationen von Schadstoffen im Boden oder in der Luft). Vgl. hierzu etwa CHRISTAKOS (1992), SCHABENBERGER AND GOTWAY (2005), DIGGLE AND RIBEIRO JR. (2005), RUE AND HELD (2005), REMY, BOUCHER AND WU (2009), GELFAND, DIGGLE, FUENTES AND GUTTORP (2010), Part II, ARMSTRONG (1998) und KITANIDIS (1997).

I. Punktprozess-Modelle

Punktprozesse bilden den Einstieg in die einfachsten zufälligen räumlichen Strukturen mit diskretem Charakter. Ein wichtiger Punktprozess, der die Grundlage zahlreicher Verallgemeinerungen bildet, ist der (homogene und inhomogene) *räumliche Poisson-Prozess*, der in seiner eindimensionalen Version als *Markoff-Prozess* in der Warteschlangentheorie, der Informatik und der Versicherungs- und Finanzmathematik von fundamentaler Bedeutung ist.

I.1. Maßtheoretische Grundlagen

Lemma 1: Es sei \mathfrak{X} eine nicht-leere Menge, $(\mathfrak{Y}_i, \mathcal{B}_i)$, $i \in I$ seien Messräume mit einer nicht-leeren Indexmenge I . Ferner seien $T_i : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}_i$ für $i \in I$ beliebige Abbildungen. $\mathcal{B} := \sigma(T_i; i \in I)$ bezeichne wie üblich die von den Abbildungen T_i erzeugte σ -Algebra über \mathfrak{X} . Ist (Ω, \mathcal{A}) ein weiterer Messraum und $T : \Omega \rightarrow \mathfrak{X}$ eine Abbildung, so gilt: T ist genau dann \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbar, wenn alle Kompositionen $T_i \circ T$, $i \in I$ \mathcal{A} - \mathcal{B}_i -messbar sind.

Beweis: " \Rightarrow ": trivial, da definitionsgemäß alle T_i \mathcal{B} - \mathcal{B}_i -messbar sind.

" \Leftarrow ": $\mathcal{E} := \bigcup_{i \in I} T_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$ ist ein Erzeuger von \mathcal{B} ; es reicht also, zu zeigen: $T^{-1}(T_i^{-1}(B_i)) = (T_i \circ T)^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$ für alle $i \in I$ und $B_i \in \mathcal{B}_i$, was nach Voraussetzung aber gegeben ist. ■

I. Punktprozess-Modelle

Lemma 2: Es sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ ein Messraum und \mathcal{M} eine nicht-leere Menge von Maßen auf \mathcal{B} . Für jedes $B \in \mathcal{B}$ sei die Abbildung $\tau_B : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\tau_B(\mu) := \mu(B)$ für jedes $\mu \in \mathcal{M}$ (die so definierten Abbildungen heißen *Evaluationsabbildungen*). \mathfrak{M} bezeichne die von der Gesamtheit der Evaluationsabbildungen erzeugte σ -Algebra über \mathcal{M} . Dann gilt:

- a) Für jedes $A \in \mathcal{B}$ und jede Borel-Menge $D \in \mathcal{B}^1$ gehört die Menge $\{\mu \in \mathcal{M} \mid \mu(A) \in D\}$ zu \mathfrak{M} .
- b) Besitzt die σ -Algebra \mathcal{B} einen abzählbaren, erzeugenden Semiring \mathcal{S} , der eine Folge von Mengen enthält, deren Vereinigung \mathfrak{X} überdeckt und auf dem alle $\mu \in \mathcal{M}$ endlich sind (d.h. alle Maße $\mu \in \mathcal{M}$ sind σ -endlich), so gehören alle einelementigen Mengen $\{\mu\}$ für $\mu \in \mathcal{M}$ zu \mathfrak{M} , d.h. $\mathcal{T} := \{\{\mu\} \mid \mu \in \mathcal{M}\}$ ist das zu \mathfrak{M} gehörige Atomsystem. Ferner gilt dann: $\{\tau_E \mid E \in \mathcal{S}\}$ ist ein Erzeuger von \mathfrak{M} . Diese Aussage bleibt auch gültig, wenn \mathcal{S} lediglich ein erzeugender Semiring von \mathcal{B} ist.
- c) Für alle $\alpha, \beta \geq 0$ ist die Abbildung $S_{\alpha, \beta} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} : (\mu, \nu) \mapsto \alpha\mu + \beta\nu$ $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$ - \mathfrak{M} -messbar. Allgemeiner gilt: ist $\alpha = \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen, so ist die Abbildung $S_\alpha : \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} : \{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n$ $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}$ - \mathfrak{M} -messbar.
- d) Es sei einschränkend \mathcal{M} eine Menge σ -endlicher Maße auf \mathcal{B} . Ist $(\mathfrak{Y}, \mathcal{C})$ ein weiterer Messraum und \mathcal{L} eine nicht-leere Menge σ -endlicher Maße auf \mathcal{C} , so ist die Abbildung $S_{\otimes} : \mathcal{M} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{N} : (\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu$ $\mathfrak{M} \otimes \mathcal{L}$ - \mathfrak{N} -messbar, wobei \mathcal{L} die von den Evaluationsabbildungen auf \mathcal{C} und \mathfrak{N} die von den Evaluationsabbildungen auf \mathcal{N} , der Menge aller σ -endlichen Maße auf $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$, erzeugten σ -Algebren bezeichnen.
- e) Ist $D \in \mathcal{B}$ fest, so ist die Spurmaß-Abbildung $S_D : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} : \mu \mapsto \mu(\cdot \cap D)$ \mathfrak{M} - \mathfrak{M} -messbar.

Beweis:

- a) Es gilt $\{\mu \in \mathcal{M} \mid \mu(A) \in D\} = \tau_A^{-1}(D) \in \mathfrak{M}$ für jedes $A \in \mathcal{B}$ und jede Borel-Menge $D \in \mathcal{B}^1$.
- b) Sei $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$ mit einer abzählbaren Indexmenge I . Für $\mu \in \mathcal{M}$ definieren wir $D_i := \{\mu(S_i)\} \in \mathcal{B}^1$, $i \in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned} M &:= \{\nu \in \mathcal{M} \mid \nu(S_i) = \mu(S_i) \text{ für alle } i \in I\} = \bigcap_{i \in I} \{\nu \in \mathcal{M} \mid \nu(S_i) = \mu(S_i)\} \\ &= \bigcap_{i \in I} \{\nu \in \mathcal{M} \mid \nu(S_i) \in D_i\} = \bigcap_{i \in I} \tau_{S_i}^{-1}(D_i) \in \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Für jedes $\eta \in M$ gilt somit $\eta(S_i) = \mu(S_i)$ für alle $i \in I$ und damit wegen der aus den Voraussetzungen folgenden σ -Endlichkeit der Maße $\eta = \mu$ nach dem großen Maßfortsetzungssatz (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Satz 7). Daher ist $M = \{\mu\} \in \mathfrak{M}$, was zunächst zu zeigen war. Insbesondere ist damit $\mathcal{T} := \{\{\mu\} \mid \mu \in \mathcal{M}\}$ das Atomsystem zu \mathfrak{M} . Für die zweite Aussage können wir zunächst annehmen, dass alle $\mu \in \mathcal{M}$ endlich sind. Ferner sei $\mathfrak{M}^* = \sigma(\{\tau_E \mid E \in \mathcal{S}\} \cup \tau_{\mathfrak{X}}) \subseteq \mathfrak{M}$. Das System $\mathcal{B}^* = \{B \in \mathcal{B} \mid \tau_B \text{ ist } \mathfrak{M}^*\text{-messbar}\}$ ist nun aber

I. Punktprozess-Modelle

eine σ -Algebra wegen $\tau_{B^c} = \tau_{\mathcal{X}} - \tau_B$ und $\tau_{\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau_{B_n}$ für alle $B \in \mathcal{B}^*$ und paarweise disjunkte Mengen $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}^*$. Wegen $\mathcal{S} \cup \{\mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{B}^*$ folgt also $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{S} \cup \{\mathcal{X}\}) \subseteq \mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$ und damit die Behauptung. Der allgemeine Fall σ -endlicher Maße folgt mit dem üblichen Approximationsargument.

- c) Für $i = 1, 2$ bezeichne $\pi_i : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ die Projektions-Abbildung auf die i -te Komponente. Dann ist jedes π_i $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$ - \mathfrak{M} -messbar. Für jedes $B \in \mathcal{B}$ folgt ferner:

$$\tau_B(S_{\alpha\beta}(\mu, \nu)) = \tau_B(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha\mu(B) + \beta\nu(B), \text{ also } \tau_B \circ S_{\alpha\beta} = \alpha\tau_B \circ \pi_1 + \beta\tau_B \circ \pi_2,$$

d.h. $\tau_B \circ S_{\alpha\beta}$ ist $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$ -messbar für alle $B \in \mathcal{B}$. Damit ist aber jede Abbildung $S_{\alpha\beta}$ gerade $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$ - \mathfrak{M} -messbar nach Lemma 1. Der allgemeine Fall ergibt sich analog wegen

$$\tau_B(S_{\alpha}(\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}})) = \tau_B\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tau_B(\mu_n),$$

also $\tau_B \circ S_{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tau_B \circ \pi_n$ mit den entsprechenden Projektionsabbildungen $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

- d) Für alle $B \in \mathcal{B}$ und $C \in \mathcal{C}$ gilt $\tau_{B \times C} \circ S_{\otimes}(\mu, \nu) = \mu \otimes \nu(B \times C) = \mu(B) \cdot \nu(C) = \tau_B(\mu) \cdot \tau_C(\nu)$, woraus folgt, dass $\tau_{B \times C} \circ S_{\otimes} = \tau_B \circ \pi_1 \times \tau_C \circ \pi_2$ $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{L}$ -messbar ist für alle $B \in \mathcal{B}$ und $C \in \mathcal{C}$. Damit folgt, dass $\tau_E \circ S_{\otimes}$ $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{L}$ -messbar ist für alle $E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ und damit nach dem zweiten Teil von b) die Behauptung.
- e) Für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt $\tau_B \circ S_D(\mu) = \mu(B \cap D) = \tau_{B \cap D}(\mu)$, also $\tau_B \circ S_D = \tau_{B \cap D}$ mit $B \cap D \in \mathcal{B}$, woraus die Behauptung folgt. ■

Bemerkungen:

- Das Atomsystem $\mathcal{T} := \{\{\mu\} \mid \mu \in \mathcal{M}\}$ ist sicher dann *erschöpfend*, wenn \mathcal{M} abzählbar ist (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Satz 3). Für überabzählbare \mathcal{M} ist das nicht unbedingt so; Gegenbeispiel: $\mathcal{M} = \{\varepsilon_x \mid x \in \mathcal{X} := \mathbb{R}\}$ (Menge aller Einpunktmaße über \mathbb{R}). Hier gilt $\tau_A^{-1}(\{1\}) = \{\varepsilon_x \mid x \in A\}$, $\tau_A^{-1}(\{0\}) = \{\varepsilon_x \mid x \in A^c\} = \tau_{A^c}^{-1}(\{1\})$ für alle $A \in \mathcal{B}^1$ und somit $\mathfrak{M} = \{\{\varepsilon_x \mid x \in A\} \mid A \in \mathcal{B}^1\}$; \mathfrak{M} ist damit in gewisser Weise „isomorph“ zur Borel'schen σ -Algebra \mathcal{B}^1 (über die Abbildung $x \rightleftharpoons \varepsilon_x$ für $x \in \mathbb{R}$), für die das entsprechende Atomsystem der einelementigen Mengen gerade *nicht* erschöpfend ist.
- Der zweite Teil von Lemma 2 b) kann sofort auf endlich viele „Faktoren“ ausgedehnt werden.

Definition 1: In der Situation von Lemma 2 sei zusätzlich (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Zufallselement $\xi : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ heißt *zufälliges Maß* über \mathcal{B} (mit Werten in \mathcal{M}).

Bemerkungen:

- Gemäß dem definitorischen Teil von Lemma 2 ist ein Zufallselement $\xi : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ also genau dann ein zufälliges Maß, wenn alle (reellwertigen!) Abbildungen $\xi(B) = \tau_B \circ \xi$ für jedes $B \in \mathcal{B}$ \mathcal{A} -messbar sind im üblichen Sinne.

I. Punktprozess-Modelle

- Die Frage, durch welche (einfachen) Bedingungen die Verteilung eines zufälligen Maßes eindeutig bestimmt ist, ist nicht so leicht zu beantworten. Für den Fall, dass der die σ -Algebra \mathcal{B} erzeugende Semiring \mathcal{S} die Bedingung b) von Lemma 2 erfüllt, ist die Verteilung von ξ eindeutig durch alle endlich-dimensionalen Randverteilungen bestimmt, genauer: durch die Verteilungen aller Zufallsvektoren $(\xi(B_1), \dots, \xi(B_n))$ mit $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{S}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei kann man sich wegen der σ -Additivität von Maßen sogar noch auf den Fall von paarweise disjunkten $B_i \in \mathcal{S}$ zurückziehen. Eine Situation, in der dies zutrifft, ist im Fall von $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ mit beliebiger Dimension $d \in \mathbb{N}$ gegeben, wobei als \mathcal{S} der Semiring der Standard-Intervalle in \mathbb{R}^d gewählt werden kann.

Allgemeinere Ausführungen hierzu im Zusammenhang mit entsprechenden topologischen Voraussetzungen findet man in KALLENBERG (1982), Kapitel 1 und 3 und KLENKE (2008), Kapitel 24.1.

Lemma 3: Es sei I eine nicht-leere Indexmenge und $\{\xi_i\}_{i \in I}$ eine stochastisch unabhängige Familie von zufälligen Maßen über \mathcal{B} (mit Werten in \mathcal{M}). Dann ist auch jede Familie $\{\xi_i(B_i)\}_{i \in I}$ mit Mengen $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ stochastisch unabhängig.

Beweis: Klar wegen $\xi_i(B_i) = \tau_{B_i} \circ \xi_i$ für alle $i \in I$. ■

Bemerkung: Lemma 3 kann direkt auf Familien von Zufallsvektoren $\{(\xi_i(B_{i_1}), \dots, \xi_i(B_{i_k}))\}_{i \in I}$ mit Mengen $B_{i_1}, \dots, B_{i_k} \in \mathcal{B}$ im Sinne der Bemerkung zu Definition 1 erweitert werden. Sind umgekehrt alle solchen Familien stochastisch unabhängig, so ist unter den Voraussetzungen in der zweiten Bemerkung zu Definition 1 auch die Familie $\{\xi_i\}_{i \in I}$ stochastisch unabhängig.

Lemma 4: In der Situation von Definition 1 sei ξ ein zufälliges Maß über \mathcal{B} (mit Werten in \mathcal{M}). Dann wird durch die „punktweise“ Definition

$$(E\xi)(B) := E[\xi(B)] = \int \xi(B) dP, \quad B \in \mathcal{B}$$

ein Maß auf \mathcal{B} definiert. $E\xi$ heißt (das) *Intensitätsmaß* zu ξ .

Beweis: Unter Bezug auf Lemma 2 ist für jedes $B \in \mathcal{B}$ die Größe $\xi(B) = \tau_B(\xi)$ eine nicht-negative Zufallsvariable, also P -integrierbar. Damit ist $E\xi$ wohldefiniert (ggf. mit Wert ∞ für gewisse Ereignisse) und nicht-negativ. $E\xi$ ist ein Maß, weil für alle paarweise disjunkten Ereignisse $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt:

$$E\xi\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \int \xi\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) dP = \int \sum_{n \in \mathbb{N}} \xi(B_n) dP = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int \xi(B_n) dP = \sum_{n \in \mathbb{N}} E\xi(B_n). \quad \blacksquare$$

Lemma 5: In der Situation von Definition 1 seien $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zufällige Maße über \mathcal{B} , $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Dann wird durch $\xi := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n$ ein zufälliges Maß über \mathcal{B} definiert.

I. Punktprozess-Modelle

Beweis: Lemma 2 c), allgemeiner Teil oder die erste Bemerkung nach Definition 1. ■

Satz 1: Durch eine Abbildung $m : \Omega \times \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ wird genau dann ein zufälliges Maß ξ über \mathcal{B} vermöge $\xi(\omega)(B) := m(\omega, B)$ induziert, wenn für jedes $\omega \in \Omega$ die Abbildung $m(\omega, \cdot)$ ein Maß auf \mathcal{B} und für jedes $B \in \mathcal{B}$ die Abbildung $m(\cdot, B)$ eine \mathcal{A} -messbare Abbildung ist.

Beweis: Sei ξ ein zufälliges Maß im Sinne der Definition 1. Dann ist gemäß Lemma 2 für festes $B \in \mathcal{B}$ die Größe $\xi(B) = \tau_B(\xi)$ als Komposition messbarer Abbildungen eine \mathcal{A} -messbare Abbildung. Andererseits ist ξ auf Ω eine maßwertige Abbildung, also ist $\xi(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ ein Maß auf \mathcal{B} . Demnach kann ξ als eine Abbildung $m : \Omega \times \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ aufgefasst werden mit den angegebenen Eigenschaften. Die umgekehrte Aussage ergibt sich mit Lemma 1. Dabei spielen die Evaluationsabbildungen die Rolle der Abbildungen T_i und ξ die Rolle der Abbildung T . ■

Bemerkung: Im Sinne des Satzes 1 ist eine reguläre bedingte Verteilung $P(\cdot | \mathcal{C})$ (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Abschnitt II.8) für eine beliebige Teil- σ -Algebra $\mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{A}$ ein zufälliges Maß $\xi : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathfrak{M})$, wobei \mathcal{M} die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathcal{A} ist. Denn eine reguläre bedingte Verteilung $P(\cdot | \mathcal{C})$ besitzt gerade die genannten Eigenschaften (Wahrscheinlichkeitsmaß in der einen, messbare Abbildung in der anderen Variablen), ist also ein zufälliges (Wahrscheinlichkeits-)Maß der angegebenen Art.

Für das Intensitätsmaß ergibt sich hier noch

$$(E\xi)(B) := E[\xi(B)] = \int \xi(B) dP = \int P(B|\mathcal{C}) dP = P(B), \quad B \in \mathcal{B}, \text{ also } E\xi = P.$$

Definition 2: Ein zufälliges Maß ξ im Sinne der Definition 1 heißt *Punktprozess*, wenn gilt: $\xi(B) \in \mathbb{Z}^+$ für alle $B \in \mathcal{B}$ (d.h. $\xi(B)$ „zählt“ die Anzahl der „Punkte“ in der Menge $B \in \mathcal{B}$).

Definition 3: Es sei X ein Zufallselement auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten in einem Messraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Dann heißt das zufällige Maß $\xi = \varepsilon_X$ *Einpunkt-* oder *Dirac-Prozess*.

Bemerkung: Für jedes $B \in \mathcal{B}$ gilt ja gerade

$$\xi(B) = \varepsilon_X(B) = \mathbb{1}_B(X)$$

(mit der üblichen Indikatorfunktion $\mathbb{1}_B$), und dies ist eine \mathcal{A} -messbare Abbildung. Daher ist gemäß der ersten Bemerkung zu Definition 1 $\xi = \varepsilon_X$ ein zufälliges Maß. Hier gilt insbesondere

$$(E\xi)(B) = E[\xi(B)] = E[\mathbb{1}_B(X)] = P(X \in B) = P^X(B), \text{ also } E\xi = P^X.$$

Für vertiefende Ausführungen zu diesem Abschnitt siehe etwa KALLENBERG (1986).

I.2. Der Poisson-Punktprozess

Die in diesem Abschnitt betrachteten Punktprozess-Modelle sind fundamental für alle Anwendungen, in denen gewisse räumliche Unabhängigkeiten eine wesentliche Rolle spielen. Wir behalten hier der Einfachheit halber die Bezeichnungen aus Abschnitt I.1 bei, d.h. $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ ist ein Messraum und \mathcal{M} eine geeignete nicht-leere Menge von Maßen auf \mathcal{B} , \mathfrak{M} die von den Evaluationsabbildungen über \mathcal{M} erzeugte σ -Algebra und ein zufälliges Maß $\xi : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ eine messbare Abbildung mit Werten in \mathcal{M} .

Definition 4: Ein zufälliges Maß ξ heißt *Poisson-Punktprozess* mit Intensitätsmaß μ (auf \mathcal{B}), wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Für jedes $B \in \mathcal{B}$ ist $\xi(B)$ Poisson-verteilt mit Parameter $\mu(B)$.
- Ist I eine beliebige Indexmenge und $\{B_i\}_{i \in I}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen aus \mathcal{B} , so ist die Familie der Zufallsvariablen $\{\xi(B_i)\}_{i \in I}$ stochastisch unabhängig.

Bemerkungen:

- Falls ein solches zufälliges Maß existiert, ist seine Verteilung gemäß der zweiten Bemerkung zu Definition 1 eindeutig bestimmt.
- Die Frage der Existenz lässt sich zumindest im Fall, dass das Intensitätsmaß μ σ -endlich ist, positiv (und konstruktiv) beantworten. Dabei werden einige wesentliche Eigenschaften der Familie der Poisson-Verteilungen ausgenutzt, nämlich die *Faltungsstabilität* und die *Zerlegungsstabilität*.

Satz 2: Es sei $I = \{1, 2, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Indexmenge und $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ eine Familie positiver reeller Zahlen. Ferner sei $\lambda := \sum_{i \in I} \lambda_i$.

- Ist $\{X_i\}_{i \in I}$ eine unabhängige Familie Poisson-verteilter Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit $P^{X_i} = \mathcal{P}(\lambda_i)$, $i \in I$, so gilt für $S := \sum_{i \in I} X_i$

$$P^S = \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{P}\left(\sum_{i \in I} \lambda_i\right) = \ast_{i \in I} \mathcal{P}(\lambda_i) \quad (\text{Faltungsstabilität der Poisson-Verteilung})$$

- Ist S eine $\mathcal{P}(\lambda)$ -verteilte Zufallsvariable auf (Ω, \mathcal{A}, P) , unabhängig von einer weiteren Familie $\mathbf{Z}_k = (Z_{k1}, \dots, Z_{kn})$, $k \in \mathbb{N}$ stochastisch unabhängiger, n -dimensionaler multinomialverteilter Zufallsvektoren mit $\sum_{i \in I} Z_{ki} = 1$ und $P(Z_{ki} = 1) = p_i := \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1 - P(Z_{ki} = 0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i \in I$, so sind die Zufallsvariablen

$$X_i := \sum_{k=1}^S Z_{ki} \quad \text{für } i \in I \text{ stochastisch unabhängig und jeweils } \mathcal{P}(\lambda_i)\text{-verteilt}$$

(Zerlegungsstabilität der Poisson-Verteilung).

I. Punktprozess-Modelle

Beweis:

- a) Unter Verwendung der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Abschnitt II.4, speziell Satz 33 d)) erhält man

$$\varphi_S(t) = \prod_{i \in I} \varphi_{X_i}(t) = \prod_{i \in I} \exp(\lambda_i(t-1)) = \exp\left(\sum_{i \in I} \lambda_i(t-1)\right) = \exp(\lambda(t-1)) \text{ für alle } t \in \mathbb{R},$$

Womit wegen der Eindeutigkeit der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion die Aussage bewiesen ist (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Abschnitt II.5).

- b) Für $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}^+$ mit $\sum_{i \in I} j_i = K$ gilt nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und der Ersetzungsformel für bedingte Wahrscheinlichkeiten (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Abschnitt II.8, Satz 49)

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i = j_i\}\right) &= P\left(\bigcap_{i \in I} \left\{\sum_{k=1}^S Z_{ki} = j_i\right\}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} P\left(\bigcap_{i \in I} \left\{\sum_{k=1}^m Z_{ki} = j_i\right\}\right) \cdot P(S = m) \\ &= P(S = K) \cdot \binom{K}{j_1, \dots, j_n} \prod_{i \in I} p_i^{j_i} = \exp(-\lambda K) \cdot \frac{\lambda^K}{K!} \cdot \frac{K!}{j_1! \cdots j_n! \lambda^K} \prod_{i \in I} \lambda_i^{j_i} \\ &= \exp\left(-K \sum_{i \in I} \lambda_i\right) \prod_{i \in I} \frac{\lambda_i^{j_i}}{j_i!} = \prod_{i \in I} \exp(-\lambda_i K) \frac{\lambda_i^{j_i}}{j_i!}, \end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist. ■

Bemerkung: Die Aussagen von Satz 2 lassen sich zum einen auf den Fall verallgemeinern, dass die λ_i lediglich nicht-negativ sind mit der Setzung $\mathcal{P}(0) = \varepsilon_0$ (Einpunktverteilung in Null); zum anderen bleibt die Aussage a) sinngemäß auch für unendliche (aber abzählbare) Indexmengen I richtig.

Wir kommen nun zu einem ersten *Darstellungssatz* für Poisson-Punktprozesse, und zwar zunächst für den Fall eines *endlichen* Intensitätsmaßes.

Satz 3: Es sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine unabhängige, identisch (wie X) verteilte Familie von Zufallselementen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten in dem Messraum $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$. $Q = P^X$ bezeichne die Verteilung von X . Ferner sei N eine von $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängige Poissonverteilte Zufallsvariable auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit Parameter $\lambda \geq 0$. Dann ist der durch

$$\xi := \sum_{n=1}^N \varepsilon_{X_n}$$

definierte Punktprozess ein *Poisson-Punktprozess* mit dem Intensitätsmaß $\mu = \lambda \cdot Q$. (Man sagt auch, ξ sei ein Poisson-Punktprozess mit den *Parametern* λ und Q .)

I. Punktprozess-Modelle

Ist umgekehrt μ ein beliebiges, endliches Maß auf \mathcal{B} , welches ein vom Nullmaß verschiedenes Intensitätsmaß eines Punktprozesses ξ ist, und ist der Grundraum (Ω, \mathcal{A}, P) genügend „groß“ (d.h. er erlaubt die Existenz beliebig vieler stochastisch unabhängiger Ereignisse), so wird durch

$$\xi^* := \sum_{n=1}^N \varepsilon_{X_n}$$

mit N und $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wie oben für $Q = \frac{1}{\lambda} \mu$ ein Poisson-Punktprozess definiert, der dieselbe Verteilung wie ξ besitzt (und daher stochastisch nicht von ξ „unterscheidbar“ ist). ξ^* heißt deshalb auch *Repräsentant* von ξ .

Zwischenbemerkungen:

- Für den Fall $N \equiv 0$ (d.h. $\lambda = E(N) = 0$) wird ξ auf Grund der dann leeren Summe zum *Nullmaß*. Ist umgekehrt das Intensitätsmaß μ vom Nullmaß verschieden, so ist zwingend $\lambda = E(N) > 0$. Daher ist Q in diesem Fall wohldefiniert.
- ξ ist definitionsgemäß ein zufälliges Maß, denn für beliebiges $B \in \mathcal{B}$ sind alle Abbildungen

$$\xi(B) = \sum_{n=1}^N \varepsilon_{X_n}(B) = \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_B(X_n)$$

\mathcal{A} -messbar.

Beweis:

" \Rightarrow ": Wir zeigen, dass das konstruierte ξ die Eigenschaften a) und b) der Definition 4 erfüllt:

- a) Für jedes $B \in \mathcal{B}$ ist $\varepsilon_{X_n}(B) = \mathbb{1}_B(X_n)$ ersichtlich $B(1, p)$ -binomialverteilt mit Parameter $p = P(X \in B) = Q(B)$. Die Aussage folgt nun aus Satz 2 b).
- b) Folgt aus Satz 2b) zunächst für beliebige *endliche* Indexmengen $I = \{1, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$ mit $N = S$ und $Z_{ki} = \mathbb{1}_{B_i}(X_k)$ (wobei noch $B_m = \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} B_i\right)^c$ zu setzen ist) und damit gemäß der Definition der stochastischen Unabhängigkeit auch allgemein.

Ferner gilt für jedes $B \in \mathcal{B}$:

$$E\xi(B) = E\left(\sum_{n=1}^N \varepsilon_{X_n}(B)\right) = E\left(\sum_{n=1}^N \mathbb{1}_B(X_n)\right) = E(N) \cdot Q(B) = \lambda \cdot Q(B),$$

womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

" \Leftarrow ": Klar nach der ersten Bemerkung zu Definition 4, weil voraussetzungsgemäß $Q = \frac{1}{\lambda} \mu$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{B} ist. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Bemerkungen:

- Ein Poisson-Punktprozess mit endlichem Intensitätsmaß μ kann offenbar als zufällige Mischung von Einpunkt-Prozessen nach einer Poisson-Verteilung aufgefasst werden.
- Ist die Verteilung Q der Ausgangs-„Punkte“ $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ atomlos in dem Sinne, dass $\{x\} \in \mathcal{B}$ gilt für alle $x \in \mathcal{X}$ mit $Q(\{x\}) = 0$, so ist auch die Verteilung P^ξ des Poisson-Punktprozesses atomlos. Insbesondere gilt dann $P(\xi = \mu) = 0$ für alle nicht-trivialen Maße $\mu \in \mathcal{M}$. Eine „Visualisierung“ des Poisson-Punktprozesses (z.B. im Fall $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ mit $d = 1, 2, 3$) erfolgt dann üblicherweise durch Plotten der zufälligen „Punkt“-Menge Γ . Punktprozesse dieser Art heißen auch *einfach*.
- Ein Poisson-Punktprozess mit Parametern λ und atomloser Verteilung Q kann auch mit der zufälligen (fast sicher endlichen) „Punkt“-Menge $\Gamma = \{X_1, \dots, X_N\}$ identifiziert werden (mit $\Gamma = \emptyset$ für $N = 0$). Im Sinne der Maßtheorie ist das eine so genannte „zufällige abgeschlossene Menge“ (ZAM), deren Theorie wir später noch ausführlicher behandeln werden.
- Ist die Verteilung Q der Ausgangs-„Punkte“ $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rein diskret, d.h. gibt es eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{D} \in \mathcal{B}$ mit $Q(\mathcal{D}) = 1$, so ist auch die Verteilung P^ξ des Poisson-Punktprozesses rein diskret. In diesem Fall ist $P(\xi = \mu) > 0$ für gewisse Maße $\mu \in \mathcal{M}$. Beispiel: $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ mit $d \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{D} = \{\mathbf{0}\}$. Hier gilt $\xi = N \cdot \varepsilon_0$ und somit $P(\xi = \varepsilon_0) = P(N = 1) = \lambda \cdot e^{-\lambda} > 0$, falls $\lambda > 0$. Die Visualisierung eines solchen Poisson-Punktprozesses geschieht dann üblicherweise durch Plotten der zufälligen „Punkt“-Menge Γ unter Anbringung einer „Marke“, die die Vielfachheit der jeweiligen Realisation bezeichnet.
- Ein Poisson-Punktprozess ξ mit Parametern λ und Q ist faktisch ein *Zählprozess* in dem Sinne, dass die Größe $\xi(B) = \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_B(X_n)$ für $B \in \mathcal{B}$ „zählt“, wie viele „Punkte“ in die Menge B fallen.

Satz 4: Es seien ξ_1 und ξ_2 stochastisch unabhängige Poisson-Punktprozesse mit Parametern λ_i und Q_i , $i = 1, 2$. Dann ist $\xi = \xi_1 + \xi_2$ ein Poisson-Punktprozess mit Parametern $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2$ und $Q := \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} Q_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} Q_2$ (Überlagerungseigenschaft).

Ist umgekehrt ξ ein Poisson-Punktprozess mit Parametern λ und Q und sind λ_1 und λ_2 zwei nicht-negative reelle Zahlen mit $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$, so existieren zwei stochastisch unabhängige Poisson-Punktprozesse ξ_1 und ξ_2 mit Parametern λ_i und $Q_i = Q$, $i = 1, 2$, so dass $\xi = \xi_1 + \xi_2$ gilt (Teilungseigenschaft).

I. Punktprozess-Modelle

Beweis: " \Rightarrow ": Wir zeigen, dass $\xi = \xi_1 + \xi_2$ die Eigenschaften a) und b) aus Definition 4 erfüllt:

Zu a): Für jedes $B \in \mathcal{B}$ ist $\xi(B) = \xi_1(B) + \xi_2(B)$ die Summe unabhängiger, Poisson-verteilter Zufallsvariablen, ist also ebenfalls Poisson-verteilt nach Satz 2 a) mit der Summe der Parameter, d.h. $\lambda_1 \cdot Q_1(B) + \lambda_2 \cdot Q_2(B) = \lambda \cdot Q(B)$.

Zu b): Folgt mit Lemma 5 aus der Tatsache, dass mit $\{\xi_1(B_i)\}_{i \in I}$ und $\{\xi_2(B_i)\}_{i \in I}$ auch die Familie $\{\xi_1(B_i) + \xi_2(B_i)\}_{i \in I}$ stochastisch unabhängig ist.

" \Leftarrow ": Es sei $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge $B(1, p)$ -verteilter Zufallsvariablen mit $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$,

unabhängig von N und $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ für $\xi = \sum_{n=1}^N \varepsilon_{X_n}$. Setze $\xi_1 := \sum_{n=1}^N J_n \cdot \varepsilon_{X_n}$, $\xi_2 := \sum_{n=1}^N (1 - J_n) \cdot \varepsilon_{X_n}$ und

$\xi_3 := \sum_{n=1}^N (1 - \varepsilon_{X_n})$. Dann sind $\xi_1(B)$, $\xi_2(B)$ und $\xi_3(B)$ stochastisch unabhängig und jeweils Poisson-verteilte Zufallsvariablen für jedes $B \in \mathcal{B}$ nach Satz 2 b), denn es gilt $\xi_1(B) = \sum_{n=1}^N J_n \cdot \mathbb{1}_B(X_n)$,

$\xi_2(B) = \sum_{n=1}^N (1 - J_n) \cdot \mathbb{1}_B(X_n)$ und $\xi_3(B) = \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{B^c}(X_n)$ mit den stochastisch unabhängigen multinomialverteilten Zufallsvektoren $(Z_{n1}, Z_{n2}, Z_{n3}) = (J_n \cdot \mathbb{1}_B(X_n), (1 - J_n) \cdot \mathbb{1}_B(X_n), \mathbb{1}_{B^c}(X_n))$ für $n \in \mathbb{N}$.

Damit sind aber ξ_1 und ξ_2 stochastisch unabhängige Poisson-Punktprozesse, die dieselbe Verteilung besitzen wie die Poisson-Punktprozesse ξ_1^* und ξ_2^* mit $\xi_1^* := \sum_{n=1}^{N_1} \varepsilon_{X_n}$ und $\xi_2^* := \sum_{n=1}^{N_2} \varepsilon_{X_n}$ mit stochastisch unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen N_1 und N_2 mit den Parametern $\lambda_1 = p\lambda$ und $\lambda_2 = (1 - p)\lambda$. Die Parameter von ξ_1 und ξ_2 bzw. ξ_1^* und ξ_2^* sind also gegeben durch λ_i und $Q_i = Q$, $i = 1, 2$, und es gilt $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Bemerkungen:

Bemerkungen:

- Satz 4 kann offensichtlich sofort auf *endlich viele* Überlagerungen bzw. Teilungen verallgemeinert werden. Interessant ist hierbei, dass auch die unabhängige Überlagerung *völlig unterschiedlicher* Poisson-Punktprozesse wieder zu einem Poisson-Punktprozess führt.
- Der Beweis von Satz 4 zeigt, dass die Darstellung eines Poisson-Punktprozesses nicht unbedingt eindeutig ist. So sind etwa ξ_1 und ξ_1^* zwei solche Punktprozesse mit derselben Verteilung, aber ihre Darstellung ist unterschiedlich.
- Man kann sich die Teilungseigenschaft von Poisson-Punktprozessen anhand von *Färbungen* anschaulich klar machen: Färbt man die realisierten „Punkte“ eines Poisson-Punktprozesses unabhängig von ihrer Position und Anzahl mit Wahrscheinlichkeit p rot und mit komplementärer Wahrscheinlichkeit $1 - p$ blau, so erhält man zwei neue, stochastisch unabhängige Poisson-Punktprozesse mit den Parametern $p\lambda$ für den roten und $(1 - p)\lambda$ für den blauen Punktprozess.

I. Punktprozess-Modelle

Der letzte Satz 4 ist der Ausgangspunkt für einen zweiten Konstruktionsschritt noch allgemeinerer Poisson-Punktprozesse mit σ -endlichen Intensitätsmaßen. Sei dazu μ ein positives σ -endliches Maß auf \mathcal{B} . Dann existiert eine (höchstens abzählbare) disjunkte (messbare) Zerlegung $\mathfrak{X} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{X}_i$ mit $0 < \mu(\mathfrak{X}_i) < \infty$. Setzt man $\mu_i := \mu(\cdot \cap \mathfrak{X}_i)$ für alle $i \in I$ [Spurmaß], so ist jedes μ_i ein positives endliches Maß auf \mathcal{B} . Nach Satz 3 existiert dann ein Poisson-Punktprozess ξ_i , der μ_i als Intensitätsmaß besitzt. O.B.d.A. können alle Poisson-Punktprozesse ξ_i für $i \in I$ als voneinander stochastisch unabhängig angesehen werden (sofern der Grundraum (Ω, \mathcal{A}, P) genügend „groß“ ist). Es ist nahe liegend (und auch zielführend), einen allgemeinen Poisson-Punktprozess ξ als unabhängige Überlagerung aller ξ_i zu definieren: $\xi := \sum_{i \in I} \xi_i$. Dieser Punktprozess ist offenbar ein zufälliges Maß und besitzt μ als Intensitätsmaß.

Satz 5: Der im vorigen Absatz konstruierte Punktprozess $\xi := \sum_{i \in I} \xi_i$ ist in Bezug auf seine Verteilung wohldefiniert und ist die Realisierung eines Poisson-Punktprozesses mit Intensitätsmaß μ .

Beweis: Im ersten Schritt ist nur zu zeigen, dass die Art der Zerlegung $\mathfrak{X} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{X}_i$ die Verteilung von ξ invariant lässt. Dazu genügt es, nachzuweisen, dass für jedes $B \in \mathcal{B}$ die Zufallsvariable $\xi(B)$ Poisson-verteilt ist mit einem eindeutig bestimmten (nur von B abhängigen) Parameter. Sei also $\mathfrak{X} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{Y}_j$ eine zweite disjunkte (messbare) Zerlegung von \mathfrak{X} in höchstens abzählbar viele disjunkte Teilmengen mit $0 < \mu(\mathfrak{Y}_j) < \infty$. $\zeta = \sum_{j \in J} \zeta_j$ sei die analoge Konstruktion des Punktprozesses mit den endlichen Intensitätsmaßen $\nu_j := \mu(\cdot \cap \mathfrak{Y}_j)$ für alle $j \in J$. $\mathfrak{X} = \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{Y}_j$ ist eine weitere, feinere disjunkte (messbare) Zerlegung von \mathfrak{X} . Wir betrachten nun eine unabhängige Familie $\{\tau_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$ von Poisson-Punktprozessen mit den endlichen Intensitätsmaßen $\mu_{ij} := \mu(\cdot \cap \mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{Y}_j)$. Dann sind $\xi_i := \sum_{j \in J} \tau_{ij}$ und $\zeta_j := \sum_{i \in I} \tau_{ij}$ Repräsentanten mit endlichen Intensitätsmaßen für die Poisson-Punktprozesse, die zur Konstruktion von $\xi = \sum_{i \in I} \xi_i$ und $\zeta = \sum_{j \in J} \zeta_j$ verwendet werden können. Nach Satz 2 folgt, dass für jedes $B \in \mathcal{B}$ die Zufallsvariablen $\xi(B)$ und $\zeta(B)$ jeweils Poisson-verteilt sind mit den Parametern

$$E\xi(B) = \sum_{i \in I} E\xi_i(B) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} E\tau_{ij}(B) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \mu(B \cap \mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{Y}_j) = \mu(B)$$

und

$$E\zeta(B) = \sum_{j \in J} E\zeta_j(B) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} E\tau_{ij}(B) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \mu(B \cap \mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{Y}_j) = \mu(B).$$

I. Punktprozess-Modelle

Damit ist die Verteilung von ξ unabhängig von der Zerlegung des Raums \mathfrak{X} , und der Beweisgang zeigt zugleich die Gültigkeit der Eigenschaft in Definition 4 a).

Teil b) ergibt sich aus der analogen Eigenschaft der Poisson-Punktprozesse $\xi_i = \sum_{j \in I} \tau_{ij}$, $i \in I$. ■

Analog zu Definition 4 nennen wir „den“ Punktprozess ξ wieder *Poisson-Punktprozess* mit dem (σ -endlichen) Intensitätsmaß μ .

Bemerkung: Ist μ ein beliebiges σ -endliches Intensitätsmaß, so existiert immer ein Poisson-Punktprozess ξ , der μ als Intensitätsmaß besitzt, d.h. mit der Eigenschaft $\mu = E\xi$. Eine kanonische Konstruktion für ξ ist folgendermaßen möglich:

Es sei $\mathfrak{X} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{X}_i$ eine disjunkte (messbare) Zerlegung von \mathfrak{X} mit $0 < \mu(\mathfrak{X}_i) < \infty$ und $\mu_i := \mu(\cdot \cap \mathfrak{X}_i)$ für alle $i \in I$. Sei ferner $\lambda_i = \mu(\mathfrak{X}_i)$ und $Q_i = \frac{1}{\lambda_i} \mu_i$ für alle $i \in I$. Die Zufallsvariablen $\{N_i\}_{i \in I}$ und die Zufallselemente $\{X_{in}\}_{(i,n) \in I \times \mathbb{N}}$ (mit Werten in \mathfrak{X}) seien gemeinsam stochastisch unabhängig, wobei die N_i jeweils $\mathcal{P}(\lambda_i)$ -verteilt seien und die X_{in} für alle $n \in \mathbb{N}$ die Verteilung Q_i besitzen mögen, für alle $i \in I$. Dann ist

$$\xi = \sum_{i \in I} \sum_{n=1}^{N_i} \varepsilon_{X_{in}}$$

ein Repräsentant des Poisson-Punktprozesses ξ mit dem Intensitätsmaß μ .

Für den allgemeinen Poisson-Punktprozess bleiben die in Satz 4 formulierten Eigenschaften sinngemäß bestehen. Wir formulieren hier nur das Ergebnis (ohne Beweis; er kann direkt auf Satz 4 zurückgeführt werden).

Satz 6: Es seien ξ_1 und ξ_2 stochastisch unabhängige Poisson-Punktprozesse mit σ -endlichen Intensitätsmaßen μ_i , $i = 1, 2$. Dann ist $\xi = \xi_1 + \xi_2$ ein Poisson-Punktprozess mit σ -endlichem Intensitätsmaß $\mu = \mu_1 + \mu_2$ (Überlagerungseigenschaft).

Ist umgekehrt ξ ein Poisson-Punktprozess mit σ -endlichem Intensitätsmaß μ und sind μ_1 und μ_2 zwei σ -endliche Maße mit $\mu_1 + \mu_2 = \mu$, so existieren zwei stochastisch unabhängige Poisson-Punktprozesse ξ_1 und ξ_2 mit den Intensitätsmaßen μ_1 und μ_2 , so dass $\xi = \xi_1 + \xi_2$ gilt (Teilungseigenschaft).

Bemerkungen:

- Jeder allgemeine Poisson-Punktprozess ξ mit σ -endlichem Intensitätsmaß μ kann lokal (d.h. bei Einschränkung auf eine Teilmenge $B \in \mathcal{B}$ endlichen Maßes $\mu(B) < \infty$) vermöge $\xi(\cdot \cap B)$ kanonisch als einfacher Poisson-Punktprozess im Sinne von Satz 3 dargestellt werden.
- Im Gegensatz zu den endlichen Poisson-Punktprozessen im Sinne des Satzes 3 können bei allgemeinen Poisson-Punktprozessen mit σ -endlichem Intensitätsmaß μ Punkthäufungen auftreten; in diesem Fall kann der Poisson-Punktprozess u.U. nicht mehr mit einer zufälligen abgeschlossenen Menge identifiziert werden. Beispiel: $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $\mathcal{X}_0 = (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$, $\mathcal{X}_i = \left(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i} \right]$ für $i \in I = \mathbb{Z}^+$ mit dem Intensitätsmaß μ mit der Lebesgue-Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier gilt $\mu(\mathcal{X}_i) = \int_{1/(i+1)}^{1/i} \frac{1}{x} dx = \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$, aber $E\xi((0, b]) = \int_0^b \frac{1}{x} dx = \infty$ für

alle $b > 0$ (der Nullpunkt ist ein Häufungspunkt des Punktprozesses). Jede „Realisierung“ des Punktprozesses ist damit fast sicher *keine* abgeschlossene Menge, denn 0 ist fast sicher kein möglicher „Punkt“ des Prozesses.

Satz 7: Es sei ξ ein Poisson-Punktprozess mit Intensitätsmaß μ . $C \in \mathcal{B}$ sei fest. Dann ist das zufällige Maß $\xi_C = \xi(\cdot \cap C)$ ebenfalls ein Poisson-Punktprozess mit dem Intensitätsmaß $\mu_C = \mu(\cdot \cap C)$.

Beweis: Zunächst ist $\xi_C(B) = \xi(B \cap C)$ Poisson-verteilt mit Parameter $E\xi(B \cap C) = \mu(B \cap C)$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Damit ist die Eigenschaft a) von Definition 4 erfüllt. Die Eigenschaft b) ist ebenfalls erfüllt, denn mit jeder Familie $\{B_i\}_{i \in I}$ disjunkter Mengen aus \mathcal{B} ist auch die Familie $\{B_i \cap C\}_{i \in I}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen aus \mathcal{B} , so dass die Zufallsvariablen $\{\xi(B_i \cap C)\}_{i \in I}$ voraussetzungsgemäß stochastisch unabhängig sind. Der Satz ist damit bewiesen. ■

Bemerkung: Satz 7 besagt anschaulich, dass die „Einschränkung“ eines Poisson-Punktprozesses auf eine feste Menge $C \in \mathcal{B}$ wieder zu einem Poisson-Prozess führt mit dem Spurmaß als neuem Intensitätsmaß. Eine verwandte Aussage beinhaltet der folgende Satz.

Satz 8: Es sei ξ ein Poisson-Punktprozess mit σ -endlichem Intensitätsmaß μ auf dem Produkt-raum $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$. $C \in \mathcal{B}_2$ sei fest. Dann ist das zufällige Maß $\xi^C := \xi(\cdot \times C)$ wieder ein Poisson-Punktprozess [über $(\mathcal{X}_1, \mathcal{B}_1)$] mit dem σ -endlichen Intensitätsmaß $\mu^C = \mu(\cdot \times C)$.

I. Punktprozess-Modelle

Beweis: Zunächst ist wieder $\xi^C(B) = \xi(B \times C)$ Poisson-verteilt mit Parameter $E\xi(B \times C) = \mu(B \times C)$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Damit ist die Eigenschaft a) von Definition 4 erfüllt. Die Eigenschaft b) ist ebenfalls erfüllt, denn mit jeder Familie $\{B_i\}_{i \in I}$ disjunkter Mengen aus \mathcal{B}_1 ist auch die Familie $\{B_i \times C\}_{i \in I}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen aus \mathcal{B} , so dass die Zufallsvariablen $\{\xi(B_i \times C)\}_{i \in I}$ voraussetzungsgemäß stochastisch unabhängig sind. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Bemerkungen:

- Im speziellen Fall, dass $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ ein Produktmaß auf $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ ist, gilt noch $\mu^C = \mu_1 \otimes \mu_2(\cdot \times C) = \mu_2(C) \cdot \mu_1$.
- Anschaulich bedeutet Satz 8, dass sich auch nach einer Projektion der „Punkte“ des Poisson-Punktprozesses auf einen niedriger dimensionalen Teilraum wieder ein Poisson-Punktprozess ergibt.

I.3. Der homogene Poisson-Punktprozess

Definition 5: Im Fall $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{B} = \mathcal{B}^d$ (Borel'sche σ -Algebra) mit $\mu = \lambda \cdot m^d$, $\lambda > 0$ (m^d : Lebesgue-Maß), $d \in \mathbb{N}$ heißt der Poisson-Punktprozess ξ mit dem Intensitätsmaß μ *homogener* Poisson-Punktprozess (oder kürzer: homogener Poisson-Prozess) mit Parameter λ (über \mathbb{R}^d).

Bemerkungen:

- Der homogene Poisson-Prozess kann als Repräsentant einer stetigen „Gleichverteilung“ über $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^d$ aufgefasst werden, weil nach der obigen kanonischen Konstruktion die in eine beliebige Menge $B \in \mathcal{B}^d$ positiven Lebesgue-Maßes fallenden (zufällig vielen) „Punkte“ einer stetigen Gleichverteilung über B genügen. Der Parameter λ steuert dabei, wie „dicht“ die Punkte liegen.
- Überlagerungen und Aufteilungen von homogenen Poisson-Prozessen (im Sinne von Satz 6) führen wieder auf homogene Poisson-Prozesse.

Satz 9: Es sei ξ ein d -dimensionaler, homogener Poisson-Punktprozess mit Parameter $\lambda > 0$ ($d \in \mathbb{N}$). Die der Größe nach sortierten Entfernungen $R_{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$ der „Punkte“ vom Nullpunkt sind dann gegeben durch

$$R_{(i)} := \inf \{r \geq 0 \mid \xi(K(r)) \geq i\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Dabei bezeichne $K(r)$ die abgeschlossene Kugel mit Radius $r > 0$ um den Nullpunkt in \mathbb{R}^d .

Es gilt:

I. Punktprozess-Modelle

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt der Zufallsvektor $\mathbf{R}_n = (R_{(1)}, \dots, R_{(n)})$ die Dichte

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} (\lambda v_d)^n \exp(-\lambda v_d x_n^d) \prod_{i=1}^n x_i^{d-1} & \text{für } 0 < x_1 < \dots < x_n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $v_d := \frac{2\sqrt{\pi^d}}{d \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$ das d -dimensionale Volumen $m^d(K(1))$ der Einheitskugel.

b) Die Zufallsvariablen $R_{(1)}^d, R_{(2)}^d - R_{(1)}^d, \dots, R_{(n)}^d - R_{(n-1)}^d$ sind stochastisch unabhängig und jeweils $\mathcal{E}(\lambda v_d)$ -exponentialverteilt.

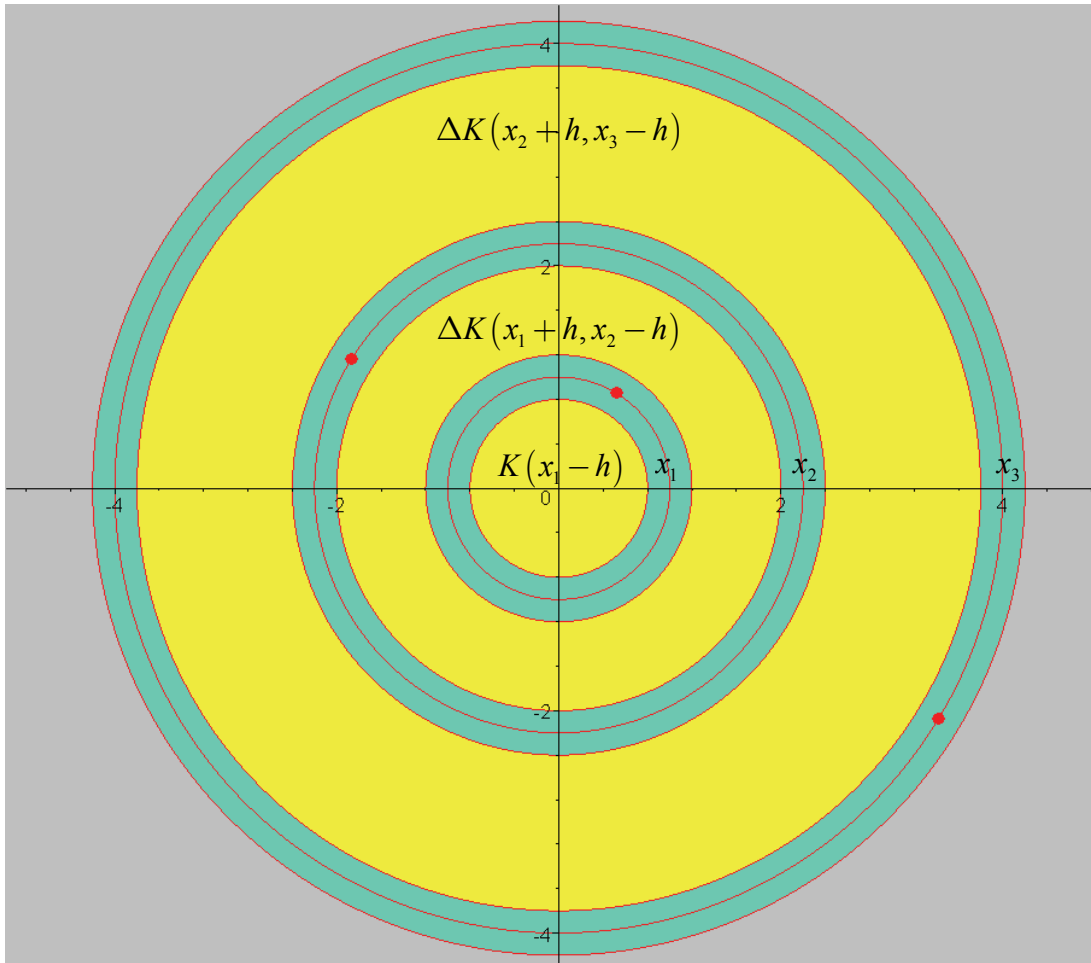
Beweis: Im Folgenden bezeichne $\Delta K(u, v) := K(v) \setminus K(u)$ für $0 < u < v$ den Kreisring mit den Begrenzungsradien u und v . Sei nun $0 =: x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Es gilt dann für genügend kleine $h > 0$, speziell für $h < \frac{1}{2} \min\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$:

$$\begin{aligned} & P\left(\bigcap_{i=1}^n \{R_{(i)} \in (x_i - h, x_i + h)\}\right) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \{\xi(\Delta K(x_i - h, x_i + h)) = 1\} \cap \bigcap_{j=2}^n \{\xi(\Delta K(x_{j-1} + h, x_j - h)) = 0\} \cap \{\xi(K(x_1 - h)) = 0\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n (\lambda a_i) e^{-\lambda a_i} \cdot \prod_{j=1}^n e^{-\lambda b_j} = \left(\prod_{i=1}^n (\lambda a_i)\right) \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n a_i - \lambda \sum_{j=1}^n b_j\right) = \left(\prod_{i=1}^n (\lambda a_i)\right) \exp(-\lambda v_d (x_n + h)^d) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a_i &:= m^d(\Delta K(x_i - h, x_i + h)) = v_d \left((x_i + h)^d - (x_i - h)^d \right) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n, \\ b_j &:= m^d(\Delta K(x_{j-1} + h, x_j - h)) = v_d \left((x_j - h)^d - (x_{j-1} + h)^d \right) \quad \text{für } 2 \leq j \leq n \quad \text{und} \\ b_1 &:= m^d(K(x_1 - h)) = v_d (x_1 - h)^d. \end{aligned}$$

I. Punktprozess-Modelle



Veranschaulichung für $d = 2$; $\Delta K(x_i - h, x_i + h)$ in türkis, $\Delta K(x_{j-1} + h, x_j - h)$ in gelb

Es gilt nun:

$$\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{(2h)^n} = v_d^n \prod_{i=1}^n \frac{(x_i + h)^d - (x_i - h)^d}{2h} \rightarrow v_d^n \prod_{i=1}^n (d x_i^{d-1}) \quad \text{für } h \downarrow 0,$$

woraus mit dem Mittelwertsatz für mehrfache Riemann-Integrale die Behauptung von Teil a) folgt.

Hieraus ergibt sich: der Zufallsvektor $\mathbf{S}_n = (R_{(1)}^d, \dots, R_{(n)}^d)$ besitzt die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{S}_n}(z_1, \dots, z_n) &= P(R_{(1)}^d \leq z_1, \dots, R_{(n)}^d \leq z_n) \\ &= P(R_{(1)} \leq z_1^{1/d}, \dots, R_{(n)} \leq z_n^{1/d}) = F_{\mathbf{R}_n}(z_1^{1/d}, \dots, z_n^{1/d}) \end{aligned}$$

und somit die Dichte

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{S}_n}(z_1, \dots, z_n) &= \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} F_{\mathbf{S}_n}(z_1, \dots, z_n) = \frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} F_{\mathbf{R}_n}(z_1^{1/d}, \dots, z_n^{1/d}) \\ &= f_{\mathbf{R}_n}(z_1^{1/d}, \dots, z_n^{1/d}) \cdot \frac{1}{d^n} \prod_{i=1}^n z_i^{1/d-1} = (\lambda v_d)^n \exp(-\lambda v_d z_n) \end{aligned}$$

I. Punktprozess-Modelle

für $0 < z_1 < \dots < z_n$. Mit dem Transformationssatz für Mehrfachintegrale ergibt sich hieraus für die Dichte von $\mathbf{D}_n := (R_{(1)}^d, R_{(2)}^d - R_{(1)}^d, \dots, R_{(n)}^d - R_{(n-1)}^d)$ der Ausdruck

$$f_{\mathbf{D}_n}(s_1, \dots, s_n) = f_{\mathbf{S}_n}\left(s_1, s_1 + s_2, \dots, \sum_{i=1}^n s_i\right) = (\lambda \nu_d)^n \exp\left(-\lambda \nu_d \sum_{i=1}^n s_i\right) = \prod_{i=1}^n [(\lambda \nu_d) \exp(-\lambda \nu_d s_i)]$$

für $s_1, \dots, s_n > 0$, woraus Teil b) folgt. ■

Bemerkungen:

- Die Verteilung(sfunktion) von $R_{(1)}$ wird *sphärische Kontaktverteilung(sfunktion)* genannt, auch bei allgemeineren Punktprozessen. Für einen Poisson-Punktprozess ξ mit beliebigem σ -endlichem Intensitätsmaß μ erhält man beispielsweise

$$P(R_{(1)} > r) = P(\xi(K(r)) = 0) = \exp(-\mu(K(r))) \text{ für } r \geq 0.$$

- Die oben erwähnte alternative Konstruktion (\rightarrow Simulation) eines homogenen Poisson-Prozesses beschreiben wir zunächst für den speziellen Fall $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^2$:

1. Schritt: Erzeuge eine Folge $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängiger, je $\mathcal{U}[0,1]$ -verteilter Zufallsvariablen (Standard-Zufallszahlen); setze

$$R_n := \sqrt{-\frac{1}{\lambda \pi} \ln\left(\prod_{i=1}^n Z_i\right)}.$$

Dies sind die sukzessiven Radien der Kreise, auf denen die „Punkte“ liegen.

2. Schritt: Erzeuge eine weitere, von der ersten unabhängige Folge $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängiger, je $\mathcal{U}[0,1]$ -verteilter Zufallsvariablen; setze $\varphi_n := 2\pi V_n$. Dies sind die sukzessiven Winkel der „Punkte“ auf den Kreisen. Setze nun

$$X_n := R_n \begin{pmatrix} \cos \varphi_n \\ \sin \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Folge der „Punkte“ des Poisson-Prozesses.

Diese Konstruktion kann auf beliebige Dimensionen $d \in \mathbb{N}$ erweitert werden; dazu ist im ersten Schritt

$$R_n := \sqrt[d]{-\frac{1}{\lambda \nu_d} \ln\left(\prod_{i=1}^n Z_i\right)}$$

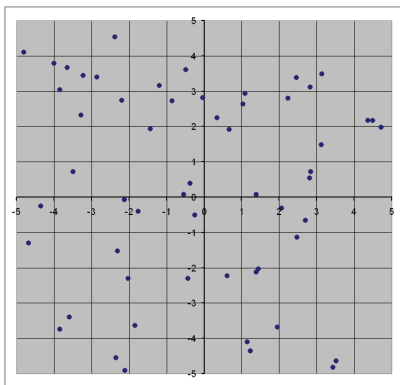
I. Punktprozess-Modelle

zu setzen (mit dem d -dimensionalen Volumen $\nu_d = m^d(K(\mathbf{1})) = \frac{2\sqrt{\pi^d}}{d\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$ der Einheitskugel),

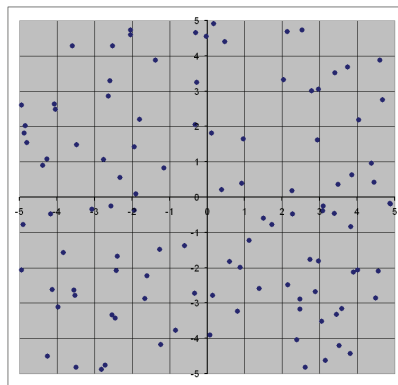
im zweiten Schritt müssen auf der d -dimensionalen Einheitskugel stetig gleichverteilte Zufallsvektoren erzeugt werden. Diese erhält man am einfachsten durch eine Normierung unabhängiger Zufallsvektoren \mathbf{V}_n mit einer multivariaten Normalverteilung $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ mit der Einheitsmatrix \mathbf{I} als Varianz-Kovarianzmatrix (d.h. alle Komponenten von \mathbf{V}_n sind unabhängig; vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Abschnitt II.9). Die „Punkte“ des Poisson-Prozesses erhält man dann vermöge

$$X_n := \frac{R_n}{\|\mathbf{V}_n\|} \mathbf{V}_n.$$

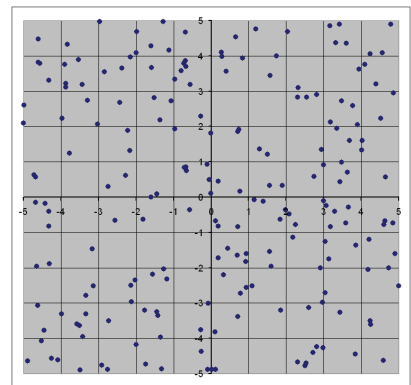
Die folgenden Graphiken zeigen entsprechende Simulationen eines zweidimensionalen homogenen Poisson-Prozesses mit EXCEL für verschiedene Parameter $\lambda > 0$:



$\lambda = 0,5$



$\lambda = 1$



$\lambda = 2$

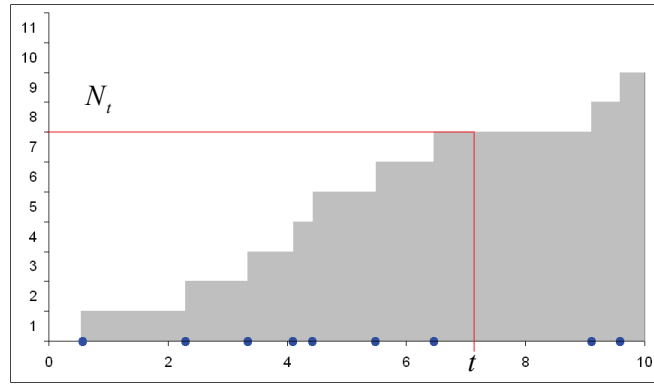
Bemerkung: Für den eindimensionalen Fall - genauer: $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^+$ - bedeutet die obige Konstruktion, dass die „Punkte“ X_n des Poisson-Prozesses linear angeordnet und ihre sukzessiven Abstände Y_n stochastisch unabhängige, identisch $\mathcal{E}(\lambda)$ -verteilte Zufallsvariablen sind. Es gilt also die vereinfachte Darstellung:

$$X_n = \sum_{i=1}^n Y_i \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wie schon oben erwähnt, wird in diesem (eindimensionalen) Fall meist der zugehörige („zeitstetige“) Zählprozess $\{N_t\}_{t \geq 0}$ anstatt des Punktprozesses ξ betrachtet, der formal definiert ist durch

$$N_t = \#\{n \in \mathbb{N} | X_n \leq t\} = \max\{n \in \mathbb{N} | X_n \leq t\} = \xi([0, t]) \text{ für } t \geq 0.$$

I. Punktprozess-Modelle



Simulation eines Poisson-Zählprozesses für $\lambda = 1$ mit EXCEL

Offensichtlich ist N_t wegen $E(N_t) = E\xi([0, t]) = \lambda \cdot m^1([0, t]) = \lambda t$ für jedes $t \geq 0$ $\mathcal{P}(\lambda t)$ -verteilt. Diesen Umstand kann man ausnützen, um auf elegante Weise Poisson-verteilte Zufallszahlen Y mit Parameter $t > 0$ zu erzeugen, denn ist $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine unabhängige Familie $\mathcal{U}[0, 1]$ -verteilter Zufallsvariablen, so leistet

$$Y := \inf \left\{ n \in \mathbb{Z}^+ \mid \prod_{i=1}^{n+1} Z_i < e^{-t} \right\}$$

das Verlangte. Es gilt nämlich für alle $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$Y = k \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{k+1} Z_i < e^{-t} \leq \prod_{i=1}^k Z_i \Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{k+1} \ln(Z_i) > t \geq -\sum_{i=1}^k \ln(Z_i) \Leftrightarrow \xi^*([0, t]) = k,$$

mit dem homogenen Poisson-Prozess ξ^* mit Parameter 1, der die „Punkte“ $X_n^* = -\sum_{i=1}^n \ln(Z_i)$, $n \in \mathbb{N}$ besitzt [beachte: $-\ln(Z_i)$ ist $\mathcal{E}(1)$ -exponentialverteilt für alle $i \in \mathbb{N}!$].

Damit eröffnet sich auch eine Möglichkeit, beliebige Poisson-Prozesse mit σ -endlichem Intensitätsmaß μ „direkt“ zu simulieren, indem man - vgl. die Bemerkung im Anschluss an Satz 5 - lokal auf \mathcal{X}_i zunächst jeweils eine Poisson-verteilte Zufallszahl $N_i = n_i$ mit Parameter $\lambda_i = \mu(\mathcal{X}_i)$ simuliert und anschließend n_i -viele unabhängige und identisch verteilte Replikationen der „Punkte“ nach der Verteilung $\mathcal{Q}_i = \frac{1}{\lambda_i} \mu(\cdot \cap \mathcal{X}_i)$.

Mit Hilfe eines homogenen Poisson-Prozesses lassen sich auch gewisse inhomogene Poisson-Punktprozesse über $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ mit $d \in \mathbb{N}$ erzeugen (simulieren), und zwar durch die so genannte *ortsabhängige Verdünnung*.

Satz 10: Es sei ξ ein $(d + 1)$ -dimensionaler homogener Poisson-Prozess über $(\mathbb{R}^{d+1}, \mathcal{B}^{d+1})$ mit Parameter 1 und μ ein (σ -endliches) Maß auf \mathcal{B}^d mit einer Dichte f bezgl. des Lebesgue-Maßes m^d für $d \in \mathbb{N}$. Ferner sei $C := \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid f(\mathbf{x}) \geq y \geq 0\}$. Dann ist das zufällige Maß $(\xi^{\mathbb{R}})_C$ ein inhomogener Poisson-Punktprozess über $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ mit Intensitätsmaß μ .

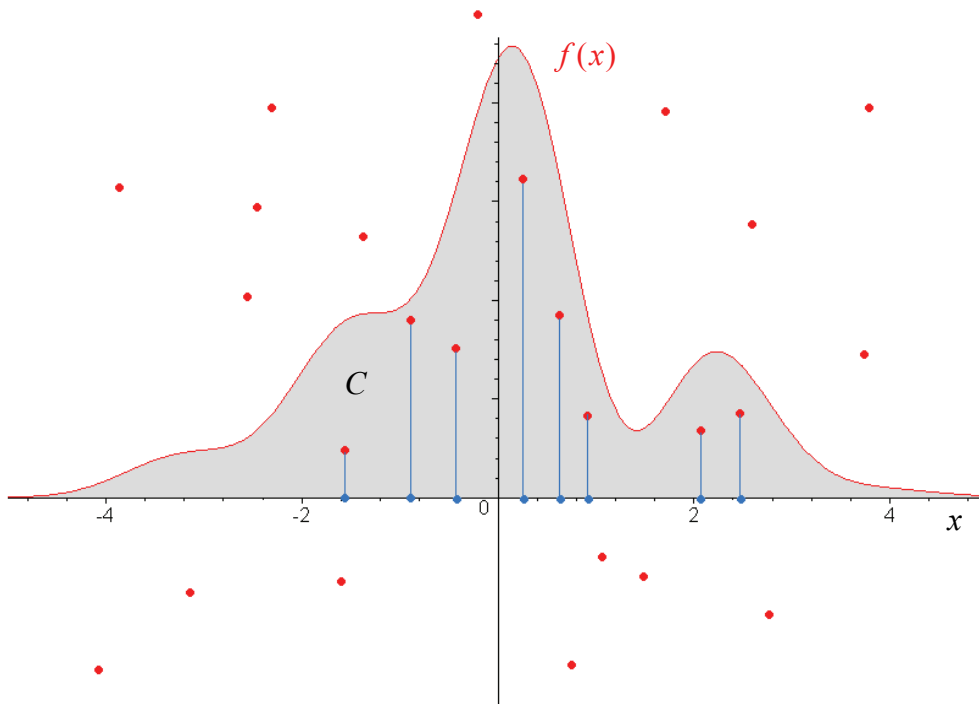
I. Punktprozess-Modelle

Beweis: Nach den Sätzen 7 und 8 ist klar, dass $(\xi^{\mathbb{R}})_C$ ein Poisson-Punktprozess ist. Für das Intensitätsmaß $E(\xi^{\mathbb{R}})_C$ ergibt sich weiter mit den Sätzen 7 und 8 für alle $B \in \mathcal{B}^d$:

$$E(\xi^{\mathbb{R}})_C(B) = \mathfrak{m}^{d+1}((B \times \mathbb{R}) \cap C) = \mathfrak{m}^{d+1}(\{(\mathbf{x}, y) \in B \times \mathbb{R} \mid f(\mathbf{x}) \geq y \geq 0\}) = \int_B f \, d\mathfrak{m}^d = \mu(B)$$

und damit die Behauptung. ■

Bemerkung: Satz 10 stellt in gewisser Weise eine Verallgemeinerung der *Verwerfungsmethode* zur Simulation von Zufallsvektoren über $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ mit einer absolut stetigen Verteilung dar. Wir veranschaulichen dies im Fall $d = 1$: Ist X eine reellwertige Zufallsvariable mit Dichte f und ξ ein zweidimensionaler homogener Poisson-Prozess mit Parameter 1, so wirkt der Übergang von ξ zu $(\xi^{\mathbb{R}})_C$ wie ein Filter:



In dieser Graphik stammen die roten Punkte aus einem zweidimensionalen homogenen Poisson-Prozess mit Parameter 1, die blauen aus dem transformierten Punkt-Prozess $(\xi^{\mathbb{R}})_C$. Wie man erkennt, folgt die „Dichtheit“ der blauen Punkte dem Verlauf der Dichte f . Im Gegensatz zum klassischen Verwerfungsverfahren, wo die Dichte f beschränkt sein muss, kann hier auf diese Voraussetzung verzichtet werden. Die „Punkte“ des Prozesses $(\xi^{\mathbb{R}})_C$ besitzen in jedem Fall die Verteilung mit der Dichte f , auch wenn diese lokal unbeschränkt ist.

Zur Beschleunigung des Verfahrens kann man sich ferner noch auf einen homogenen Poisson-Prozess ξ über $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \mathcal{B}^d \otimes \mathcal{B}^+)$ beschränken, da ja negative Koordinaten in der $(d + 1)$ -ten Dimension nicht berücksichtigt werden.

I. Punktprozess-Modelle

Der Name „ortsabhängige Verdünnung“ rührt daher, dass für den Fall, dass die Lebesgue-Dichte f des Intensitätsmaßes μ beschränkt ist (etwa mit $f(\mathbf{x}) \leq \lambda$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$), das obige Verfahren äquivalent ist zu folgendem Vorgehen:

- Erzeuge eine unabhängige Folge $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von über $[0, \lambda]$ stetig gleichverteilten Zufallsvariablen
- Unterziehe die „Punkte“ X_n eines von $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängigen, homogenen d -dimensionalen Poisson-Prozesses mit Parameter λ in voneinander unabhängiger Weise folgender sequentieller Überprüfung:
 - ist $f(X_n) \geq Y_n$, so „behalte“ den Punkt X_n
 - ist $f(X_n) < Y_n$, so „verwerfe“ den Punkt X_n .

Die verbleibenden „Punkte“ bilden dann den gewünschten inhomogenen Poisson-Punktprozess mit dem Intensitätsmaß μ mit der Lebesgue-Dichte f . Die Wahrscheinlichkeit des „Behaltens“ eines Punktes \mathbf{x} beträgt hier gerade $P(f(X_n) \geq Y_n | X_n = \mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{\lambda} \leq 1$ (vgl. D. STOYAN UND H. STOYAN (1992), Abschnitt 3.3.3).

I.4. Besonderheiten des homogenen Poisson-Punktprozesses

Einige der speziellen Eigenschaften des (mehrdimensionalen) Lebesgue-Maßes „vererben“ sich in natürlicher Weise auf einen homogenen Poisson-Prozess ξ mit Parameter $\lambda > 0$. So ist ξ z.B. *stationär* (translationsinvariant) und *isotrop* (drehungsinvariant), d.h. die Prozesse ξ_{+a} und ξ_{dr} mit

$$\xi_{+a}(B) = \xi(a + B) \text{ und } \xi_{dr}(B) = \xi(D(B)) \text{ für } B \in \mathcal{B}^d$$

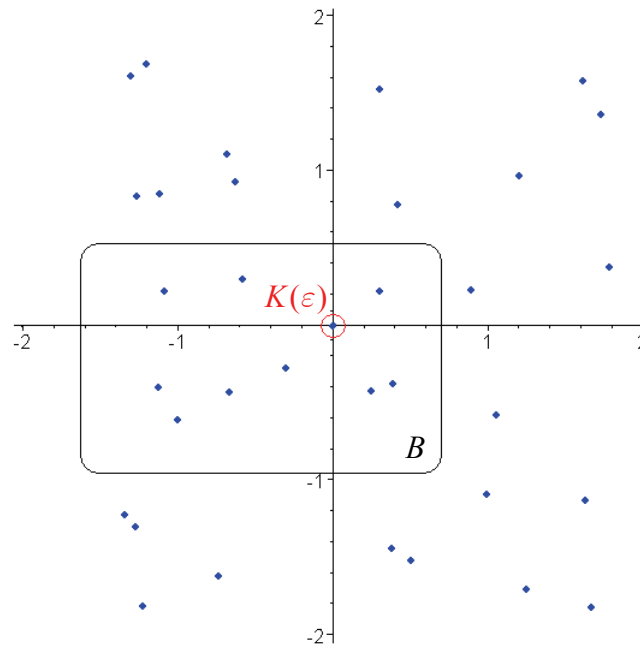
besitzen dieselbe Verteilung wie ξ , sind also ebenfalls homogene Poisson-Prozesse mit Parameter $\lambda > 0$. Hierbei ist $a \in \mathbb{R}^d$ und D eine Drehungsabbildung. Anders ausgedrückt: verschiebt man die „Punkte“ eines homogenen Poisson-Prozesses um den festen Vektor $a \in \mathbb{R}^d$ oder dreht man sie in eine beliebige Richtung, so lässt sich die neue Punktconfiguration statistisch nicht von einem homogenen Poisson-Prozess mit demselben Parameter unterscheiden. Noch anders ausgedrückt: die „Punkte“ in einem Beobachtungsfenster $B \in \mathcal{B}^d$ verhalten sich statistisch gleich für alle zueinander kongruenten Mengen B .

Eine weitere Besonderheit des homogenen Poisson-Prozesses ist die folgende: Fügt man den „Punkten“ des Prozesses den Nullpunkt $\mathbf{0}$ als Punkt hinzu, ergibt sich ein Punktmuster, das statistisch identisch ist mit jedem Punktmuster, das sich ergibt, wenn man die „Punkte“ des Prozesses gleichmäßig so verschiebt, dass einer von ihnen den Nullpunkt trifft (Satz von СЛИВНЯК (Slivnyak), vgl. STOYAN, KENDALL AND MECKE (1987), Section 4.4). In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie bedeutet dies exakter:

$$P^\xi(\bullet | \xi(\{\mathbf{0}\}) = 1) = P^{\xi + \varepsilon_0}.$$

I. Punktprozess-Modelle

Dies lässt sich folgendermaßen anschaulich motivieren:



Ist $\varepsilon > 0$ klein und $\mathbf{0} \in K(\varepsilon) \subseteq B \in \mathcal{B}$, so gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(\xi(B) = k | \xi(K(\varepsilon)) = 1) &= \frac{P(\{\xi(B) = k\} \cap \{\xi(K(\varepsilon)) = 1\})}{P(\xi(K(\varepsilon)) = 1)} = \frac{P(\{\xi(B \setminus K(\varepsilon)) = k - 1\} \cap \{\xi(K(\varepsilon)) = 1\})}{P(\xi(K(\varepsilon)) = 1)} \\ &= P(\{\xi(B \setminus K(\varepsilon)) = k - 1\}) \approx P(\{\xi(B) = k - 1\}) = P(\{\xi(B) + \varepsilon_0(B) = k\}), \end{aligned}$$

und für $K(\varepsilon) \cap B = \emptyset$ entsprechend

$$P(\xi(B) = k | \xi(K(\varepsilon)) = 1) = \frac{P(\{\xi(B) = k\} \cap \{\xi(K(\varepsilon)) = 1\})}{P(\xi(K(\varepsilon)) = 1)} = P(\{\xi(B) = k\}) = P(\{\xi(B) + \varepsilon_0(B) = k\}),$$

so dass nach Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ folgt (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Satz 47):

$$P(\xi(B) = k | \xi(\{\mathbf{0}\}) = 1) = P(\{\xi(B) + \varepsilon_0(B) = k\}) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}^d.$$

Bemerkung: Eine Konsequenz dieses Sachverhalts ist, dass bei einem homogenen Poisson-Prozess die Verteilung des Abstands eines beliebigen „Punktes“ zu seinem nächsten „Nachbarn“ dieselbe ist wie die Verteilung des kürzesten Abstands $R_{(1)}$ des Punktfeldes zum Nullpunkt, vgl. Satz 9.

Der Satz von Slivnyak erklärt Satz 9 damit auch noch einmal aus einer anderen Perspektive: Fügt man einem homogenen Poisson-Prozess den Nullpunkt hinzu und verschiebt das neue Punktmuster in zufälliger Richtung (gegeben durch einen Vektor, dessen Endpunkt auf der d -dimensionalen Einheitskugel stetig gleichverteilt ist) um einen zufälligen Betrag, der wie $R_{(1)}$ verteilt ist, so erhält man wieder einen homogenen Poisson-Prozess mit demselben Parameter. Durch wiederholte unab-

I. Punktprozess-Modelle

hängige unendliche Anwendung dieser Prozedur kann man also aus dem „Startpunkt“ $\mathbf{0}$ durch Verschieben und neues Einfügen der $\mathbf{0}$ einen homogenen Poisson-Prozess rekursiv konstruieren. Genau dies ist die Aussage des Satzes 9 bzw. des im Anschluss daran beschriebenen Konstruktionsverfahrens.

Hiermit verwandt ist das so genannte *Inspektions-Paradox*, das vor allem im eindimensionalen Fall bekannt geworden ist (es kann aber auch mehrdimensional formuliert werden). Wir verdeutlichen es an einem eindimensionalen homogenen Poisson-Prozess ξ mit Parameter $\lambda > 0$.



Sei dazu $a \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben („Inspektionszeitpunkt“). Die beiden roten Punkte bezeichnen diejenigen Punkte des Poisson-Prozesses, die den Punkt a in der Mitte einschließen. Dann ist die Länge des von diesen beiden Punkten begrenzten (zufälligen) Intervalls $\mathcal{E}(2, \lambda)$ -erlangverteilt und nicht $\mathcal{E}(\lambda)$ -exponentialverteilt, wie man vielleicht intuitiv erwarten würde (da die Abstände zweier benachbarter „Punkte“ eines homogenen Poisson-Prozesses nach dem ersten Teil der Bemerkung ja exponentialverteilt sind). Begründung: ähnlich wie bei der in Abschnitt 1.5 vorgestellten PCQ-Methode sind die beiden (jeweils wieder eingeschränkt homogenen) Prozesse $\xi_{(-\infty, a]}$ und $\xi_{(a, \infty]}$ stochastisch unabhängig, deshalb ist jeder der beiden Abstände der roten Begrenzungspunkte zu a $\mathcal{E}(\lambda)$ -exponentialverteilt und daher die Länge des a umfassenden Intervalls so verteilt wie die Summe zweier unabhängiger $\mathcal{E}(\lambda)$ -exponentialverteilter Zufallsvariablen, also $\mathcal{E}(2, \lambda)$ -erlangverteilt.

Es handelt sich hier deshalb nicht um ein Paradox, weil das den Punkt a einschließende Intervall eben nicht „zufällig“ aus dem Poisson-Prozess ausgewählt wird, sondern durch eine restriktive Bedingung (nämlich den Punkt a enthalten zu müssen). Die Verteilung der Intervalllänge ist also strenggenommen eine *bedingte Verteilung*.

Der Name *Inspektionsparadox* stammt aus der anschaulichen Vorstellung, dass zu einem festen Zeitpunkt a eine Inspektion z.B. eines Produktionsprozesses vorgenommen wird, der zu zufälligen Zeitpunkten, die durch einen homogenen Poisson-Prozess generiert werden, gestört wird. Die Verteilung der Länge des Intervalls zwischen denjenigen Störzeitpunkten, in dem die Inspektion liegt, ist dann eine andere als die der Länge des Intervalls zwischen zwei „beliebigen“ Störzeitpunkten.

Es sollte hier noch bemerkt werden, dass der Satz von Slivnyak und die damit verbundene Formel für die bedingte Verteilung des Poisson-Punktprozesses offensichtlich auch im nicht-homogenen Fall richtig ist, sofern

$$\lim_{\varepsilon \downarrow \infty} P(\{\xi(B \setminus K(\varepsilon)) = k - 1\}) = P(\{\xi(B) = k - 1\}) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

gilt, was zu

$$\lim_{\varepsilon \downarrow \infty} E\xi(K(\varepsilon)) = 0 \text{ bzw. } E\xi(\{\mathbf{0}\}) = 0$$

äquivalent ist. Ferner lässt sich die Aussage offenbar sofort zu

$$P^\xi(\bullet \mid \xi(\{\mathbf{x}\}) = 1) = P^{\xi + \varepsilon_{\mathbf{x}}} \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

im homogenen Fall verallgemeinern; für nicht-homogene Poisson-Punktprozesse muss dafür entsprechend $E\xi(\{\mathbf{x}\}) = 0$ gelten.

I.5. Statistik für den homogenen Poisson-Punktprozess

Da der homogene Poisson-Prozess nur durch einen einzigen Parameter $\lambda > 0$ charakterisiert ist, ist es vergleichsweise leicht, auf der Basis bereits einer einzigen (genügend großen) Realisation des Punktprozesses geeignete Schätzer für λ zu finden. Wir stellen im Folgenden einige solcher Schätzer, die auch in der Praxis verwendet werden, vor und diskutieren ihre Güteeigenschaften (vgl. hierzu auch Kapitel III im Skript zur STOCHASTIK).

Wir setzen für den Rest dieses Abschnitts voraus, dass ein homogener d -dimensionaler Poisson-Prozess mit Parameter $\lambda > 0$ und $d \in \mathbb{N}$ gegeben ist, der in einer hinreichend großen Menge $B \in \mathcal{B}^d$ beobachtet werden kann.

Methode 1: Proportional-Statistik: $\hat{\lambda} = \frac{\xi(B)}{m^d(B)}$

Dieser Schätzer ist erwartungstreu wegen

$$E(\hat{\lambda}) = E\left(\frac{\xi(B)}{m^d(B)}\right) = \frac{E(\xi(B))}{m^d(B)} = \lambda \frac{m^d(B)}{m^d(B)} = \lambda.$$

Er besitzt die Varianz

$$\text{Var}(\hat{\lambda}) = \text{Var}\left(\frac{\xi(B)}{m^d(B)}\right) = \frac{\text{Var}(\xi(B))}{\{m^d(B)\}^2} = \lambda \frac{m^d(B)}{\{m^d(B)\}^2} = \frac{\lambda}{m^d(B)}.$$

Der Schätzer ist konsistent, wenn die Menge B vergrößert wird, d.h. für $m^d(B) \rightarrow \infty$.

Methode 2: Leerzellen-Statistik: $\hat{\lambda} = \frac{n \ln\left(\frac{n}{N}\right)}{m^d(B)}$

mit $N = \#\{i | \xi(B_i) = 0\}$ für eine ausreichend feine disjunkte Zerlegung $B = \bigoplus_{i=1}^n B_i$ in Borel-Mengen B_i mit $m^d(B_i) = \frac{1}{n} m^d(B)$, $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$. Dieser Schätzer ist motiviert durch die Beziehung

$$\exp\left(-\frac{\lambda}{n} m^d(B)\right) = \exp(-\lambda m^d(B_i)) = P(\xi(B_i) = 0) \approx \frac{N}{n};$$

Auflösen nach λ ergibt den angegebenen Schätzer. Dieser ist nicht exakt, aber asymptotisch (für $n \rightarrow \infty$) erwartungstreu mit der Abschätzung (Jensen'sche Ungleichung bei Konkavität)

$$E(\hat{\lambda}) = -\frac{nE\left(\ln\left(\frac{N}{n}\right)\right)}{m^d(B)} \geq -\frac{n \ln\left(\frac{E(N)}{n}\right)}{m^d(B)} = -\frac{n \ln\left(\exp\left(-\frac{\lambda}{n} m^d(B)\right)\right)}{m^d(B)} = \lambda.$$

I. Punktprozess-Modelle

Methode 3: Abstands-Statistik: $\hat{\lambda} = \frac{n-1}{\nu_d R_{(n)}^d}$,

wobei $R_{(n)}$ wie in Satz 9 den n -größten Abstand der „Punkte“ vom Nullpunkt bezeichnet. (Hierfür ist Voraussetzung, dass B den Nullpunkt enthält und genügend „groß“ ist.) $\lambda \nu_d R_{(n)}^d$ besitzt nach Satz 9 als Summe unabhängiger, identisch $\mathcal{E}(1)$ -exponentialverteilter Zufallsvariablen eine Erlang-Verteilung. Damit ergibt sich:

$$E(\hat{\lambda}) = \lambda E\left(\frac{n-1}{\lambda \nu_d R_{(n)}^d}\right) = \lambda(n-1) \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx = \lambda \int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} e^{-x} dx = \lambda,$$

d.h. der Schätzer ist erwartungstreu für $n \geq 2$ (der Schätzer hat den Erwartungswert Null für $n = 1!$), mit der Varianz

$$\text{Var}(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{n-2} \text{ für } n \geq 3$$

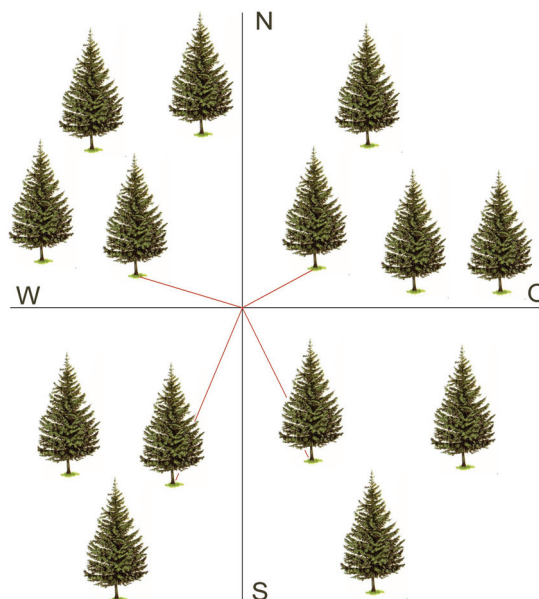
wegen

$$E(\hat{\lambda}^2) = \lambda^2 E\left\{\left(\frac{n-1}{\lambda \nu_d R_{(n)}^d}\right)^2\right\} = \lambda^2(n-1)^2 \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx = \lambda^2 \frac{n-1}{n-2} \int_0^\infty \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} e^{-x} dx = \frac{n-1}{n-2} \lambda^2.$$

Der Schätzer ist also konsistent für $n \rightarrow \infty$.

Methode 4: Die so genannte PCQ-Methode:

Diese Methode ist eine historische Variante der Methode 3 (*PCQ = Point Center Quarter*). Sie wurde beim Bau der amerikanischen transkontinentalen Eisenbahnlinien angewendet, um den erwarteten Holzeinschlag in bewaldeten Gebieten zu schätzen (vgl. MÜHLENBERG, S. 124).



I. Punktprozess-Modelle

Bei der PCQ-Methode werden in den 4 (als paarweise disjunkt angenommenen) Quadranten Q_i , die durch die Himmelsrichtungen vorgegeben sind (\rightarrow Kompass), die kürzesten Abstände R_i der Bäume vom Nullpunkt (Standort) bestimmt. Diese Abstände sind auf Grund der zentralen Eigenschaft der stochastischen Unabhängigkeit der Poisson-Prozesse $\xi(\cdot \cap Q_i)$, $i = 1, \dots, 4$ ebenfalls stochastisch unabhängig; ihre Verteilung ist identisch und gegeben durch

$$P(R_i > x) = P(\xi(Q_i \cap K(x)) = 0) = \exp(-\lambda \cdot m^2(Q_i \cap K(x))) = \exp\left(-\frac{\lambda\pi}{4} x^2\right) \text{ für } x > 0;$$

d.h. jedes R_i^2 ist exponentialverteilt mit Parameter $\frac{\lambda\pi}{4}$ (vgl. Satz 9). Die originäre PCQ-Methode verwendet nun den Schätzer

$$\hat{\lambda}_{PCQ} = \frac{16}{\left(\sum_{i=1}^4 R_i\right)^2}$$

als Schätzer für den unbekannt Parameter λ . Dieser Schätzer ist allerdings nicht erwartungstreu, wie man anhand folgender Überlegungen leicht einsieht:

Es gilt für $i = 1, 2, 3, 4$:

$$E(R_i) = E\left(\sqrt{R_i^2}\right) = \frac{\lambda\pi}{4} \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-\frac{\lambda\pi}{4}x} dx = \frac{2}{\sqrt{\lambda\pi}} \int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y} dy = \frac{2}{\sqrt{\lambda\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\lambda\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

und damit auf Grund der Jensen'schen Ungleichung für konvexe Funktionen:

$$E\left(\hat{\lambda}_{PCQ}\right) = E\left[\frac{16}{\left(\sum_{i=1}^4 R_i\right)^2}\right] > \frac{16}{\left(\sum_{i=1}^4 E(R_i)\right)^2} = \lambda.$$

Der Schätzer $\hat{\lambda}_{PCQ}$ überschätzt den wahren Parameter λ also systematisch. Mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen erhält man genauer:

$$E\left(\hat{\lambda}_{PCQ}\right) \approx 1,268 \lambda, \quad Var\left(\hat{\lambda}_{PCQ}\right) = 0,847 \lambda^2.$$

Es wäre demnach besser, den modifizierten erwartungstreuen Schätzer

$$\hat{\lambda}_{mod} = \frac{12,618}{\left(\sum_{i=1}^4 R_i\right)^2} \text{ mit } Var\left(\hat{\lambda}_{mod}\right) = 0,528 \lambda^2$$

I. Punktprozess-Modelle

zu verwenden. Alternativ kann auch der (erwartungstreue) Schätzer $\hat{\lambda}_{4,alt} = \frac{12}{\pi \sum_{i=1}^4 R_i^2}$ verwendet

werden, denn $\sum_{i=1}^4 R_i^2$ ist $\mathcal{E}\left(4, \frac{\lambda\pi}{4}\right)$ -Erlang-verteilt, und damit gilt

$$E\left(\hat{\lambda}_{4,alt}\right) = E\left(\frac{12}{\pi \sum_{i=1}^4 R_i^2}\right) = \frac{12}{\pi} \cdot \left(\frac{\lambda\pi}{4}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3!} e^{-\frac{\lambda\pi}{4}x} dx = \frac{12}{\pi} \cdot \left(\frac{\lambda\pi}{4}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2!} e^{-\frac{\lambda\pi}{4}x} dx = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\lambda\pi}{4} = \lambda$$

mit

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\lambda}_{4,alt}^2\right) &= E\left(\frac{144}{\pi^2 \left(\sum_{i=1}^4 R_i^2\right)^2}\right) = \frac{144}{\pi^2} \cdot \left(\frac{\lambda\pi}{4}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^3}{3!} e^{-\frac{\lambda\pi}{4}x} dx \\ &= \frac{24}{\pi^2} \cdot \left(\frac{\lambda\pi}{4}\right)^4 \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\frac{\lambda\pi}{4}x} dx = \frac{24}{\pi^2} \cdot \frac{\lambda^2 \pi^2}{16} = \frac{3}{2} \lambda^2 \end{aligned}$$

oder

$$Var\left(\hat{\lambda}_{4,alt}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right) \lambda^2 = \frac{1}{2} \lambda^2.$$

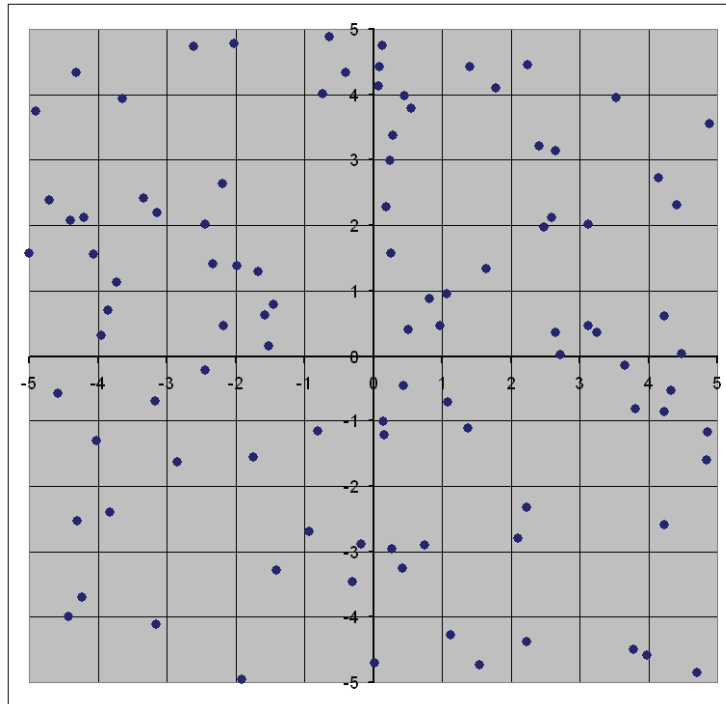
Der alternative Schätzer hat damit eine leicht geringere Varianz als der modifizierte PCQ-Schätzer.

Das Abstands-Verfahren kann leicht auf eine höhere Anzahl von Sektoren erweitert werden. Vergrößert man die Zahl der Beobachtungssektoren (mit gleichen Sektor-Winkeln) von 4 auf $m > 4$ (z.B. $m = 8$; \rightarrow Oktanten), so ist der passende erwartungstreue Schätzer gegeben durch

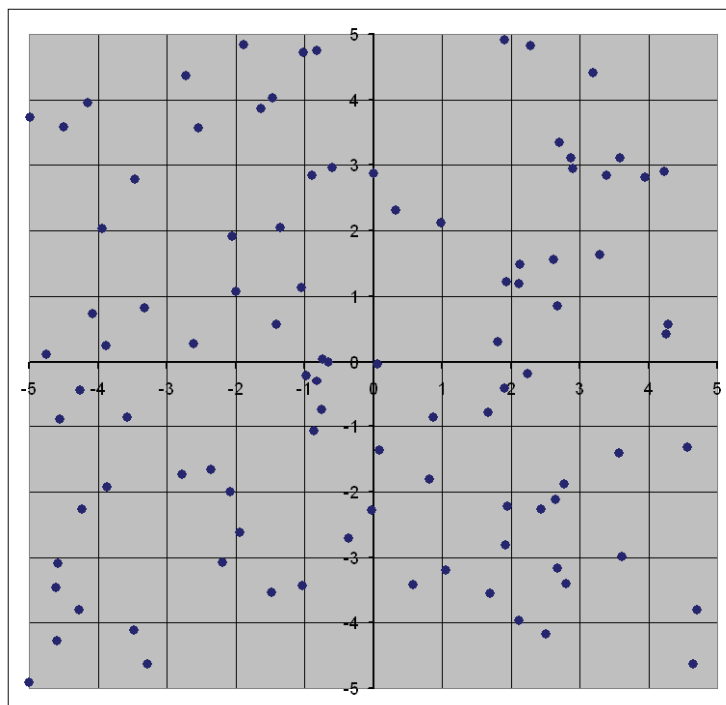
$$\hat{\lambda}_{m,alt} = \frac{m(m-1)}{\pi \sum_{i=1}^m R_i^2} \quad \text{mit} \quad Var\left(\hat{\lambda}_{m,alt}\right) = \frac{\lambda^2}{m-2}.$$

Die folgenden Graphiken zeigen zwei Simulationen eines homogenen Poisson-Prozesses mit Parameter 1 und die zugehörigen Schätzer.

I. Punktprozess-Modelle



Methode	Proportional	Leerzellen	PCQ modifiziert	PCQ 4 alternativ	PCQ 8 alternativ
Schätzer	1,000	1,109	0,705	0,742	0,700



Methode	Proportional	Leerzellen	PCQ modifiziert	PCQ 4 alternativ	PCQ 8 alternativ
Schätzer	1,020	0,968	1,156	0,881	1,120

I. Punktprozess-Modelle

Neben Schätzverfahren für den Parameter eines homogenen Poisson-Prozesses sind auch Testverfahren zur Überprüfung der Homogenitätsannahme wichtig. Ein häufig verwendeter und einfach durchzuführender Test ist der

Dispersionsindex-Test: Dazu wird - ähnlich wie bei der Leerzellenstatistik - ein Beobachtungsfenster B für den Punktprozess ξ in n gleich große disjunkte Bereiche B_i (bzgl. des Lebesgue-Maßes) aufgeteilt: $B = \bigoplus_{i=1}^n B_i$ mit Borel-Mengen B_i und $m^d(B_i) = \frac{1}{n} m^d(B)$, $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$. Der Dispersionsindex I ist dann definiert als

$$I = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi(B_i) - \bar{\xi})^2}{\bar{\xi}} \quad \text{mit} \quad \bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi(B_i).$$

Unter der (Null-)Hypothese, dass ξ ein homogener Poisson-Prozess ist, ist der Dispersionsindex I asymptotisch (für $n \rightarrow \infty$) χ_{n-1}^2 -verteilt (Chi-Quadrat-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden; \rightarrow Chi-Quadrat-Anpassungstest). Ist I zu groß, deutet das auf Klumpenbildung hin, ist I zu klein, deutet das auf eine zu starke Regelmäßigkeit hin. (Als Fausregel zur Anwendbarkeit des Dispersionsindex-Tests sollte $n \geq 6$ und $\bar{\xi} \geq 1$ sein.) Mit Hilfe der Chi-Quadrat-Verteilung kann man also entweder zwei verschiedene einseitige oder einen zweiseitigen Signifikanz-Test formulieren.

Für die oberste Graphik der vorigen Seite wählen wir als Kompromiss $n = 25$ (statt 100) mit der Auszählung

3	2	9	5	2
8	5	3	3	3
4	5	4	4	8
3	2	7	3	3
3	2	3	3	3

mit $\bar{\xi} = 4$ und dem Dispersionsindex $I = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (\xi(B_i) - 4)^2 = 24$. Für den zweiseitigen Niveau- α -Test ergeben sich folgende Annahmebereiche $A(\alpha)$:

α	0,10	0,05	0,01
$A(\alpha)$	[13,85 36,42]	[12,40 39,36]	[9,89 45,56]

Der Dispersionsindex-Test würde also hier (wie zu erwarten) zu keinem der drei angegebenen α -Werte ablehnen.

I. Punktprozess-Modelle

Anwendungsbeispiel aus der Kriminalistik:

Die Situation:

- Eine ältere, vermögende Dame hinterlässt einem befreundeten Arzt-Ehepaar, das die Dame medizinisch intensiv betreut, mehrere Immobilien.
- Die Verwandten fechten das Testament an. Es stellt sich heraus, daß sich die Unterschrift der Erblasserin lediglich auf einem photokopierten Schriftstück befindet.
- Das Arzt-Ehepaar wird wegen gemeinschaftlichen Mordes angeklagt und verurteilt.
- Der beurkundende Notar wird wegen Beihilfe zum Mord und wegen Urkundenfälschung angeklagt.
- Das zuständige LKA sowie das BKA untersuchen das Schriftstück mit der Unterschrift der Erblasserin sowie andere testamentarische Dokumente im Hinblick auf die räumliche Verteilung von Tonerpartikeln und stellen fest, daß sich 6 Tonerpartikel auf der mit Kugelschreiber geleisteten Unterschrift befinden. Der Richter wertet dieses Ergebnis als eindeutigen Schuldbeweis in dem Sinne, dass die Kopie erst nach Leistung der Unterschrift angefertigt wurde.

Ist dieses Argument aus statistischer Sicht stichhaltig?

1	4	3	0	0	1	1	0	1	0	0	1	3	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	2	1	1	0	*
0	4	1	0	1	1	1	1	0	4	1	0	0	0
1	0	0	*	1	1	0	2	1	0	0	1	0	1
0	1	2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	2	0	1	0	1	0	0	2	2	1	0	*
2	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	2	1	1	0	1	1	0	1	0	0	3	2
1	0	0	1	0	2	0	1	2	0	0	1	1	0
F	2	1	0	0	0	0	2	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	*

Auszug aus den Tonerpartikel-Auszählungen des LKA;
Zellen mit * bezeichnen Zellen mit mehr als 4 Partikeln
(vom LKA als „systematische Fehler“ bezeichnet)

Eine Detailanalyse der vom LKA untersuchten Schriftstücke zeigt, dass für die räumliche Verteilung der Tonerpartikel ein homogener Poisson-Prozess ξ angenommen werden kann. Die folgende Tabelle zeigt die Auszählung der ersten 225 Zellen aus der als „Kopfzeile“ bezeichneten obersten Rasterzeile der zweiten Seite des Testaments, gruppiert in einer 15×15 Matrix (insgesamt enthielt die Kopfzeile 240 Zellen zu je $0,5 \text{ mm}^2$ Flächeninhalt; 6 weitere Zellen waren mit * markiert):

I. Punktprozess-Modelle

2	2	0	4	0	2	1	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	2	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
3	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	1
1	1	0	0	2	1	1	1	3	0	2	0	0	0	2
0	0	0	1	3	1	1	0	0	1	0	1	3	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	2	1	1	0	2	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1	2	1
0	1	2	0	0	1	1	2	1	3	0	0	2	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	2	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	2	1	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	2
0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Auszug aus der Kopfzeile (als Matrix gruppiert)

Für den Dispersionsindex erhält man hier mit $\bar{\xi} = 0,6755$ den Wert

$$I = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi(B_i) - \bar{\xi})^2}{\bar{\xi}} = 197,34.$$

Für den zweiseitigen Niveau- α -Test ergeben sich folgende Annahmebereiche $A(\alpha)$:

α	0,10	0,05	0,01
$A(\alpha)$	[195,89 266,38]	[184,44 267,34]	[178,51 288,99]

Der Dispersionsindex-Test würde also hier zu keinem der drei angegebenen α -Werte ablehnen.

Problematisch ist hierbei allerdings der Fall der Streichung von Beobachtungen größer als 4; damit wird die Tonerpartikeldichte je mm^2 mit dem Wert $\lambda = 2 \cdot \bar{\xi} = 1,3511$ nämlich zu gering geschätzt, was auch der Wert des Dispersionsindex zeigt, der eher auf eine „zu gleichmäßige“ Tonerpartikelverteilung hindeutet.

In einer weiteren Analyse kommt das LKA zu dem Ergebnis, dass die von der Unterschrift bedeckte Teilmenge $B \in \mathcal{B}^2$ einen Flächeninhalt von $m^2(B) = 55 \text{ [mm}^2\text{]}$ besitzt.

Damit ist es aber extrem unwahrscheinlich, dass sich auf der Unterschrift nach späterem Kopieren eines Textes nur (maximal) 6 Tonerpartikel befinden, denn es gilt mit obigem Schätzer:

$$\lambda \cdot m^2(B) = 74,31 \quad \text{mit} \quad P(\xi(B) \leq 6) = e^{-\lambda \cdot m^2(B)} \sum_{k=0}^6 \frac{(\lambda \cdot m^2(B))^k}{k!} = 1,35 \times 10^{-24} !$$

Zum Vergleich: es gilt

$$P(\xi(B) > 40) = 1 - e^{-\lambda \cdot m^2(B)} \sum_{k=0}^{40} \frac{(\lambda \cdot m^2(B))^k}{k!} = 0,9999904436,$$

I. Punktprozess-Modelle

d.h. mit über 99,999%iger Wahrscheinlichkeit müssten mehr als 40 Tonerpartikel auf der Unterschrift zu finden sein!

Andererseits gilt aber auch:

$$P(\xi(B) = 0) = e^{-\lambda \cdot m^2(B)} = 5,33 \times 10^{-33},$$

d.h. es ist praktisch ebenso unmöglich, dass erst kopiert und danach unterschrieben wurde!!

Schlussfolgerung: die vom LKA durchgeführten Untersuchungen sind nicht gerichtlich verwertbar:

- entweder wurden ggf. unter der Unterschrift vorhandene Tonerpartikel nicht entdeckt (dann wäre der Angeklagte entlastet),
- oder auf der Unterschrift wurden ggf. vorhandene weitere Tonerpartikel nicht identifiziert (dann wäre der Angeklagte stark belastet).

Im Mittel sollten sich jedenfalls entweder *unter* oder *auf* der Unterschrift ca. 74 Tonerpartikel befinden.

Hier stellt sich noch die Frage, wie der Parameter $\lambda > 0$ eines homogenen Poisson-Prozesses geeignet geschätzt werden kann, wenn die Datenausählung nach einer modifizierten *Proportional-Statistik* mit Hilfe von Zellen B_i , $i = 1, \dots, n$ gleichen Lebesgue-Maßes erfolgt, wobei die Daten *Typ-I-zensiert* sind (d.h. nur Zellen berücksichtigt werden, deren „Punktezahl“ den Wert $K \in \mathbb{N}$ nicht überschreitet). Dieses Problem wurde – motiviert durch die oben besprochene kriminologische Untersuchung – in HURT, LACHOUT AND PFEIFER (2001) behandelt. Wir stellen hier nur kurz die dort vorgeschlagene Vorgehensweise und die zu Grunde liegende Motivation vor: zunächst gilt mit $\mu = \lambda \cdot m^2(B_i)$, $i = 1, \dots, n$:

$$e(\mu, K) := E(\xi(B_i) | \xi(B_i) > K) = \frac{\sum_{k=K+1}^{\infty} k \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}}{\sum_{k=K+1}^{\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}} = \mu \frac{\sum_{k=K}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!}}{\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!}} = \mu \left(1 + \frac{\mu^K}{K! \left(e^{-\mu} - \sum_{k=0}^K \frac{\mu^k}{k!} \right)} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Eine geeignete Schätzung für μ (und damit auch für λ) erhält man nun durch (numerisches) Lösen der Gleichung

$$\frac{S + m \cdot e(\mu, K)}{n} = \mu,$$

wobei $S := \sum_{i: \xi(B_i) \leq K} \xi(B_i)$ die Gesamtzahl der tatsächlich ausgezählten „Punkte“ bezeichnet und m die Anzahl der nicht berücksichtigten Zellen. Hintergrund dieser Methode ist die Beziehung

$$S = \sum_{i: \xi(B_i) \leq K} \xi(B_i) = \sum_{i=1}^n \xi(B_i) - \sum_{i: \xi(B_i) > K} \xi(B_i) \approx \sum_{i=1}^n \xi(B_i) - m \cdot e(\mu, K) \quad \text{mit} \quad E\left(\sum_{i=1}^n \xi(B_i)\right) = n \cdot \mu.$$

Für die obige Kopfzeile ergibt das (bei insgesamt 240 Zellen mit 6 Streichungen für $K = 4$) den deutlich größeren Schätzwert $\hat{\lambda} = 1,5822$.

I.6. Weitere Punktprozess-Modelle

Der Binomial-Punktprozess

Wählt man die Gesamtanzahl der „Punkte“ eines Poisson-Prozesses als eine konstante Größe, so erhält man den so genannten *Binomial-Punktprozess*. Er besitzt die Darstellung

$$\eta := \sum_{k=1}^n \varepsilon_{X_k},$$

wobei wieder X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängige, identisch verteilte Zufallselemente auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ mit Verteilung Q sind und $n \in \mathbb{N}$ fix ist. Der Binomial-Punktprozess kann als bedingter Poisson-Punktprozess im folgenden Sinne aufgefasst werden: Ist ξ ein Poisson-Punktprozess in kanonischer Darstellung mit Paramtern λ und Q , so gilt $P^\eta = P^\xi(\cdot | N = n)$. Als Intensitätsmaß erhält man

$$E\eta = n \cdot Q,$$

und die Randverteilungen des Punktprozesses für disjunkte Mengen sind durch Multinomialverteilungen gegeben: Ist $\{B_i\}_{i \in I}$ mit $I = \{1, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen aus \mathcal{B} mit $\bigcup_{i \in I} B_i = \mathfrak{X}$, so gilt

$$P\left(\bigcap_{i \in I} \{\eta(B_i) = k_i\}\right) = \binom{n}{k_1, \dots, k_m} \prod_{i \in I} Q^{k_i}(B_i) \text{ für alle } k_1, \dots, k_m \in I \text{ mit } \sum_{i \in I} k_i = n.$$

Die Zufallsvariablen $\{\eta(B_i)\}_{i \in I}$ sind aber im Gegensatz zum Poisson-Punktprozess *nicht* unabhängig, sondern negativ korreliert mit der Varianz-Kovarianzmatrix

$$V = n \begin{bmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & \cdots & -p_1p_m \\ -p_2p_1 & p_2(1-p_2) & \cdots & -p_2p_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_m p_1 & -p_m p_2 & \cdots & p_m(1-p_m) \end{bmatrix}$$

Dies kann man mit Hilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion leicht zeigen: sei dazu $p_i := Q(B_i)$ für $i \in I$. Dann gilt:

$$\varphi(t_1, \dots, t_m) = E\left(\prod_{i \in I} t_i^{\eta(B_i)}\right) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_m \in I \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \binom{n}{k_1, \dots, k_m} \prod_{i \in I} p_i^{k_i} t_i^{k_i} = \left(\sum_{i \in I} p_i t_i\right)^n \text{ für } t_1, \dots, t_m \geq 0.$$

Es folgt

$$E\left(\eta(B_i) \cdot \eta(B_j)\right) = \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} \varphi(t_1, \dots, t_m) \Big|_{t_1, \dots, t_m=1} = n(n-1)p_i p_j$$

und somit $Kov(\eta(B_i), \eta(B_j)) = n(n-1)p_i p_j - n^2 p_i p_j = -n \cdot p_i p_j$ für alle $i, j \in I, i \neq j$. Für $i = j \in I$ ergibt sich dagegen $Kov(\eta(B_i), \eta(B_j)) = Var(\eta(B_i)) = np_i(1-p_i)$ und damit die obige

I. Punktprozess-Modelle

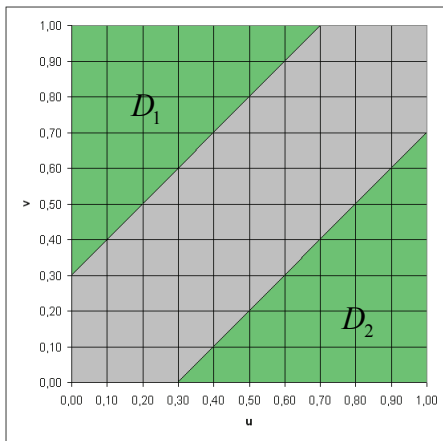
Varianz-Kovarianz-Matrix. Die eindimensionalen Randverteilungen sind damit sämtlich Binomialverteilungen mit

$$P(\eta(B) = k) = \binom{n}{k} Q(B)^k (1 - Q(B))^{n-k} \text{ für } B \in \mathcal{B} \text{ und } k \in I.$$

Für die *sphärische Kontaktverteilung* ergibt sich hier noch

$$P(R_{(1)} > r) = P(\eta(K(r)) = 0) = (1 - Q(K(r)))^n \text{ für } r \geq 0.$$

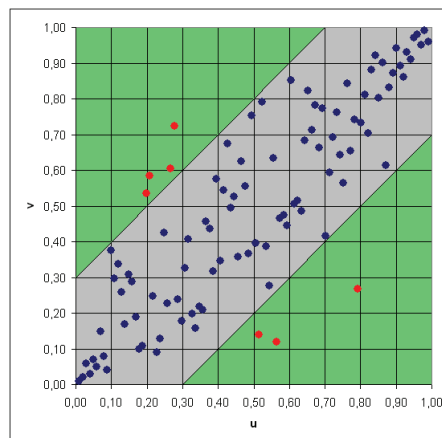
Ein Binomial-Punktprozess über dem d -dimensionalen Einheitswürfel ergibt sich in natürlicher Weise bei Realisierungen von *Copulas* (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Satz 31). Man kann sich diesen Sachverhalt für einen einfachen Test auf stochastische Unabhängigkeit (Nullhypothese) vs. positive Abhängigkeit (Alternative) oder auch andere Hypothesen über eine eventuell zu Grunde liegende Abhängigkeit zu Nutze machen. Wir stellen hier als Beispiel den *Diagonalband-Test* in zwei Dimensionen vor.



Durchführung: Gegeben seien n Realisierungen aus einer transformierten oder empirischen Copula. Teststatistik T_D ist die Anzahl der Datenpunkte in der Menge $D = D_1 \cup D_2$ (Vereinigung der beiden Dreiecke auf der Antidiagonalen). Die Fläche von D beträgt $p = 0,7^2 = 0,49$. Bei stochastischer Unabhängigkeit folgt T_D einer $B(n, p)$ -Binomialverteilung. Die Nullhypothese der stochastischen Unabhängigkeit wird zu Gunsten der Alternative (positive Abhängigkeit) mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit (1. Art) von α verworfen, wenn $T_D \leq c_\alpha$ ist mit maximalem c_α , so dass

$$\sum_{k=0}^{c_\alpha} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leq \alpha.$$

Die folgende Graphik zeigt eine Simulation von 100 Punkten aus einer Gumbel-Copula $C_\theta(u, v) = \exp\left(-\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{1/\theta}\right)$, $0 < u, v \leq 1$ mit Parameter $\theta = 3$.



Die Testgröße für den Binomialtest beträgt hier $T_D = 7$ (rot markierte Punkte) mit $c_{0,0104} = 37$, d.h. die Nullhypothese wird zum Niveau $\alpha = 0,01$ erwartungsgemäß deutlich abgelehnt.

I. Punktprozess-Modelle

Poisson-Cluster-Prozesse

Für viele naturwissenschaftlich motivierte Fragestellungen bietet es sich an, einen Poisson-Punktprozess („Elternprozess“) als Ausgangspunkt für eine Clusterbildung von Punkten um die Elternpunkte herum zu verwenden („Tochterprozesse“). Dabei können die Tochterprozesse z.B. selbst wieder (vom Elternprozess stochastisch unabhängige) Poisson-Punktprozesse sein. Als (lokales) Modell in \mathbb{R}^d bietet sich beispielhaft etwa folgende Konstruktion an:

$$\xi = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{N_k} \epsilon_{X_k + Z_{ki}},$$

wobei $\{N, N_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Familie stochastisch unabhängiger, Poisson-verteilter Zufallsvariablen ist mit nicht-negativen Parametern λ_E für N (Elternprozess) und λ_T für die $\{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (Tochterprozesse), unabhängig von den (ebenfalls untereinander unabhängigen) d -dimensionalen Zufallsvektoren $\{X_k, Z_{ki}\}_{k, i \in \mathbb{N}}$. Ferner werde hier angenommen, dass die $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ die Verteilung Q^X und die $\{Z_{ki}\}_{k, i \in \mathbb{N}}$ die Verteilung Q^Z besitzen. Für das resultierende Intensitätsmaß ergibt sich dann:

Satz 11: Unter den obigen Voraussetzungen gilt

$$E\xi(B) = \lambda_E \cdot \lambda_T \cdot \int_{\mathbb{R}^d} Q^X(B-z) Q^Z(dz) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}^d.$$

Beweis: Zur Abkürzung setzen wir $Y_{ki} := X_k + Z_{ki}$, $k, i \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$Q^Y(B) := P(Y_{ki} \in B) = P(X_k + Z_{ki} \in B) = \int_{\mathbb{R}^d} P(X_k + z \in B) Q^Z(dz) = \int_{\mathbb{R}^d} Q^X(B-z) Q^Z(dz)$$

für alle $B \in \mathcal{B}^d$ und $k, i \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\begin{aligned} E\xi(B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n E \left(\sum_{i=1}^{N_k} \mathbb{1}_B(Y_{ki}) \right) \cdot P(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_T \cdot Q^Y(B) \cdot P(N=n) \\ &= \lambda_T \cdot Q^Y(B) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(N=n) = \lambda_E \cdot \lambda_T \cdot \int_{\mathbb{R}^d} Q^X(B-z) Q^Z(dz), \end{aligned}$$

denn die Familie $\{Y_{ki}\}_{i \in \mathbb{N}}$ ist voraussetzungsgemäß stochastisch unabhängig von N_k für jedes $k \in \mathbb{N}$. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Bemerkungen:

- Für die mittlere Anzahl aller Tochterpunkte ergibt sich damit $E\xi(\mathbb{R}^d) = \lambda_E \cdot \lambda_T$.
- In vielen Anwendungsfällen ist die Verteilung Q^Z symmetrisch um den Nullpunkt herum, so dass die Tochterpunkte dann symmetrisch um die Elternpunkte herum verteilt sind.

I. Punktprozess-Modelle

Anwendungsbeispiel Thomas-Prozesse:

Das im Folgenden ausführlicher besprochene Anwendungsbeispiel hat seinen Ursprung in einer biologisch motivierten Fragestellung im Rahmen des Verbundvorhabens *Ökosystemforschung Niedersächsisches Wattenmeer*, grundlagenorientierter Teil ELAWAT (1989 - 1999).

Auszug aus dem Synthese-Bericht des ICBM vom März 1999 (nach WIRTZ UND NIESEL, modifiziert; vgl auch DITTMANN (1999), Kapitel 4.3.2):

Im Wattsediment findet sich ein großer Artenreichtum an kleineren Organismen (Meiobenthos). Diese Organismen sind nicht gleichmäßig im Sediment verteilt. In Abhängigkeit von äußeren Bedingungen wie z.B. der Korngröße des Sediments, der bodennahen Advektion oder von den ökologischen Ansprüchen einer Art kann es auf unterschiedlichen räumlichen Skalen zu verschiedenen Verteilungsmustern kommen. Dies gilt beispielsweise für den Copepoden *Harpacticus obscurus*.

Die Charakterisierung der räumlichen Heterogenität des Meiobenthos ist von Bedeutung. Sie läßt Rückschlüsse auf ökologische Eigenschaften der jeweils betrachteten Art zu. Insbesondere räumliche Wechselwirkungen mit anderen Arten oder innerhalb der Population (z.B. Vermehrung) werden über die Verteilungsmuster indirekt erkennbar.

Allerdings führen Dichteschwankungen in der ökologischen Freilandarbeit zu dem Problem, eine geeignete Meßstrategie zu finden. Die Probenahmedichte darf aus praktischen Gründen nicht zu groß sein. Sie sollte aber auch nicht zu gering gewählt werden, da sich sonst die Verteilungsmuster nicht charakterisieren lassen. Folglich müssen die Anzahl und Größe von erfaßten Flächen auch über einen minimalen Grenzwert liegen.

Aus der Problematik ergeben sich insgesamt zwei Fragestellungen:

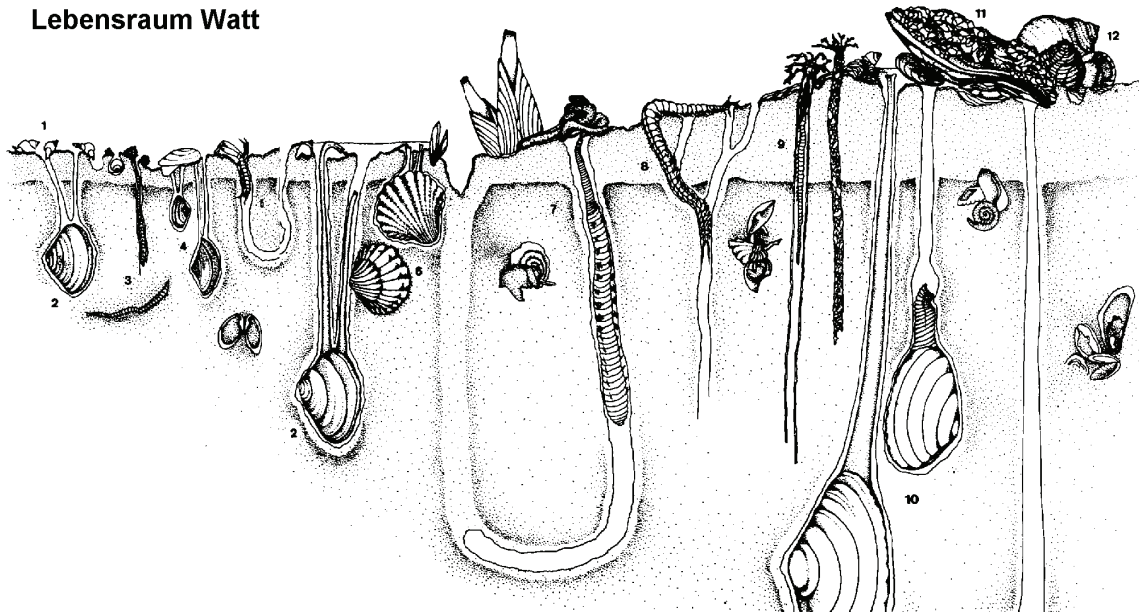
- Liegt den Dichteschwankungen meiobenthischer Organismen ein Muster zugrunde und falls ja, kann das Muster mit wenigen Größen beschrieben werden?
- Welche Probenahmestrategie ist notwendig, um das Muster zu erfassen?

Prinzipiell können die beiden Fragestellungen mit **statistischen Verfahren** bearbeitet werden. Doch vor allem die anvisierte, ökologische Interpretation der Verteilungsmuster macht den Einsatz eines Modells sinnvoll. Denn in dem Modell können bereits *Hypothesen zur Musterbildung* getestet werden.

Einen solchen hypothesenbasierten Weg beschreiten die in der Ökosystemforschung Wattenmeer eingesetzten stochastischen Verteilungsmodelle des Meiobenthos. Sie leiten sich aus Annahmen zu der Verteilungsart der betrachteten Arten ab. Das Modell zur Musterbildung des Copepoden *Harpacticus obscurus* (Ruderfußkrebs) beruht beispielsweise darauf, daß die Copepoden stark von der makrobenthische Art *Lanice conchilega* (Bäumchenröhrenwurm) gefördert werden. Im Detail basiert das Modell auf folgenden Hypothesen:

- Die Copepoden gruppieren sich um einzelne Individuen des Bäumchenröhrenwurms gemäß einer radialsymmetrischen Normalverteilung (Tochterprozesse).
- Die Individuen des Bäumchenröhrenwurms sind zufällig gleichmäßig verteilt (Elternprozess).

Lebensraum Watt



Quelle: Nationalparkverwaltung „Niedersächsisches Wattenmeer“ (1992); Graphik: M. Karl

- 1: Wattschnecke (*Hydrobia ulvae*)
- 2: Pfeffermuschel (*Scrobicularia plana*)
- 3: Kotpillenwurm (*Heteromastus filiformis*)
- 4: Tellmuschel (*Macoma baltica*)
- 5: Schlickkrebs (*Corophium volutator*)
- 6: Herzmuschel (*Cerastoderma edule*)
- 7: Pierwurm (*Arenicola marina*)
- 8: Seeringelwurm (*Nereis diversicolor*)
- 9: Bäumchen-Röhrenwurm (*Lanice conchilega*)
- 10: Sandklaffmuschel (*Mya arenaria*)
- 11: Miesmuschel (*Mytilus edulis*)
- 12: Gemeine Strandschnecke (*Littorina littorea*)

Die folgenden Tabellen zeigen die Auszählungen der Anzahlen von *Harpacticus obscurus* an drei verschiedenen Standorten; die gesamte ausgezählte Fläche beträgt jeweils 100 cm² [= 1 Flächeneinheit]. μ bezeichnet jeweils die durchschnittliche Anzahl Individuen pro Zelle und I den jeweiligen Dispersionsindex.

I. Punktprozess-Modelle

95	1	3	0	42
1	1	1	4	2
0	5	8	81	24
11	1	6	71	116
1	5	116	2	10

Probe 6

$$\mu = 24,28$$

$$I = 1464,21$$

165	22	1	94	68
11	82	111	97	153
0	0	24	13	15
31	1	46	22	11
2	0	5	8	6

Probe 8

$$\mu = 39,52$$

$$I = 1490,13$$

245	142	326	52	293
222	368	84	18	67
239	25	477	213	204
18	570	183	494	47
238	119	126	591	20

Probe 18

$$\mu = 215,24$$

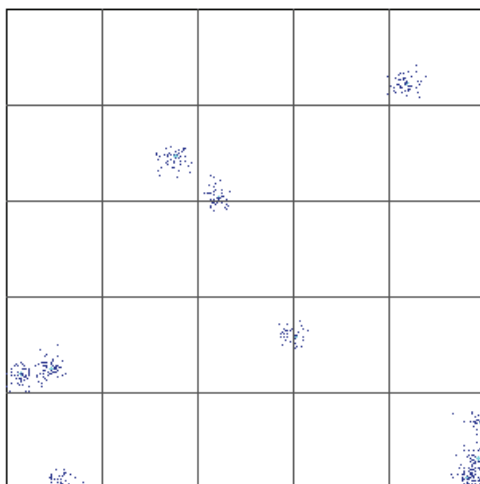
$$I = 3377,47$$

Die sehr großen Werte der Dispersionsindices deuten auf ein stark geklumpertes Punktmuster hin. Insofern erscheint es naheliegend, für die Modellierung einen räumlichen Cluster-Prozess zu verwenden. In einem ersten Ansatz kann man einen Thomas-Prozess betrachten, bei dem die Tochter-Prozesse Poisson-Punktprozesse sind, deren Intensitätsmaße durch ein Vielfaches $\lambda_T > 0$ bivariater radialsymmetrischer Normalverteilungen gegeben sind (d.h. mit stochastisch unabhängigen Komponenten). Die folgenden Graphiken zeigen Simulationen solcher Prozesse mit den Parametern $\lambda_E = 10$ für den Elternprozess und $\lambda_T = 50$ für die Tochterprozesse. Die Standardabweichung für die Normalverteilung beträgt jeweils 5 [in Pixel-Einheiten], die Auszählung erfolgt wie in den obigen drei Beispielen.

```
intensity of parent process = 10
intensity of daughter process = 50
standard deviation = 5 [Pixels]
```

```
mean value = 17.55      index-of-dispersion = 1519.59
```

```
estimate for intensity of parent process = 9.64      realized: 11
estimate for intensity of daughter process = 45.53    realized: 39.9
```



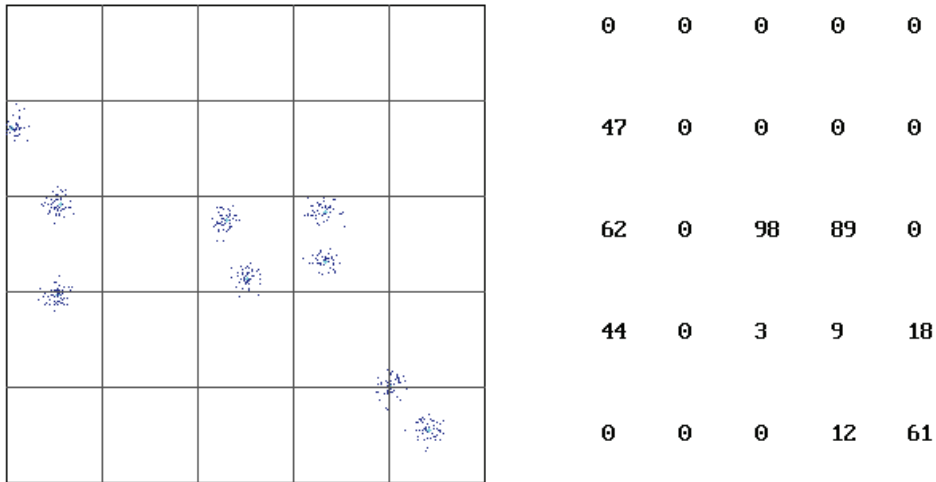
0	0	0	2	46
0	46	27	0	0
0	0	13	0	0
104	0	20	21	0
31	0	0	0	129

I. Punktprozess-Modelle

intensity of parent process = 10
 intensity of daughter process = 50
 standard deviation = 5 [Pixels]

mean value = 17.71 index-of-dispersion = 1238.32

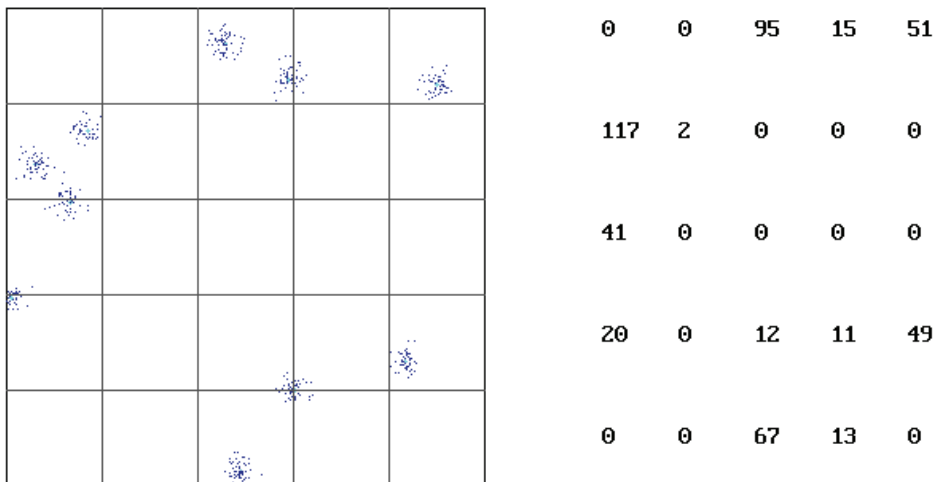
estimate for intensity of parent process = 8.21 realized: 9
 estimate for intensity of daughter process = 53.94 realized: 49.22



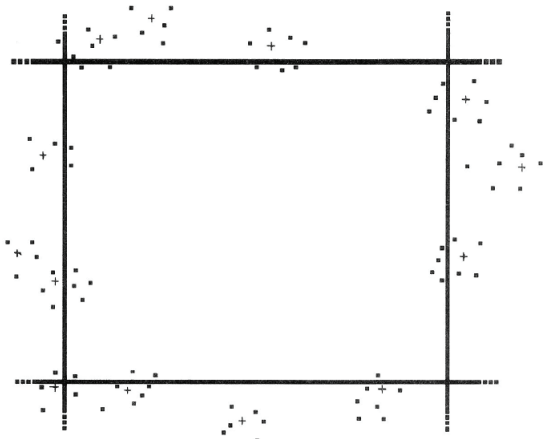
intensity of parent process = 10
 intensity of daughter process = 50
 standard deviation = 5 [Pixels]

mean value = 19.71 index-of-dispersion = 1279.26

estimate for intensity of parent process = 9.64 realized: 10
 estimate for intensity of daughter process = 51.13 realized: 49.29



I. Punktprozess-Modelle



Beispiel einer „schwach besetzten Zelle“

Für die Schätzung des Parameters λ_E verwenden wir eine geeignete Modifikation der *Leertzellenstatistik*, da diese nicht direkt angewendet werden kann, weil Zellen, die zwar von Elternpunkten frei sind, mit Tochterpunkten besetzt sein können. Wenn die Parameter λ_E und λ_T in einem „passenden“ Verhältnis zur Streuung σ der umgebenden Normalverteilung stehen, bietet sich ein *Schwellenwert-Verfahren* der folgenden Art an:

Es sei $S > 0$ der Schwellenwert für eine „schwach besetzte Zelle“ (vgl. die Graphik links). Mit

$$L_S := \#\{i | \xi(B_i) \leq S\}$$

sei die Anzahl derjenigen Zellen B_i bezeichnet, die höchstens S Tochterpunkte enthalten. Dann ist

$$\hat{\lambda}_E := \frac{n}{m^d(B)} \ln \left(\frac{n}{\hat{L}_S} \right)$$

ein geeigneter Schätzer für λ_E , wobei \hat{L}_S die empirische Anzahl „schwach besetzter Zellen“ aus der Stichprobe bezeichnet (vgl. Methode 2 oben). Dabei werden „schwach besetzte Zellen“ ideell mit Zellen identifiziert, die ursprünglich frei von „Elternpunkten“ sind. Als heuristisch motivierte Wahl für den Schwellenwert S verwenden wir im Fall der Dimension 2 die Größe

$$S := \frac{N}{3(n - \ell)},$$

wobei $N = \xi(B)$ die Gesamtzahl aller Tochterpunkte im Gebiet $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ bezeichnet und ℓ die

Anzahl der Zellen, die frei von Tochterpunkten sind. Diese Wahl ist dadurch motiviert, dass diejenigen Tochterpunkte für Elternpunkte, die nahe an einer Kante einer Zelle liegen, in etwa zur Hälfte in die Zelle streuen, während Tochterpunkte für Elternpunkte, die nahe an einer Ecke einer Zelle liegen, in etwa zu einem Viertel in die Zelle streuen. Ferner ist $n - \ell$ die Anzahl derjenigen Zellen, die von Tochterpunkten besetzt sind, so dass im Mittel $\frac{N}{n - \ell}$ Tochterpunkte in einer besetzten Zelle liegen.

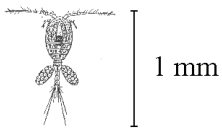
Für den Parameter λ_T bietet sich daran anschließend der Schätzer

$$\hat{\lambda}_T = \frac{N}{\hat{\lambda}_E}$$

an.

Die Parameterschätzungen in den drei obigen Simulationsstudien wurden auf genau diese Weise ermittelt. Wie man sieht, werden die ursprünglichen Parameter $\lambda_E = 10$ und $\lambda_T = 50$ relativ gut identifiziert.

I. Punktprozess-Modelle



Ruderfußkrebs

Vergleicht man die simulierten Auszählungsergebnisse mit der Probe 6, so sieht man zwar, dass die Anzahlen in der gleichen Größenordnung liegen und auch die Dispersionsindices vergleichbar hoch sind, allerdings enthält Probe 6 wesentlich weniger Leerzellen. Es ist daher davon auszugehen, dass neben einer geklumpten „Ansiedlung“ von *Copepoden* um *Lanice*-Röhren herum auch noch ein zufälliges Auftreten von *Copepoden* „im freien Gelände“ anzunehmen ist.

Für die Modellierung bedeutet das die Annahme einer stochastisch unabhängigen Überlagerung eines Thomas-Prozesses für die Röhren-orientierten *Copepoden* mit einem homogenen Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda_z > 0$ für die „frei wandernden“ *Copepoden*.



Lanice-Feld

Für die mittlere Anzahl aller Tochterpunkte des modifizierten Gesamtprozesses ergibt sich damit der Wert

$$\lambda_{tot} = E\xi(\mathbb{R}^d) = \lambda_E \cdot \lambda_T + \lambda_z.$$

Nimmt man an, dass ein Anteil $p \in [0,1]$ aller Tochterpunkte den frei wandernden Teil der Gesamtpopulation bezeichnet, so erhält man die Gleichung

$$\lambda_z = p \cdot \lambda_{tot} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_E \cdot \lambda_T = (1-p) \cdot \lambda_{tot},$$

So dass der Schätzer für den Parameter λ_T modifiziert werden muss zu

$$\hat{\lambda}_T^{\text{mod}} = (1-p) \cdot \frac{\hat{\lambda}_{tot}}{\hat{\lambda}_E}.$$

Das Konzept der „schwach besetzten Zelle“ kann dabei weitgehend unverändert bleiben, solange der Anteil frei wandernder *Copepoden* nicht zu groß wird. Ggf. bietet es sich an, den Schwellenwert geeignet anzupassen:

$$S_{tot} = \frac{S}{1-p}.$$

I. Punktprozess-Modelle

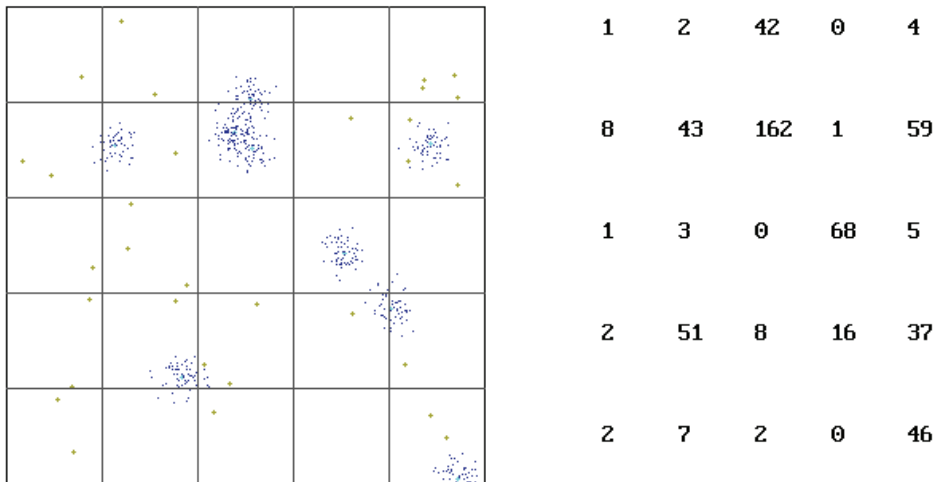
Ein geeignetes adaptives Verfahren zur Schätzung aller drei Parameter wird in PFEIFER, BÄUMER, ORTLEB, SCHLEIER UND SACH (1996) beschreiben.

Die folgenden drei Graphiken zeigen Simulationen nach dem modifizierten Thomas-Prozess für die drei Proben 6, 8 und 18. Die frei wandernden Copepoden sind mit einem grünen Kreuz dargestellt.

```
intensity of parent process = 10
intensity of daughter process = 60
intensity of noise process = 31.57
standard deviation = 7 [Pixels]
```

```
mean value = 22.8      index-of-dispersion = 1383.94
```

```
estimate for intensity of parent process = 11.15      realized: 9
estimate for intensity of daughter process = 48.53     realized: 59.88
estimate for intensity of noise process = 28.5         per cell: 1.26
```

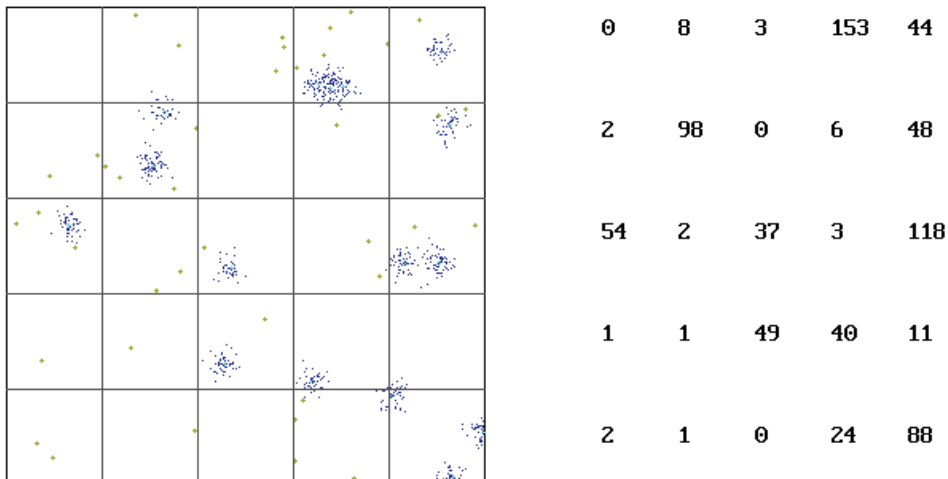


Simulation für Probe 6

```
intensity of parent process = 18
intensity of daughter process = 50
intensity of noise process = 47.36
standard deviation = 5 [Pixels]
```

```
mean value = 31.71      index-of-dispersion = 1351.92
```

```
estimate for intensity of parent process = 14.49      realized: 16
estimate for intensity of daughter process = 51.97     realized: 47
estimate for intensity of noise process = 39.65         per cell: 1.89
```



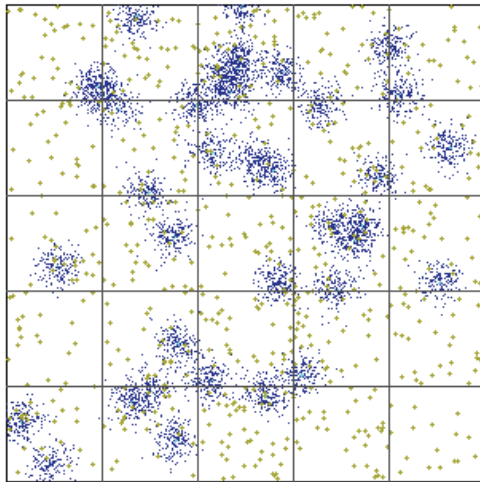
Simulation für Probe 8

I. Punktprozess-Modelle

intensity of parent process (max. 100) ? 35
 intensity of daughter process (max. 250) ? 170
 proportion p of noise intensity ? 0.1
 standard deviation [Pixels] ? 7

mean value = 272.39 index-of-dispersion = 3593.75

estimate for intensity of parent process = 40.23 realized: 37
 estimate for intensity of daughter process = 152.32 realized: 165.27
 estimate for intensity of noise process = 681 per cell: 26.44



192	346	897	222	210
68	322	607	263	280
198	265	170	613	151
23	285	271	238	57
337	471	254	54	16

Simulation für Probe 18

Punkt-Prozesse mit Abstoßung

Für einige naturwissenschaftlich motivierte Fragestellungen ist es sinnvoll, auch Punktprozesse mit räumlicher Abstoßung zu betrachten (z.B. Bäume in einem Wald, die wegen ihrer Kronendurchmesser nicht beliebig nahe beieinander stehen können). Wir gehen hier nicht auf Details ein, sondern verweisen exemplarisch auf D. STOYAN UND H. STOYAN (1992), Kapitel 6 (insbesondere *Strauss-* und *Gibbs-Prozesse*).

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Punktprozesse sind häufig der Ausgangspunkt für „kompliziertere“ räumliche Strukturen - zufällige abgeschlossene Mengen -, die z.B. durch geeignete zufällige Überlagerung abgeschlossener Mengen entstehen und die insbesondere ein positives Lebesgue-Maß (Fläche, Volumen) besitzen. Ihre theoretischen Grundlagen sind noch tiefer liegend als die der Punktprozesse. Wir beschränken uns hier auf den Fall des d -dimensionalen Euklidischen Raumes $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ mit $d \in \mathbb{N}$.

II.1. Maßtheoretische Grundlagen

Wir verwenden hier durchgängig die folgende Notation (vgl. auch das Skript zur STOCHASTIK, Kapitel I.6):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^d &:= \left\{ I_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} := \prod_{i=1}^d (a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^d \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, d \right\} \\ \mathcal{O}^d &:= \{ O \subseteq \mathbb{R}^d \mid O \text{ offen} \} \\ \mathcal{F}^d &:= \{ A \subseteq \mathbb{R}^d \mid A \text{ abgeschlossen} \} \\ \mathcal{K}^d &:= \{ K \subseteq \mathbb{R}^d \mid K \text{ kompakt} \} \end{aligned}$$

sowie

$$\mathcal{F}_K^d := \{ F \in \mathcal{F}^d \mid F \cap K \neq \emptyset \} \text{ für } K \subseteq \mathfrak{X}$$

und

$$\mathcal{E}_0^d := \{ \mathcal{F}_K^d \mid K \in \mathcal{K}^d \}, \quad \mathfrak{F}^d := \sigma(\mathcal{E}_0^d).$$

Sofern keine Konfusion besteht, lassen wir den nach oben gestellten Index d im Folgenden meist weg, schreiben also $\mathcal{F}_K := \{ F \in \mathcal{F} \mid F \cap K \neq \emptyset \}$ statt $\mathcal{F}_K^d := \{ F \in \mathcal{F}^d \mid F \cap K \neq \emptyset \}$ usw.

Lemma 6: Es sei $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Mengenfolge mit $A_n \subseteq \mathfrak{X}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Es gilt ohne weitere Einschränkungen: $\mathcal{F}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n}$.

b) Unter der Voraussetzung $A_n \downarrow A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ für ein $A \subseteq \mathfrak{X}$ und $A_n \in \mathcal{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auch:

$$\mathcal{F}_{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n}.$$

Beweis:

a) Es gilt: $F \in \mathcal{F}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} \Leftrightarrow F \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset \Leftrightarrow F \cap A_n \neq \emptyset$ für wenigstens ein $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow F \in \mathcal{F}_{A_n}$ für wenigstens ein $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow F \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n}$.

b) Nach Voraussetzung ist notwendig $A \neq \emptyset$. Es gilt: $F \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow F \cap A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F \cap A_n) \neq \emptyset \Rightarrow F \cap A_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow F \in \mathcal{F}_{A_n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow F \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n}$, also folgt

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

$\mathcal{F}_{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n}$. [Dies gilt auch ohne jegliche Voraussetzung an die Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.] Sei nun umgekehrt $F \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n}$, also $F \in \mathcal{F}_{A_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung haben wir $F \cap A_n \downarrow F \cap A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (F \cap A_k) \neq \emptyset$ auf Grund des Cantor'schen Durchschnittssatzes, so dass $F \in \mathcal{F}_A = \mathcal{F}_{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n}$ folgt und somit $\mathcal{F}_{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} \supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n}$, also $\mathcal{F}_{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n}$, womit das Lemma bewiesen ist. ■

Bemerkung: Die Annahme der Kompaktheit der Mengen A_n in Lemma 6 ist wesentlich, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt: Sei $A \in \mathcal{K}$ beliebig. Dann ist $\mathbb{Q}^d \setminus A = \{q_1, q_2, \dots\}$ eine unendliche, abzählbare Menge. Setze $A_n := A \cup \{q_{n+1}, q_{n+2}, \dots\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Mengen sind sämtlich *nicht* kompakt, aber es gilt offensichtlich $A_n \downarrow A$. Sei nun $F \subseteq A^c$ ein beliebiges abgeschlossenes d -dimensionales Intervall (ein solches existiert immer). Dann enthält die Menge $F \cap \mathbb{Q}^d = F \cap (\mathbb{Q}^d \setminus A)$ unendlich viele Elemente, so dass $F \cap A_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es folgt also $F \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n}$, nicht aber $F \in \mathcal{F}_{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \mathcal{F}_A$, womit hier der Fall $\mathcal{F}_{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n}$ vorliegt.

Lemma 7: Es bezeichne $\mathcal{G}_K := \{F \in \mathcal{F} \mid F \subseteq K\}$ für $K \subseteq \mathfrak{X}$. Dann gilt $\mathcal{G}_K \in \mathfrak{F}$ für alle $K \in \mathcal{F} \cup \mathcal{O}$, und folgende Mengensysteme sind neben \mathcal{E}_0 ebenfalls Erzeuger von \mathfrak{F} :

$$\mathcal{E}_1 := \{\mathcal{F}_O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

$$\mathcal{E}_2 := \{\mathcal{F}_A \mid A \in \mathcal{F}\}$$

$$\mathcal{E}_3 := \{\mathcal{F}_I \mid I \in \mathcal{I}\}$$

$$\mathcal{E}_4 := \{\mathcal{G}_O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

$$\mathcal{E}_5 := \{\mathcal{G}_A \mid A \in \mathcal{F}\}.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Erzeugereigenschaften von \mathcal{E}_1 bis \mathcal{E}_3 :

Zu \mathcal{E}_1 : Sei $O \in \mathcal{O}$. Dann existiert eine Folge $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}$ kompakter d -dimensionaler Kugeln mit $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Also gilt $\mathcal{F}_O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{K_n} \in \mathfrak{F}$ nach Lemma 6 a). Damit folgt $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathfrak{F}$ und somit auch $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathfrak{F}$. Umgekehrt existiert zu einer beliebigen nicht-leeren kompakten Menge $K \in \mathcal{K}$ eine Folge $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}$ offener Mengen mit $O_n \downarrow K$ (denn die offene Menge K^c kann nach obigem von unten monoton durch kompakte Kugeln $\{\tilde{K}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}$ approximiert werden; setze dann $O_n = \tilde{K}_n^c$.) Es folgt also $\mathcal{F}_K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{O_n} \in \sigma(\mathcal{E}_1)$ und damit $\mathfrak{F} = \sigma(\mathcal{E}_0) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathfrak{F}$, also $\sigma(\mathcal{E}_1) = \mathfrak{F}$.

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Zu \mathcal{E}_2 : Es gilt $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}_2$ und damit $\mathfrak{F} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$. Umgekehrt existiert eine Folge $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ (z.B. kompaktifizierte Standard-Intervalle $K_n = \times_{i=1}^d [-n, n]$). Für beliebiges $A \in \mathcal{F}$ folgt dann $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap K_n)$ mit kompakten Mengen $A \cap K_n$, so dass $\mathcal{F}_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A \cap K_n} \in \mathfrak{F}$ folgt, also $\mathfrak{F} = \sigma(\mathcal{E}_0) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathfrak{F}$ und somit $\mathfrak{F} = \sigma(\mathcal{E}_2)$.

Zu \mathcal{E}_3 : Zu jedem $I = \times_{i=1}^d (a_i, b_i] \in \mathcal{E}_3$ existiert eine Folge $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}$ mit $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ (z.B. kompaktifizierte Standard-Intervalle $K_n = \times_{i=1}^d \left[\frac{n-1}{n} a_i, b_i \right]$). Es folgt also $\mathcal{F}_I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{K_n} \in \mathfrak{F}$ und somit $\sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \mathfrak{F}$. Ferner existiert zu jeder offenen Menge $O \in \mathcal{O}$ eine Folge $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ mit $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, so dass $\mathcal{F}_O \in \sigma(\mathcal{E}_3)$ und damit $\mathfrak{F} = \sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \mathfrak{F}$ folgt, also insgesamt auch $\mathfrak{F} = \sigma(\mathcal{E}_3)$.

Wir können jetzt zeigen, dass $\mathcal{G}_K \in \mathfrak{F}$ für alle $K \in \mathcal{F} \cup \mathcal{O}$ gilt, denn mit einer einfachen Umformung erhalten wir

$$\mathcal{G}_K = \{F \in \mathcal{F} \mid F \subseteq K\} = \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap K^c = \emptyset\} = \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap K^c \neq \emptyset\}^c = \mathcal{F}_{K^c} \in \mathfrak{F}$$

unter Beachtung der Tatsache, dass Komplemente offener Mengen abgeschlossen sind und umgekehrt.

Damit sind aber auch \mathcal{E}_4 und \mathcal{E}_5 Erzeuger von \mathfrak{F} wegen $\mathcal{E}_4 = \{\mathcal{G}_O \mid O \in \mathcal{O}\} = \{\mathcal{F}_A^c \mid A \in \mathcal{F}\}$ und $\mathcal{E}_5 = \{\mathcal{G}_A \mid A \in \mathcal{F}\} = \{\mathcal{F}_O^c \mid O \in \mathcal{O}\}$. ■

Bemerkungen:

- Die Erzeuger \mathcal{E}_0 bis \mathcal{E}_3 sind *nicht* durchschnittstabil, wohl aber \mathcal{E}_4 und \mathcal{E}_5 . Beispielsweise gilt für disjunkte $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ nur

$$\mathcal{F}_{K_1} \cap \mathcal{F}_{K_2} = \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap K_1 \neq \emptyset \text{ und } F \cap K_2 \neq \emptyset\} \subseteq \mathcal{F}_{K_1 \cup K_2}$$

ohne Gleichheit. Insbesondere ist $\mathcal{F}_{K_1} \cap \mathcal{F}_{K_2} \neq \mathcal{F}_K$ für jedes $K \in \mathcal{K}$. Denn entweder ist K zu K_1, K_2 disjunkt - in diesem Fall gilt $K \in \mathcal{F}_K$, aber $K \notin \mathcal{F}_{K_1} \cap \mathcal{F}_{K_2}$ - oder es gilt $K \cap (K_1 \cup K_2) \neq \emptyset$, o.B.d.A. $F := K \cap K_1 \neq \emptyset$. In diesem Fall gilt $F \in \mathcal{F}_K$, aber $F \cap K_2 = \emptyset$ und somit $F \notin \mathcal{F}_{K_1} \cap \mathcal{F}_{K_2}$. \mathcal{E}_0 ist also nicht durchschnittstabil (analog argumentiert man für \mathcal{E}_1 bis \mathcal{E}_3).

Andererseits gilt beispielsweise für alle $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$

$$\mathcal{G}_{O_1} \cap \mathcal{G}_{O_2} = \{F \in \mathcal{F} \mid F \subseteq O_1 \text{ und } F \subseteq O_2\} = \{F \in \mathcal{F} \mid F \subseteq O_1 \cap O_2\} = \mathcal{G}_{O_1 \cap O_2},$$

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

d.h. \mathcal{E}_4 ist durchschnittstabil (analog argumentiert man für \mathcal{E}_5).

- Es lässt sich zeigen, dass auch die Systeme \mathcal{G}_k und $\mathcal{H}_k := \{F \in \mathcal{F} \mid F \supseteq K\}$ für $K \in \mathcal{K}$ (durchschnittstabile) Erzeuger von \mathfrak{F} sind, ebenso \mathcal{H}_O für $O \in \mathcal{O}$ und \mathcal{H}_A für $A \in \mathcal{F}$.

Lemma 8: Es sei $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Mengenfolge mit $A_n \subseteq \mathfrak{X}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Es gilt ohne weitere Einschränkungen: $\mathcal{G}_{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{A_n}$.

b) Unter der Voraussetzung $A_n \uparrow A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ für eine Menge $A \subseteq \mathfrak{X}$, wobei die A_n^c kompakt sind für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auch: $\mathcal{G}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{A_n}$.

Beweis: Mit Lemma 6 folgt:

a) $\mathcal{G}_{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \mathcal{F}^c \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c = \mathcal{F}^c \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n^c} \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n^c}^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{A_n}$

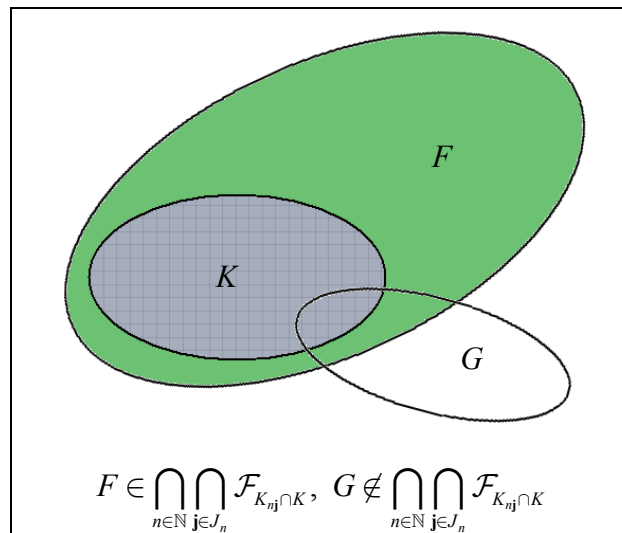
b) $\mathcal{G}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \mathcal{F}^c \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c = \mathcal{F}^c \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n^c} \right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n^c}^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{A_n}$, weil $A_n^c \downarrow A^c = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k^c$.

Satz 12: Es bezeichne $\mathcal{H}_K := \{F \in \mathcal{F} \mid F \supseteq K\}$ für $K \in \mathcal{K}$. Dann gilt $\mathcal{H}_K \in \mathfrak{F}$.

Beweis: Sei $K_{nj} = \times_{i=1}^d \left[\frac{j_i}{n}, \frac{j_i+1}{n} \right] \in \mathcal{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir zur Abkürzung $J_n := \{ \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d \mid K_{nj} \cap K \neq \emptyset \}$. Es gilt $\mathfrak{X} = \bigcup_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} K_{nj}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathcal{H}_K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\mathbf{j} \in J_n} \mathcal{F}_{K_{nj} \cap K}.$$

Dies sieht man wie folgt:



II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Ist $F \in \mathcal{H}_K$, so gilt $F \supseteq H$ für alle Teilmengen H von K , also ist insbesondere $F \supseteq K_{n\mathbf{j}} \cap K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$ und somit $F \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\mathbf{j} \in J_n} \mathcal{F}_{K_{n\mathbf{j}} \cap K}$ bzw. $\mathcal{H}_K \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\mathbf{j} \in J_n} \mathcal{F}_{K_{n\mathbf{j}} \cap K}$. Ist umgekehrt $F \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\mathbf{j} \in J_n} \mathcal{F}_{K_{n\mathbf{j}} \cap K}$, so ist F abgeschlossen, und es gilt $F \cap K_{n\mathbf{j}} \cap K \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{j} \in J_n$. Angenommen, es gibt einen Punkt $x \in K \setminus F$. Dann existiert eine Folge von Indices $\{\mathbf{j}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}^d$ mit $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (K_{n\mathbf{j}_n} \cap K)$. Wegen $F \cap K_{n\mathbf{j}_n} \cap K \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ferner eine Folge von Punkten $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in F \cap K_{n\mathbf{j}_n} \cap K \subseteq F$. Es folgt also $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, und wegen der Abgeschlossenheit von F : $x \in F$! Also ist $F \supseteq K$ und damit $F \in \mathcal{H}_K$. Damit ist die Gleichheit $\mathcal{H}_K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\mathbf{j} \in J_n} \mathcal{F}_{K_{n\mathbf{j}} \cap K}$ gezeigt. Die Abzählbarkeit der Durchschnittsbildung impliziert aber sofort die Behauptung, weil mit $F \in \mathcal{F}$ alle Mengen $F \cap K_{n\mathbf{j}}$ kompakt sind, also $\mathcal{F}_{K_{n\mathbf{j}} \cap K} \in \mathfrak{F}$ gilt. ■

Bemerkung: Aus dem letzten Satz bzw. der Bemerkung am Ende von Lemma 7 ergibt sich insbesondere die interessante Schlussfolgerung, dass für jede kompakte bzw. allgemeiner abgeschlossene Menge $F \in \mathcal{F}$ wegen $\{F\} = \mathcal{G}_F \cap \mathcal{H}_F$ auch $\{F\} \in \mathfrak{F}$ liegt.

Definition 6: Es sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Zufallselement $\Xi : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathfrak{F})$ heißt *zufällige abgeschlossene Menge (ZAM)*. Die durch

$$T_{\Xi}(K) := P(\Xi \cap K \neq \emptyset) = P(\Xi \in \mathcal{F}_K) = P^{\Xi}(\mathcal{F}_K), \quad K \in \mathcal{K}$$

auf \mathcal{K} definierte Abbildung heißt das zu Ξ gehörige (oder von Ξ induzierte) *Kapazitätsfunktional*.

Lemma 9: Das Kapazitätsfunktional einer ZAM Ξ besitzt folgende Eigenschaften:

- a) $0 \leq T_{\Xi} \leq 1$ mit $T_{\Xi}(\emptyset) = 0$
- b) Ist $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}$ eine monoton fallende Folge kompakter Mengen mit $K_n \downarrow K \in \mathcal{K}$, so gilt auch $T_{\Xi}(K_n) \downarrow T_{\Xi}(K)$ für $n \rightarrow \infty$.
- c) Die Abbildungen S_n seien für $n \in \mathbb{Z}^+$ induktiv wie folgt definiert:

$$S_0(K) := 1 - T_{\Xi}(K) = P(\Xi \cap K = \emptyset) \quad \text{für } K \in \mathcal{K}$$

$$S_n(K; K_1, \dots, K_n) := S_{n-1}(K; K_1, \dots, K_{n-1}) - S_{n-1}(K \cup K_n; K_1, \dots, K_{n-1})$$

für $K, K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$S_n(K; K_1, \dots, K_n) = -T_{\Xi}(K) + \sum_{i=1}^n T_{\Xi}(K \cup K_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} T_{\Xi}(K \cup K_i \cup K_j) \pm \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} T_{\Xi}\left(K \cup \bigcup_{i=1}^n K_i\right) \geq 0$$

für $K, K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$.

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Beweis:

a) Trivial

b) Zunächst gilt $\{\Xi \cap K_n \neq \emptyset\} = \Xi^{-1}(\mathcal{F}_{K_n}) \downarrow \Xi^{-1}(\mathcal{F}_K) = \{\Xi \cap K \neq \emptyset\}$ wegen $\mathcal{F}_{K_n} \downarrow \mathcal{F}_K$ nach Lemma 1 b). Teil c) folgt induktiv; beachte dazu:

$$S_1(K; K_1) = S_0(K) - S_0(K \cup K_1) = (1 - T_{\Xi}(K)) - (1 - T_{\Xi}(K \cup K_1)) = -T_{\Xi}(K) + T_{\Xi}(K \cup K_1)$$

usw. ■

Bemerkung: Es gilt auch

$$S_n(K; K_1, \dots, K_n) = P\left(\{\Xi \cap K = \emptyset\} \cap \bigcap_{i=1}^n \{\Xi \cap K_i \neq \emptyset\}\right) = 1 - P\left(\{\Xi \cap K \neq \emptyset\} \cup \bigcup_{i=1}^n \{\Xi \cap K_i = \emptyset\}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ (\rightarrow Siebformel; vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Satz 5).

Satz 13 (Choquet): Ist T ein Funktional auf \mathcal{K} , das die Eigenschaften a) bis c) von Lemma 9 erfüllt, so existiert eine eindeutig bestimmte Verteilung Q auf \mathfrak{F} mit

$$T(K) = Q(\mathcal{F}_K) \text{ für alle } K \in \mathcal{K}.$$

Der Beweis ist sehr aufwändig; wir verweisen hier auf SCHNEIDER UND WEIL (2000), Abschnitt 2.2. Das wesentliche Problem besteht hier darin, dass der Erzeuger $\mathcal{E}_0 = \{\mathcal{F}_K \mid K \in \mathcal{K}\}$ nicht durchschnittstabil, also insbesondere kein Semiring ist, so dass der große Maßfortsetzungssatz (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Satz 7) nicht direkt angewendet werden kann.

Lemma 10: Die folgenden Abbildungen sind messbar:

a) $U: \mathbb{R}^d \ni \mathbf{x} \mapsto \{\mathbf{x}\} \in \mathcal{F}^d$

b) $V_i: \mathbb{R}^d \ni \mathbf{x} \mapsto \{x_i\} \in \mathcal{F}^1$ für jedes feste $i \in \{1, \dots, d\}$.

Beweis:

a) Für $K \in \mathcal{K}^d$ gilt: $U^{-1}(\mathcal{F}_K^d) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid U(\mathbf{x}) \in \mathcal{F}_K^d\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \{\mathbf{x}\} \cap K \neq \emptyset\} = K \in \mathcal{B}^d$. Damit ist die Behauptung gezeigt, da \mathcal{E}_0 ein Erzeuger von \mathfrak{F} ist (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Lemma 10).

b) Für $K \in \mathcal{K}^1$ gilt (mit geeigneter Symbol-Interpretation):

$$V_i^{-1}(\mathcal{F}_K^1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid V_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{F}_K^1\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \{x_i\} \cap K \neq \emptyset\} = \mathbb{R}^{i-1} \times K \times \mathbb{R}^{d-i} \in \mathcal{B}^d. \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Lemma 10 b) impliziert, dass für einen d -dimensionalen Zufallsvektor \mathbf{X} die Projektion $\Xi_i = \{X_i\}$ eine ZAM in \mathbb{R}^1 ist.

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

II.2. Messbare Operationen mit zufälligen abgeschlossenen Mengen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die üblichen Mengenoperationen wie Vereinigung, Durchschnitt, kartesische Produkte usw. messbare Abbildungen sind, so dass solche Operationen, angewendet auf zufällige abgeschlossene Mengen, auch wieder zufällige abgeschlossene Mengen ergeben.

Lemma 11: Die Mengenoperationen „Vereinigung“ und „Durchschnitt“ auf \mathcal{F} sind \mathfrak{F} -messbar.

Beweis: Die Systeme $\{\mathcal{G}_K | K \in \mathcal{K}\}$ und $\{\mathcal{H}_K | K \in \mathcal{K}\}$ sind Erzeuger von \mathfrak{F} .

„Vereinigung“: Es sei $V : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} : (F, G) \mapsto F \cup G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} V^{-1}(\mathcal{G}_K) &= \{(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} | F \cup G \in \mathcal{G}_K\} = \{(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} | F \cup G \subseteq K\} \\ &= \{(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} | F \subseteq K \text{ und } G \subseteq K\} = \mathcal{G}_K \times \mathcal{G}_K \in \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

„Durchschnitt“: Es sei $D : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} : (F, G) \mapsto F \cap G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D^{-1}(\mathcal{H}_K) &= \{(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} | F \cap G \in \mathcal{H}_K\} = \{(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} | F \cap G \supseteq K\} \\ &= \{(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} | F \supseteq K \text{ und } G \supseteq K\} = \mathcal{H}_K \times \mathcal{H}_K \in \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man, dass auch endliche Vereinigungen und abzählbare Durchschnitte auf \mathcal{F} messbare Mengenoperationen sind.

Bemerkungen:

- Es ergibt sich für Lemma 10 b) sofort folgende Verallgemeinerung: Die Abbildung V mit $V : \mathbb{R}^d \ni \mathbf{x} \mapsto \{x_1, \dots, x_d\} = \bigcup_{i=1}^d \{x_i\} \in \mathcal{F}^1$ ist messbar, so dass für einen d -dimensionalen Zufallsvektor \mathbf{X} die Menge der Koordinatenwerte $\{X_1, \dots, X_d\}$ eine ZAM ist (ggf. nach Streichung von Vielfachheiten).
- Endliche (auch zufällige) Vereinigungen und abzählbare (auch zufällige) Durchschnitte von ZAM sind wieder ZAM.
- Die durch $W : \mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{F}^d : F \mapsto \overline{F^c}$ und $R : \mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{F}^d : F \mapsto \partial F$ definierten Abbildungen (Abschluss des Komplements von F bzw. Rand von F) sind \mathfrak{F}^d - \mathfrak{F}^d -messbar (vgl. SCHNEIDER UND WEIL (2000), Satz 2.1.4).

Lemma 12: Die Abbildung $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei stetig, für $n, m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Urbildabbildung $U : \mathcal{F}^m \rightarrow \mathcal{F}^n : F \mapsto R^{-1}(F)$ für $F \in \mathcal{F}$ \mathfrak{F}^m - \mathfrak{F}^n -messbar.

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Beweis: Es gilt $U^{-1}(\mathcal{F}_K^n) = \{F \in \mathcal{F}^n \mid R^{-1}(F) \cap K \neq \emptyset\} = \{F \in \mathcal{F}^n \mid F \cap R(K) \neq \emptyset\} = \mathcal{F}_{R(K)}^n \in \mathfrak{F}^n$, da auf Grund der Stetigkeit von R die Menge $R(K)$ kompakt ist. Beachte dabei:

$$x \in R^{-1}(F) \cap K \Leftrightarrow R(x) \in F \text{ und } x \in K \Rightarrow R(x) \in F \text{ und } R(x) \in R(K) \Leftrightarrow R(x) \in F \cap R(K)$$

sowie

$$y \in F \cap R(K) \Rightarrow y \in F \text{ und } y = T(x) \text{ für ein } x \in K \Rightarrow x \in R^{-1}(F) \cap K. \blacksquare$$

Bemerkung: Mit Ξ ist dann auch $R^{-1}(\Xi)$ eine ZAM.

Lemma 13: Die Mengenoperation „kartesisches Produkt“ für abgeschlossene Mengen ist messbar.

Beweis: Wir verwenden die stetigen Projektionsabbildungen $U: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n: (x, y) \mapsto x$ und $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m: (x, y) \mapsto y$ für festes $n, m \in \mathbb{N}$. Es ist $U^{-1}(F) = F \times \mathbb{R}^m$ und $V^{-1}(G) = \mathbb{R}^n \times G$ für $F \in \mathcal{F}^n$ und $G \in \mathcal{F}^m$. Die Aussage folgt nun aus der Beziehung

$$F \times G = U^{-1}(F) \cap V^{-1}(G) \text{ für } F \in \mathcal{F}^n \text{ und } G \in \mathcal{F}^m$$

(Komposition der messbaren Operationen „Urbild“ und „Durchschnitt“). Es ist evident, dass die Aussage auch auf kartesische Produkte mit abzählbar vielen Faktoren ausgedehnt werden kann. ■

Bemerkung: mit zwei n - bzw. m -dimensionalen ZAM Ξ_1 und Ξ_2 ist also auch $\Xi_1 \times \Xi_2$ eine ZAM.

Lemma 14: Die Abbildung $S: \mathcal{F}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}: (F, x) \mapsto \mathbb{1}_F(x)$ ist $\mathfrak{F}^d \otimes \mathcal{B}^d$ -messbar.

Beweis: Sei wieder $K_{n\mathbf{j}} = \times_{i=1}^d \left[\frac{j_i}{n}, \frac{j_i+1}{n} \right] \in \mathcal{K}^d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$, mit $\mathbb{R}^d = \bigcup_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} K_{n\mathbf{j}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$S^{-1}(\{1\}) = \{(F, x) \in \mathcal{F}^d \times \mathbb{R}^d \mid x \in F\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}_{K_{n\mathbf{j}}}^d \times K_{n\mathbf{j}} \in \mathfrak{F}^d \otimes \mathcal{B}^d.$$

Wir zeigen beide Inklusionen separat:

$$1. \quad S^{-1}(\{1\}) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}_{K_{n\mathbf{j}}}^d \times K_{n\mathbf{j}}:$$

Sei $F \in \mathcal{F}^d$ und $x \in F$. Dann existiert eine Folge $\{\mathbf{j}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}^d$ von Indices mit $x \in K_{n\mathbf{j}_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $x \in F \cap K_{n\mathbf{j}_n} \neq \emptyset$ und somit $(F, x) \in \mathcal{F}_{K_{n\mathbf{j}_n}}^d \times K_{n\mathbf{j}_n} \subseteq \bigcup_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}_{K_{n\mathbf{j}}}^d \times K_{n\mathbf{j}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit die Inklusion gezeigt ist.

$$2. \quad S^{-1}(\{1\}) \supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}_{K_{n\mathbf{j}}}^d \times K_{n\mathbf{j}}:$$

Sei $(F, x) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}_{K_{n\mathbf{j}}}^d \times K_{n\mathbf{j}}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert dann ein $\mathbf{j}_n \in \mathbb{Z}^d$ mit $x \in K_{n\mathbf{j}_n}$ und $F \cap K_{n\mathbf{j}_n} \neq \emptyset$. Wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in F \cap K_{n\mathbf{j}_n}$ aus. Dann folgt $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, und wegen der Abgeschlossenheit von F also $x \in F$, was zu zeigen war. ■

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Für das nachfolgende wichtige Ergebnis benötigen wir noch eine Definition und einen Hilfssatz.

Definition 7: Es sei (Ω, \mathcal{A}) ein beliebiger Messraum. Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ heißt *Dynkin-System* (über Ω), wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

$$\Omega \in \mathcal{D}$$

$$A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$$

$$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D} \text{ paarweise disjunkt} \Rightarrow \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}.$$

Ist $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein beliebiges Mengensystem, so bezeichnet $\delta(\mathcal{E})$ das von \mathcal{E} erzeugte Dynkin-System (über Ω).

Lemma 15: Unter den Voraussetzungen von Definition 7 gilt: Ein Dynkin-System \mathcal{D} ist genau dann eine σ -Algebra, wenn \mathcal{D} durchschnittstabil ist.

Beweis: Skript zur STOCHASTIK, Satz 1.

Satz 14: Unter den Voraussetzungen von Definition 7 gilt für jedes durchschnittstabile Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$:

$$\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}),$$

d.h. das von \mathcal{E} erzeugte Dynkin-System stimmt mit der von \mathcal{E} erzeugten σ -Algebra überein.

Beweis: Offensichtlich gilt $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, da jede σ -Algebra trivialerweise ein Dynkin-System ist. Nach Lemma 15 bleibt also nur zu zeigen, dass mit \mathcal{E} auch $\delta(\mathcal{E})$ durchschnittstabil ist, denn dann ist $\delta(\mathcal{E})$ eine σ -Algebra, und aus $\mathcal{E} \subseteq \delta(\mathcal{E})$ folgt sofort auch $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E})$, also die umgekehrte Inklusion. Dazu definieren wir $\mathcal{D}_D := \{Q \subseteq \Omega \mid Q \cap D \in \delta(\mathcal{E})\}$ für beliebiges, aber festes $D \in \delta(\mathcal{E})$.

\mathcal{D}_D ist aber selbst auch ein Dynkin-System, denn: trivialerweise gilt $\Omega \in \mathcal{D}_D$, und für $A \in \mathcal{D}_D$ folgt $A \cap D \in \delta(\mathcal{E})$ und somit auch $D^c \oplus (A \cap D) \in \delta(\mathcal{E})$, also auch $A^c \cap D = (D^c \oplus (A \cap D))^c \in \delta(\mathcal{E})$, was $A^c \in \mathcal{D}_D$ impliziert. Für paarweise disjunkte Mengen $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_D$ folgt schließlich noch

$\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap D = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A_n \cap D)}_{\in \delta(\mathcal{E})} \in \delta(\mathcal{E})$, also $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_D$, womit gezeigt ist, dass \mathcal{D}_D ein Dynkin-System

ist. Für jedes $E \in \mathcal{E}$ gilt nun aber wegen der vorausgesetzten Durchschnittstabilität $F \cap E \in \mathcal{E} \subseteq \delta(\mathcal{E})$ bzw. $F \in \mathcal{D}_E$ für alle $F \in \mathcal{E}$ und somit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E$, also auch $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E$ für jedes $E \in \mathcal{E}$. Für jedes $D \in \delta(\mathcal{E})$ gilt also $E \cap D \in \delta(\mathcal{E})$, was $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_D$ und somit auch $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_D$ impliziert. Mit anderen Worten: Für jedes $D \in \delta(\mathcal{E})$ und jedes $F \in \delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_D$ gilt also $F \cap D \in \delta(\mathcal{E})$, was zu zeigen war. ■

Als Folgerung hieraus ergibt sich noch

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Lemma 16: Es sei (Ω, \mathcal{A}) ein beliebiger Messraum und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ ein Dynkin-System, welches einen durchschnittstabilen Erzeuger \mathcal{E} von \mathcal{A} enthält. Dann gilt $\mathcal{D} = \mathcal{A}$.

Beweis: Nach Satz 14 ist $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$, woraus die Behauptung folgt. ■

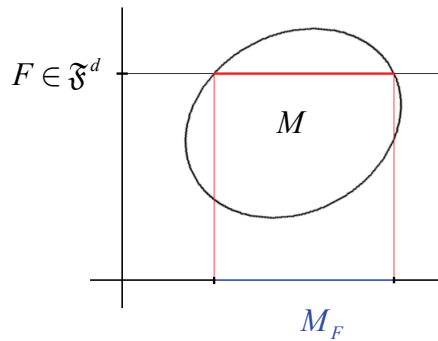
Wir kommen jetzt zu dem angekündigten Resultat bezüglich der Theorie zufälliger abgeschlossener Mengen. Wie greifen dafür hier die am Anfang des Abschnitts eingeführte Terminologie wieder auf.

Satz 15: Es sei μ ein σ -endliches Maß auf der Borel- σ -Algebra \mathcal{B}^d und für $B \in \mathcal{B}^d$ die Abbildung T_B definiert durch:

$$T_B : \mathcal{F}^d \rightarrow \mathbb{R}^+ : F \mapsto \mu_B(F) := \mu(F \cap B) \quad [\text{Spurmaß}].$$

Dann ist T_B \mathfrak{F}^d -messbar für jedes $B \in \mathcal{B}^d$.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnung $M_F := \{x \in \mathbb{R}^d \mid (F, x) \in M\}$ für alle $M \in \mathfrak{F}^d \otimes \mathcal{B}^d$ und $F \in \mathfrak{F}^d$ (jede dieser Mengen gehört zu \mathcal{B}^d als Bild der Projektion einer „Schnittmenge“).



$B \in \mathcal{B}^d$ ist nachfolgend fest gewählt.

1. Zunächst sei μ endlich (und damit auch μ_B). Betrachte für $M \in \mathfrak{F}^d \otimes \mathcal{B}^d$ die Abbildung

$$S_M : \mathcal{F}^d \rightarrow \mathbb{R}^+ : F \mapsto \mu_B(M_F).$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{D} := \{M \in \mathfrak{F}^d \otimes \mathcal{B}^d \mid S_M \text{ ist } \mathfrak{F}^d\text{-messbar}\}$ ein Dynkin-System über $\mathcal{F}^d \times \mathbb{R}^d$ ist, welches einen durchschnittstabilen Erzeuger von $\mathfrak{F}^d \otimes \mathcal{B}^d$ enthält und damit nach Lemma 16 mit der σ -Algebra $\mathfrak{F}^d \otimes \mathcal{B}^d$ zusammenfällt.

a. Es gilt für $M = \mathcal{F}^d \times \mathbb{R}^d$: $M_F = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (F, x) \in M\} = \mathbb{R}^d$ für alle $F \in \mathcal{F}^d$ und somit $S_M(F) = \mu_B(M_F) = \mu_B(\mathbb{R}^d)$ für alle $F \in \mathcal{F}^d$, d.h. S_M ist in diesem Fall eine konstante Abbildung (mit den Urbildern \emptyset und \mathcal{F}^d) und somit \mathfrak{F}^d -messbar. Es gilt also $M = \mathcal{F}^d \times \mathbb{R}^d \in \mathcal{D}$.

b. Es sei $M \in \mathcal{D}$. Dann gilt $(M^c)_F = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (F, x) \in M^c\} = \mathbb{R}^d \setminus M_F$, so dass

$$S_{M^c}(F) = \mu_B(\mathbb{R}^d \setminus M_F) = \mu_B(\mathbb{R}^d) - \mu_B(M_F)$$

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

und somit $S_{M^c} = \mu(B) - S_M$ folgt, also S_{M^c} als Differenz messbarer Abbildungen wieder \mathfrak{F}^d -messbar ist, so dass mit $M \in \mathcal{D}$ auch $M^c \in \mathcal{D}$ gilt.

- c. Für paarweise disjunkte $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ folgt in analoger Weise $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n\right)_F = \bigoplus_{n=1}^{\infty} (M_n)_F$ und somit $S_{\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n}(F) = \mu_B\left(\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n\right)_F\right) = \mu_B\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} (M_n)_F\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_B((M_n)_F) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{M_n}(F)$ für alle $F \in \mathcal{F}^d$, d.h. $S_{\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{M_n}$ ist \mathfrak{F}^d -messbar, so dass $\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathcal{D}$ folgt.

Damit ist \mathcal{D} ein Dynkin-System, welches den durchschnittstabilen Erzeuger $\mathcal{E} = \{\mathcal{G} \times C \mid \mathcal{G} \in \mathfrak{F}^d, C \in \mathcal{B}^d\}$ enthält. Dies sieht man so: Sei $M := \mathcal{G} \times C \in \mathcal{E}$, so ist

$$M_F = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (F, x) \in M\} = \begin{cases} C, & \text{falls } F \in \mathcal{G} \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit}$$

$$S_M(F) = \mu_B(M_F) = \begin{cases} \mu_B(C), & \text{falls } F \in \mathcal{G} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \mathbb{1}_{\mathcal{G}}(F) \cdot \mu_B(C), \quad \text{also } S_M = \mu_B(C) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{G}}, \quad \text{woraus}$$

$M \in \mathcal{D}$ folgt. Nach Lemma 16 ist damit die Aussage, dass für endliches μ das Dynkin-System $\mathcal{D} := \{M \in \mathfrak{F}^d \otimes \mathcal{B}^d \mid S_M \text{ ist } \mathfrak{F}^d\text{-messbar}\}$ mit der σ -Algebra $\mathfrak{F}^d \otimes \mathcal{B}^d$ zusammenfällt, bewiesen. Insbesondere ist also in diesem Fall die Abbildung S_M \mathfrak{F}^d -messbar. Wählt man nun speziell

$$M := \{(G, x) \mid x \in G \in \mathcal{B}^d\},$$

so ist $M \in \mathfrak{F}^d \otimes \mathcal{B}^d$ mit $M_F = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (F, x) \in M\} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \in F\} = F$, und es gilt

$$S_M(F) = \mu_B(M_F) = \mu_B(F) = \mu(F \cap B) = T_B(F) \quad \text{für alle } F \in \mathcal{F}^d,$$

also $S_M = T_B$, womit gezeigt ist, dass T_B \mathfrak{F}^d -messbar ist für jedes $B \in \mathcal{B}^d$.

2. Ist allgemeiner μ σ -endlich, so auch μ_B , und es existiert eine monoton wachsende Folge

$\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}^d$ von Borel-Mengen mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \mathbb{R}^d$ und $\mu(B_n) < \infty$. Es folgt

$$\mu_B(F) = \mu(F \cap B) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(F \cap B \cap B_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_{B \cap B_n}(F) \quad \text{für alle } F \in \mathcal{F}^d,$$

also $T_B = \sup_{n \in \mathbb{N}} T_{B \cap B_n}$, d.h. T_B ist als Supremum messbarer Abbildungen auch in diesem Fall \mathfrak{F}^d -messbar. Damit ist der Satz bewiesen. ■

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Satz 16 („Robbin’s Theorem“): Es sei μ ein σ -endliches Maß auf \mathcal{B}^d und Ξ eine zufällige abgeschlossene Menge. Dann gilt:

a) $\mu_{\Xi}(B) = \mu(\Xi \cap B) = \mu_B(\Xi)$ ist eine nicht-negative Zufallsvariable für alle $B \in \mathcal{B}^d$.

b) $E[\mu_{\Xi}(B)] = E[\mu(\Xi \cap B)] = \int_B T_{\Xi}(\{x\}) \mu(dx)$ für alle $B \in \mathcal{B}^d$.

Beweis:

a) Folgt direkt aus Satz 15 (Verkettung messbarer Abbildungen).

b) Mit dem Satz von Fubini ergibt sich:

$$\begin{aligned} E[\mu(\Xi \cap B)] &= E[\mu_B(\Xi)] = \iint \mathbb{1}_{\Xi(\omega)}(x) \mu_B(dx) P(d\omega) = \int \mathbb{1}_B(x) \int \mathbb{1}_{\{\Xi \cap \{x\} \neq \emptyset\}}(\omega) P(d\omega) \mu(dx) \\ &= \int P(\Xi \cap \{x\} \neq \emptyset) \mu(dx) = \int_B T_{\Xi}(\{x\}) \mu(dx), \end{aligned}$$

wobei noch zu beachten ist, dass $x \in \Xi(\omega)$ genau dann gilt, wenn $\Xi(\omega) \cap \{x\} \neq \emptyset$ ist. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Bemerkung: Das Zufallselement $\mu_{\Xi}(\cdot)$ ist ein zufälliges Maß im Sinne der Definition 1, Kapitel 1. Allerdings ist hierbei die σ -Endlichkeit des Maßes μ wesentlich:

Gegenbeispiel: Sei $g: \mathbb{R}^d \rightarrow [1, \infty]$ nicht-messbar. Definiere ein Maß μ auf \mathcal{B}^d durch

$$\mu(B) = \begin{cases} \sum_{x \in B} g(x), & \text{wenn } B \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\mu_{\Xi}(B)$ für $B \in \mathcal{B}^d$ i.a. keine Zufallsvariable: ist etwa P eine Verteilung auf \mathcal{B}^d und wählen wir als Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, P)$ mit der Abbildung $X = id$ (Identität) sowie als zufällige abgeschlossene Menge $\Xi = \{X\}$, so ist $\mu_{\Xi}(\mathbb{R}^d) = g(X)$, also $\mu_{\Xi}(\mathbb{R}^d)$ nicht messbar.

Es gilt allerdings uneingeschränkt: $\mu_{\Xi}(\cdot)$ ist ein zufälliges Maß für den Fall $\mu = \#$ (abzählendes Maß), auch wenn $\#$ auf der σ -Algebra \mathcal{B}^d nicht σ -endlich ist!

Lemma 17: Es sei $F \in \mathcal{F}^d$ mit $\mathbf{0} \in F$. Dann ist die *Skalierungs-Abbildung*

$$\rho: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{F}^d: r \mapsto r \cdot F := \{r \cdot x \mid x \in F\}$$

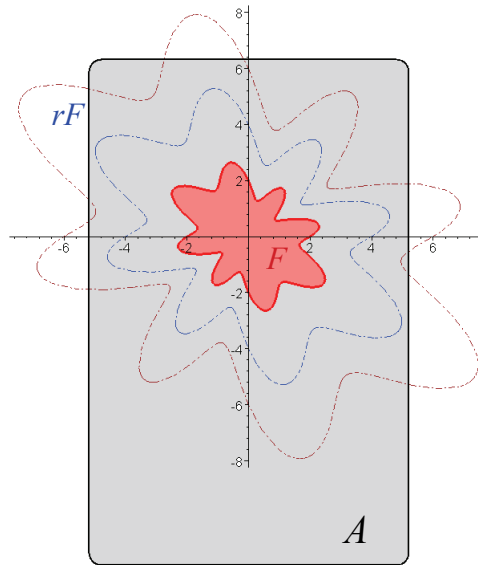
\mathcal{B}^1 - \mathfrak{F}^d -messbar.

Beweis: Es genügt, die ρ -Urbilder eines Erzeugers von \mathfrak{F}^d zu betrachten (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Lemma 10). Wir wählen hier speziell den Erzeuger \mathcal{E}_5 aus Lemma 7. Es gilt für eine beliebige Menge $A \in \mathcal{F}^d$:

$$\rho^{-1}(\mathcal{G}_A) = \{r \geq 0 \mid rF \subseteq A\} = \begin{cases} \emptyset, & \mathbf{0} \notin A \\ I(F, A), & \mathbf{0} \in A, \end{cases}$$

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

wobei $I(F, A)$ ein von F und A abhängiges abgeschlossenes Intervall ist, so dass $\rho^{-1}(\mathcal{G}_A) \in \mathcal{B}^1$ gilt, also die Messbarkeit gezeigt ist. ■



Skizze zum Beweis von Lemma 17

Bemerkung: Lemma 17 impliziert, dass das Objekt $\Xi := R \cdot F$ eine ZAM bildet, wenn R eine nicht-negative reelle Zufallsvariable ist. Diese Tatsache führt uns später zu einer mathematischen Formulierung eines *Minimal-Areals* mit Anwendungen in der Biologie und Ökologie.

Ist speziell $F = K(1)$ der Einheitskreis in $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^2$, so ist also $\Xi = R \cdot F = K(R)$ mit dem Kapazitätsfunktional

$$T_{\Xi}(\{x\}) = P(x \in \Xi) = P(R \geq \|x\|_2) = 1 - F_R(\|x\|_2) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2,$$

wobei hier zusätzlich angenommen sei, dass die Verteilungsfunktion F_R von R stetig ist. Eine formale Anwendung von Satz 16 ergibt dann mit dem σ -endlichen Lebesgue-Maß $\mu = m^2$ nach Umrechnung in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} E[\mu(\Xi)] &= \int_{\mathbb{R}^2} T_{\Xi}(\{x\}) \mu(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - F_R(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})\right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r \cdot (1 - F_R(r)) dr d\varphi = \pi \int_0^{\infty} 2r \cdot (1 - F_R(r)) dr = \pi \int_0^{\infty} \underset{r=\sqrt{z}}{\uparrow} (1 - F_R(\sqrt{z})) dz \\ &= \pi \int_0^{\infty} (1 - F_{R^2}(z)) dz = \pi \cdot E(R^2), \end{aligned}$$

was wegen $\mu(\Xi) = \pi R^2$ zu erwarten war.

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Definition 8: Eine d -dimensionale ZAM Ξ heißt *stationär*, wenn $P^\Xi = P^{\Xi+\mathbf{a}}$ gilt für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, und *isotrop*, wenn $P^\Xi = P^{D(\Xi)}$ gilt für alle Drehungsabbildungen D auf \mathbb{R}^d . Die ZAM Ξ heißt *bewegungsinvariant*, wenn sie stationär und isotrop ist.

Bemerkung: Die Begriffe *stationär* und *isotrop* sind für ZAM sinnvoll, weil $x \mapsto x - \mathbf{a}$ und $x \mapsto D^{-1}(x)$ stetige (sogar bijektive) Abbildungen von \mathbb{R}^d auf sich sind und damit nach Lemma 12 für jede ZAM Ξ die durch die entsprechenden Urbilder induzierten Objekte $\Xi + \mathbf{a}$ und $D(\Xi)$ ebenfalls zufällige abgeschlossene Mengen sind. Die Stationarität einer ZAM ist dabei keine einfache Eigenschaft; nicht-triviale Beispiele werden wir erst in einem späteren Abschnitt kennen lernen.

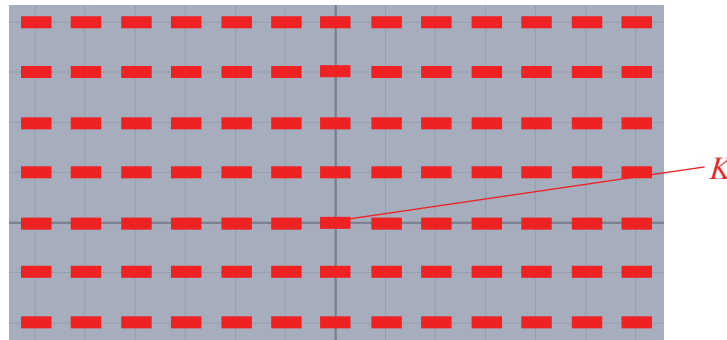
Lemma 18: Eine d -dimensionale ZAM Ξ ist genau dann stationär, wenn mit $K \in \mathcal{K}^d$ $T_\Xi(K) = T_\Xi(K - \mathbf{a})$ gilt für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, und *isotrop*, wenn $T_\Xi(K) = T_\Xi(D^{-1}(K))$ gilt für alle Drehungsabbildungen D auf \mathbb{R}^d .

Beweis: klar nach Satz 13, da mit $K \in \mathcal{K}^d$ auch $K - \mathbf{a} \in \mathcal{K}^d$ und $D^{-1}(K) \in \mathcal{K}^d$ gilt. ■

Bemerkung: Ein einfaches, anschauliches Beispiel für eine stationäre ZAM erhält man etwa folgendermaßen: Es sei $K \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ eine beliebige, aber feste kompakte Menge. Ferner bezeichne

$\mathcal{G} := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{(n, m) + K\}$ die Überlagerung aller ganzzahlig verschobenen K -Mengen. Dann ist

$\Xi := \mathcal{G} - \mathbf{X}$ eine stationäre ZAM, wobei \mathbf{X} ein über dem Quadrat $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ stetig gleichverteilter Zufallsvektor sei. (Ξ ist aber, wie man sofort sieht, nicht isotrop.)



Veranschaulichung von \mathcal{G}

Definition 9: Es sei Ξ eine d -dimensionale stationäre ZAM. Dann heißt die Größe

$$p_\Xi := E \left[\mathfrak{m}^d \left(\Xi \cap [0, 1]^d \right) \right]$$

Bedeckungsgrad von Ξ . Die Abbildung

$$C_\Xi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : h \mapsto P(\{\mathbf{0} \in \Xi\} \cap \{h \in \Xi\})$$

heißt *Kovarianzfunktion* von Ξ .

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Bemerkung: Der Bedeckungsgrad einer ZAM ist ein charakteristischer Parameter; ihm kommt vor allem in biologischen und ökologischen Anwendungen eine wesentliche Bedeutung zu.

Zur Beachtung: es gilt $C_{\Xi}(h) = P(\{\mathbf{0} \in \Xi\} \cap \{h \in \Xi\}) = P^{\Xi}(\mathcal{F}_{\{\mathbf{0}\}}^d \cap \mathcal{F}_{\{h\}}^d)$ für alle $h \in \mathbb{R}^d$.

Lemma 19: Es sei Ξ eine d -dimensionale stationäre ZAM. Dann gilt

$$p_{\Xi} = T_{\Xi}(\{\mathbf{0}\}) = P(\mathbf{0} \in \Xi) = C_{\Xi}(\mathbf{0}).$$

Ist die ZAM Ξ zusätzlich isotrop, dann gilt noch

$$C_{\Xi}(h) = C_{\Xi}(k) \text{ für alle } h, k \in \mathbb{R}^d \text{ mit } \|h\|_2 = \|k\|_2,$$

d.h. der Ausdruck $C_{\Xi}(h)$ hängt funktional nur von $\|h\|_2$ ab; Schreibweise:

$$C_{\Xi}(h) = c_{\Xi}(\|h\|_2) \text{ für alle } h \in \mathbb{R}^d.$$

Beweis: Mit Satz 16 b) folgt unter Ausnutzung von Lemma 18 mit der kompakten Menge $K = \{x\}$ für eine stationäre ZAM Ξ

$$\begin{aligned} p_{\Xi} &= E\left[\mathbf{m}^d(\Xi \cap [0,1]^d)\right] = \int_{[0,1]^d} T_{\Xi}(\{x\}) dx = \int_{[0,1]^d} T_{\Xi}(\{\mathbf{0}\}) dx = T_{\Xi}(\{\mathbf{0}\}) \mathbf{m}^d([0,1]^d) \\ &= T_{\Xi}(\{\mathbf{0}\}) = P(\{\mathbf{0}\} \cap \Xi \neq \emptyset) = P(\mathbf{0} \in \Xi) = C_{\Xi}(\mathbf{0}). \end{aligned}$$

Ist Ξ zusätzlich isotrop, so gilt für jede Drehung D auf \mathbb{R}^d

$$\begin{aligned} C_{\Xi}(h) &= P(\{\mathbf{0} \in \Xi\} \cap \{h \in \Xi\}) = P^{\Xi}(\mathcal{F}_{\{\mathbf{0}\}}^d \cap \mathcal{F}_{\{h\}}^d) = P^{D(\Xi)}(\mathcal{F}_{\{\mathbf{0}\}}^d \cap \mathcal{F}_{\{h\}}^d) \\ &= P(\{\mathbf{0} \in D(\Xi)\} \cap \{h \in D(\Xi)\}) = P(\{D^{-1}(\mathbf{0}) \in \Xi\} \cap \{D^{-1}(h) \in \Xi\}) = C_{\Xi}(D^{-1}(h)) \end{aligned}$$

mit der inversen Drehung D^{-1} . Wegen $\|h\|_2 = \|D^{-1}(h)\|_2$ für alle $h \in \mathbb{R}^d$ folgt die Behauptung; beachte dabei: gilt $\|h\|_2 = \|k\|_2$ für $h, k \in \mathbb{R}^d$, so existiert eine Drehung D mit $k = D^{-1}(h)$. Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Bemerkung: Im Vorgriff auf das dritte Kapitel lässt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen der Kovarianzfunktion C_{Ξ} und den Kovarianzen für das durch Ξ induzierte (stationären) Zufallsfeld $\{\mathbb{1}_{\Xi}(x) | x \in \mathbb{R}^d\}$ herstellen: wegen

$$P(\{\mathbf{0} \in \Xi\} \cap \{h \in \Xi\}) = P(\{\mathbf{0} \in \Xi - x\} \cap \{h \in \Xi - x\}) = P(\{x \in \Xi\} \cap \{x + h \in \Xi\})$$

für alle $x, h \in \mathbb{R}^d$ gilt nämlich

$$C_{\Xi}(h) = P(\{\mathbf{0} \in \Xi\} \cap \{h \in \Xi\}) = E(\mathbb{1}_{\Xi}(\mathbf{0}) \cdot \mathbb{1}_{\Xi}(h)) = E(\mathbb{1}_{\Xi}(x) \cdot \mathbb{1}_{\Xi}(x + h)) \text{ für alle } x, h \in \mathbb{R}^d,$$

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

so dass sich für die Kovarianzen des Zufallsfeldes ergibt:

$$\text{Kov}(\mathbb{1}_{\Xi}(x), \mathbb{1}_{\Xi}(x+h)) = C_{\Xi}(h) - p_{\Xi}^2 \text{ für alle } x, h \in \mathbb{R}^d,$$

was gerade die (schwache) Stationarität eines Zufallsfeldes beschreibt.

Für das in der Bemerkung im Anschluss an Lemma 18 vorgestellte Beispiel erhält man etwa

$$p_{\Xi} = P(\mathbf{0} \in \Xi) = P(\mathbf{0} \in \mathcal{G} - \mathbf{X}) = P(\mathbf{X} \in \mathcal{G}) = P(\mathbf{X} \in K) = m^2(K)$$

sowie

$$\begin{aligned} C_{\Xi}(h) &= P(\{\mathbf{0} \in \Xi\} \cap \{h \in \Xi\}) = P(\{\mathbf{X} \in \mathcal{G}\} \cap \{\mathbf{X} + h \in \mathcal{G}\}) \\ &= P(\{\mathbf{X} \in K\} \cap \{\mathbf{X} \in \mathcal{G} - h\}) = m^2(K \cap (\mathcal{G} - h)) \end{aligned}$$

für alle $h \in \mathbb{R}^2$. Man beachte, dass in diesem konkreten Fall die Kovarianzfunktion in dem Sinn periodisch ist, dass für alle $h \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{G} - h = \mathcal{G}$ gilt:

$$C_{\Xi}(h) = C_{\Xi}(\mathbf{0}) = p_{\Xi}.$$

Statistische Auswertung des Bedeckungsgrades einer stationären ZAM:

Eine methodisch recht einfache Vorgehensweise besteht darin, vor Ausführung des Experiments eine feste endliche Punktmenge $\mathfrak{X}_0 = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ mit $N \in \mathbb{N}$ als „Testmenge“ auszuwählen und als Schätzer für p_{Ξ} den Mittelwert

$$\hat{p}_{\Xi} := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{\Xi}(x_k) = \frac{1}{N} \#(\Xi \cap \mathfrak{X}_0)$$

anzusetzen. Dieser Schätzer ist erwartungstreu wegen

$$E(\hat{p}_{\Xi}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E[\mathbb{1}_{\Xi}(x_k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P(x_k \in \Xi) = P(\mathbf{0} \in \Xi) = p_{\Xi}$$

und besitzt die Schätzvarianz

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{p}_{\Xi}) &= \frac{1}{N^2} \text{Var} \left[\sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{\Xi}(x_k) \right] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \text{Var}(\mathbb{1}_{\Xi}(x_k)) + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \text{Kov}(\mathbb{1}_{\Xi}(x_i), \mathbb{1}_{\Xi}(x_j)) \\ &= \frac{1}{N} p_{\Xi} \cdot (1 - p_{\Xi}) + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} [C_{\Xi}(x_i - x_j) - p_{\Xi}^2] = \frac{1}{N} p_{\Xi} - p_{\Xi}^2 + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} C_{\Xi}(x_i - x_j). \end{aligned}$$

Ist die ZAM Ξ zusätzlich isotrop, so gilt alternativ

$$\text{Var}(\hat{p}_{\Xi}) = \frac{1}{N} p_{\Xi} - p_{\Xi}^2 + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} c_{\Xi}(\|x_i - x_j\|_2).$$

II.3. Das Minimal-Areal-Problem der Statistischen Ökologie

1. Was ist ein Minimal-Areal ?

Das Problem des „richtigen“ Stichprobenumfangs oder der „richtigen“ Probenflächengröße ist seit jeher ein brisantes Thema in Biologie und Ökologie. Hierzu zwei Zitate von Fachleuten:

Optimum size of a plot for vegetation has always intrigued plant ecologists. Qualitative ecologists emphasize sampling for recurring plant assemblages and are interested in a plot size on which the species composition of the community is adequately represented. Such a plot is also referred to as „*minimal area*“.

The selection of an appropriate plot size for measurement is a subjective decision and is based primarily on the size and spacing of individuals of a species. Some ecologists have tried to reach a plot size compromise by taking a sufficient number of smaller plots so that the sum of the areas of smaller plots is equal to, or larger than, the minimal area. Such an objective is achieved either by placing the smaller plots side by side until the size and shape of the minimal area is attained or by random placement of the plots in the community to be sampled.

[Aus: CH. D. BONHAM (1989): Measurements for Terrestrial Vegetation, Wiley, N.Y.]

Wie groß soll die Aufnahmefläche gewählt werden? - Sie soll einerseits möglichst alle vorkommenden Arten enthalten, andererseits sollte ihre Mindestgröße nicht zu hoch angesetzt werden, weil man sonst sehr leicht mit den Forderungen nach Einheitlichkeit und Quasi-Homogenität der Verteilung in Konflikt gerät.

Man kann versuchen, diese Frage objektiv zu entscheiden, indem man die Probefläche allmählich vergrößert und die Artenzahl gegen die Flächengröße aufträgt. Wenn man dies im Gelände tatsächlich durchführt, so erhält man eine Art Sättigungskurve, die allerdings entgegen der Erwartung nicht vollständig in eine Waagerechte übergeht, sondern bei starker Erweiterung des so ermittelten „*Minimalareals*“ immer noch Anstiegstendenzen erkennen läßt. Die Form der Aufnahmefläche spielt dabei keine Rolle.

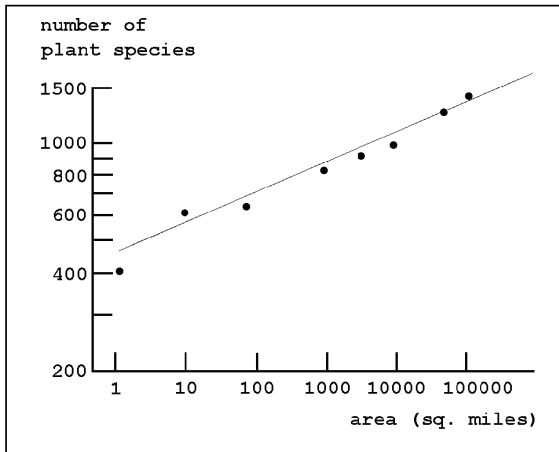
[Nach M. MÜHLENBERG (1993): Freilandökologie. Quelle & Meyer, Heidelberg.]

Offensichtlich enthalten beide „Definitionen“ eines Minimal-Areals eine gewisse Art von Willkür: für Bonham ist seine Bestimmung gar eine subjektive Angelegenheit, das Kriterium ist die „Adäquanz“ der Artenrepräsentation; für Mühlenberg gibt es immerhin eine Art mathematisches Kriterium, nach dem seine Größe bestimmt werden kann, indem man den Verlauf der Art-Areal-Kurve zur Entscheidung heranzieht. Beiden gemeinsam scheint jedoch unübersehbar der „dynamische“ Charakter des Minimalareals zu sein: man vergrößert das Probegebiet solange, bis der gewünschte Grad an „Zufriedenheit“ über das Ergebnis erreicht ist. Wir werden später sehen, daß genau diese Idee für eine sinnvolle Mathematisierung des Minimal-Areal-Begriffs verwendet werden kann, die alle wesentlichen Vorstellungen der Substanzwissenschaften dazu in sich trägt.

2. Flächen-Arten-Beziehungen

Ein bereits seit längerer Zeit bekannter Effekt ist die empirisch immer wieder belegbare Tatsache, daß die in Freilandversuchen ermittelte Anzahl gefundener Arten, in einem doppelt-logarithmischen Maßstab gegen die Probenflächengröße aufgetragen, den Eindruck einer linearen Beziehung vermittelt.

II. Zufällige abgeschlossene Mengen



Die linke Graphik stammt aus entsprechenden Untersuchungen von Williams (1964) zum Pflanzenvorkommen in England; die Probenflächengröße erstreckt sich dabei in einer Skala von wenigen hundert Quadratmetern bis hin zur Gesamtgröße von England.

Wir wollen nun in einem ersten Schritt zeigen, daß ein solcher Effekt auch durch ein geeignetes - sogar recht einfaches - stochastisches Verbreitungsmodell erklärt werden kann. Dazu machen wir folgende idealisierende Annahmen über die insgesamt s in der Ebene vorhandenen Arten:

- Das Verbreitungsmuster jeder Art i wird durch einen räumlich homogenen Poisson-Prozeß ξ_i mit Parameter $\lambda_i > 0$ beschrieben.
- Die Verbreitungsmuster der s vorhandenen Arten sind stochastisch unabhängig.

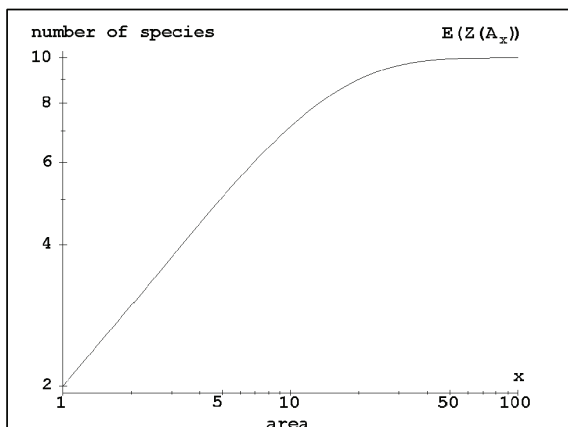
Definieren wir nun für Borel-Mengen $A \in \mathcal{B}^2$ die Größen

$$Z_i(A) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } \xi_i(A) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } Z(A) := \sum_{i=1}^s Z_i(A),$$

so gibt $Z(A)$ die Anzahl der in der Menge A gefundenen Arten an. Der Erwartungswert dieser Zufallsgröße läßt sich auf Grund unserer Annahmen leicht bestimmen zu

$$E(Z(A_x)) = \sum_{i=1}^s (1 - e^{-\lambda_i x}) =: S(x)$$

für jede Borel-Menge $A_x \in \mathcal{B}^2$ mit Lebesgue-Maß $m^2(A_x) = x > 0$, unabhängig von der Form der Menge A_x . Die Annahme eines homogenen Poisson-Prozesses im Verbreitungsmodell entspricht dabei der Quasi-Homogenität bei Mühlenberg; daher ist es nicht verwunderlich, daß sowohl bei Mühlenberg als auch in unserem Modell die *Form* des Aufnahmegebiets A keine Rolle spielt. Aufgrund der Eigenschaften des homogenen Poisson-Prozesses können wir dabei sogar anstatt eines einzigen Gebiets A_x im Sinne von Bonham (abzählbar) beliebig viele Teilgebiete $A_{x_k} \in \mathcal{B}^2$ mit Lebesgue-Maßen $m^2(A_{x_k}) = x_k > 0$ und $\sum_k x_k = x$ verwenden. Die Funktion S heißt in der Ökologie *Art-Areal-Kurve* (engl.: species-area-curve).



Die linke Graphik zeigt die erwartete Anzahl gefundener Arten im Poisson-Modell in Abhängigkeit von der Flächengröße für einen in Ökosystemen „typischen“ Parametersatz der Form

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_7 = 0,1$$

$$\lambda_8 = 0,15$$

$$\lambda_9 = 0,3$$

$$\lambda_{10} = 2,7.$$

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Man erkennt hier sehr deutlich sowohl den im unteren Bereich linear erscheinenden Verlauf der Art-Areal-Kurve als auch den von Mühlberg in diesem Zusammenhang angedeuteten „Sättigungseffekt“.

3. Eine mathematische Definition des Minimal-Areals

Nach den obigen Ausführungen können wir jetzt einen Versuch unternehmen, ein Minimal-Areal mathematisch zu definieren, wobei die Ideen von Bonham und Mühlberg angemessene Berücksichtigung finden sollen.

Definition 10: Es sei $K \in \mathcal{K}^2$ eine kompakte, sternförmige Menge mit $0 \in K$ und $m^2(K) = 1$. Setze, mit den Bezeichnungen von oben,

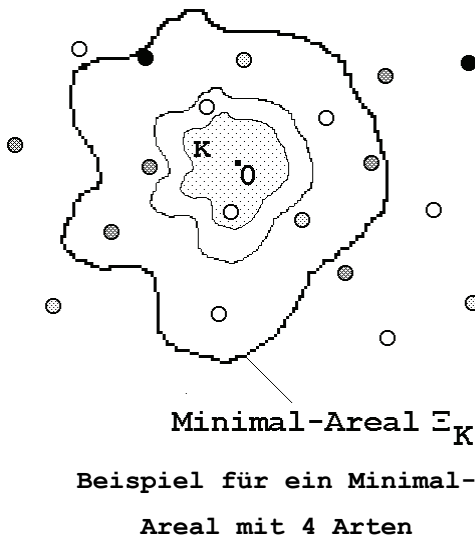
$$\rho_K = \inf \{r > 0 \mid Z(rK) = s\}, \quad \Xi_K = \rho_K K.$$

Die zufällige abgeschlossene Menge Ξ_K heißt *Minimal-Areal* vom Typ K (vgl. auch Lemma 17).

Lemma 20: Bezeichnet die Größe $W_K = m^2(\Xi_K)$ das (zufällige) Lebesgue-Maß des Minimal-Areals Ξ_K vom Typ K , so gilt für die zugehörige Verteilungsfunktion:

$$P(W_K \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^s \{Z_i(A_x) = 1\}\right) = \prod_{i=1}^s (1 - e^{-\lambda x}), \quad x > 0.$$

Beweis: Folgt sofort aus den Eigenschaften unabhängiger homogener Poisson-Prozesse. ■



Die obige Definition reflektiert gut den schon erwähnten „dynamischen“ Charakter eines Minimal-Areals: man vergrößere (oder verkleinere, je nachdem) das Probengebiet K solange, bis *erstmalig* – bei Erreichen von ρ_K – alle s vorhandenen Arten erfaßt sind. Hierdurch wird einerseits einer gewissen Art von „Minimalität“ Rechnung getragen, auf der anderen Seite wird aber auch die grundsätzlich stochastische Natur des Minimal-Areals deutlich. Die Sternförmigkeit des Gebiets K spielt dabei aus mathematischer Sicht keine Rolle; sie ist lediglich deshalb in die Definition mit aufgenommen worden, weil in der Praxis etwa im Rahmen einer Freilanduntersuchung bereits beprobte Teilgebiete grundsätzlich weiterverwendet werden und ein nicht-sternförmiges Gebiet bei Vergrößerung u.U. „Löcher“ erzeugt, in denen schon Proben genommen wurden (man denke etwa an einen echten Kreisring K , der bei Vergrößerung nach außen „wandert“). Die Bedingung $0 \in K$ dient entsprechend lediglich einer Festlegung des aktuellen „Standorts“ als Nullpunkt innerhalb des Ausgangsgebiets; Kompaktheit bezieht sich hier im wesentlichen auf die räumliche Beschränktheit des Probengebiets (ansonsten würde aus mathematischer Sicht auch die Abgeschlossenheit von K genügen).

Die obige Definition reflektiert gut den schon erwähnten „dynamischen“ Charakter eines Minimal-Areals: man vergrößere (oder verkleinere, je nachdem) das Probengebiet K solange, bis *erstmalig* – bei Erreichen von ρ_K – alle s vorhandenen Arten erfaßt sind. Hierdurch wird einerseits einer gewissen Art von „Minimalität“ Rechnung getragen, auf der anderen Seite wird aber auch die grundsätzlich stochastische Natur des Minimal-Areals deutlich. Die Sternförmigkeit des Gebiets K spielt dabei aus mathematischer Sicht keine Rolle; sie ist lediglich deshalb in die Definition mit aufgenommen worden, weil in der Praxis etwa im Rahmen einer Freilanduntersuchung bereits beprobte Teilgebiete grundsätzlich weiterverwendet werden und ein nicht-sternförmiges Gebiet bei Vergrößerung u.U. „Löcher“ erzeugt, in denen schon Proben genommen wurden (man denke etwa an einen echten Kreisring K , der bei Vergrößerung nach außen „wandert“). Die Bedingung $0 \in K$ dient entsprechend lediglich einer Festlegung des aktuellen „Standorts“ als Nullpunkt innerhalb des Ausgangsgebiets; Kompaktheit bezieht sich hier im wesentlichen auf die räumliche Beschränktheit des Probengebiets (ansonsten würde aus mathematischer Sicht auch die Abgeschlossenheit von K genügen).

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Eine elegante Art, Momente der Minimal-Areal-Fläche W_K zu berechnen, liegt in der Bestimmung der zugehörigen momenterzeugenden Funktion ψ_{W_K} .

Satz 17: Für das Minimal-Areal Ξ_K vom Typ K gilt:

$$\psi_{W_K}(t) = E(e^{tW_K}) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} \frac{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}}{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} - t} \quad \text{für } t < \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\},$$

woraus sich für die Momente ergibt:

$$E(W_K^n) = n! \sum_{k=1}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} \frac{1}{(\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k})^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Wir verwenden die für alle reellen Zahlen $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{R}$ gültige Beziehung

$$1 - \prod_{i=1}^s (1 - a_i) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} \prod_{j=1}^k a_{i_j},$$

die sich z.B. mit vollständiger Induktion zeigen lässt. Für das Folgende setzen wir

$$F(x) := P(W_K \leq x) = \prod_{i=1}^s (1 - e^{-\lambda_i x}), \quad x > 0$$

und bezeichnen mit $f = F'$ die zugehörige Dichte. Mit dem Satz von Fubini ergibt sich dann für $t < \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$:

$$\begin{aligned} \psi_{W_K}(t) &= E(e^{tW_K}) = \int_0^{\infty} e^{ty} f(y) dy = 1 + \int_0^{\infty} (e^{ty} - 1) P^X(dy) = 1 + \int_0^y t e^{tx} dx P^X(dy) \\ &= 1 + \iint_{0 < x < y < \infty} t e^{tx} P^X(dy) dx = 1 + t \int_0^{\infty} e^{tx} [1 - F(x)] dx \\ &= 1 + t \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} \exp\left(-\left[\sum_{j=1}^k \lambda_{i_j} - t\right]x\right) dx \\ &= 1 + \sum_{k=1}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} t \int_0^{\infty} \exp\left(-\left[\sum_{j=1}^k \lambda_{i_j} - t\right]x\right) dx \\ &= 1 + \sum_{k=1}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} \frac{t}{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} - t} = \sum_{k=1}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} \left[1 + \frac{t}{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} - t}\right] \\ &= \sum_{k=1}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} \frac{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}}{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} - t}. \end{aligned}$$

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Dabei haben wir im vorletzten Schritt die Beziehung $1 = 1 - \prod_{i=1}^s (1 - a_i) = \sum_{k=1}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} 1$ verwendet, die sich aus der Hilfsbeziehung oben für die Wahl $a_i = 1$ für $i = 1, \dots, s$ ergibt.

Der Rest folgt aus

$$E(W_K^n) = \frac{d^n}{dt^n} \psi_{W_K}(0) = n! \sum_{k=1}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} \frac{1}{(\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k})^n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Der Satz ist damit bewiesen. ■

4. Anwendungen in der Ökologie

Die folgende Tabelle enthält Artenspektren aus Monitoring-Untersuchungen im Niederländischen Wattenmeer, die mit einer Probenfläche von $0,43 \text{ m}^2$ erhoben wurden (drei Standorte B,C,J in den Monaten 03 (März) und 08 (August)). Die Angaben sind hochgerechnete Anzahlen je m^2 .

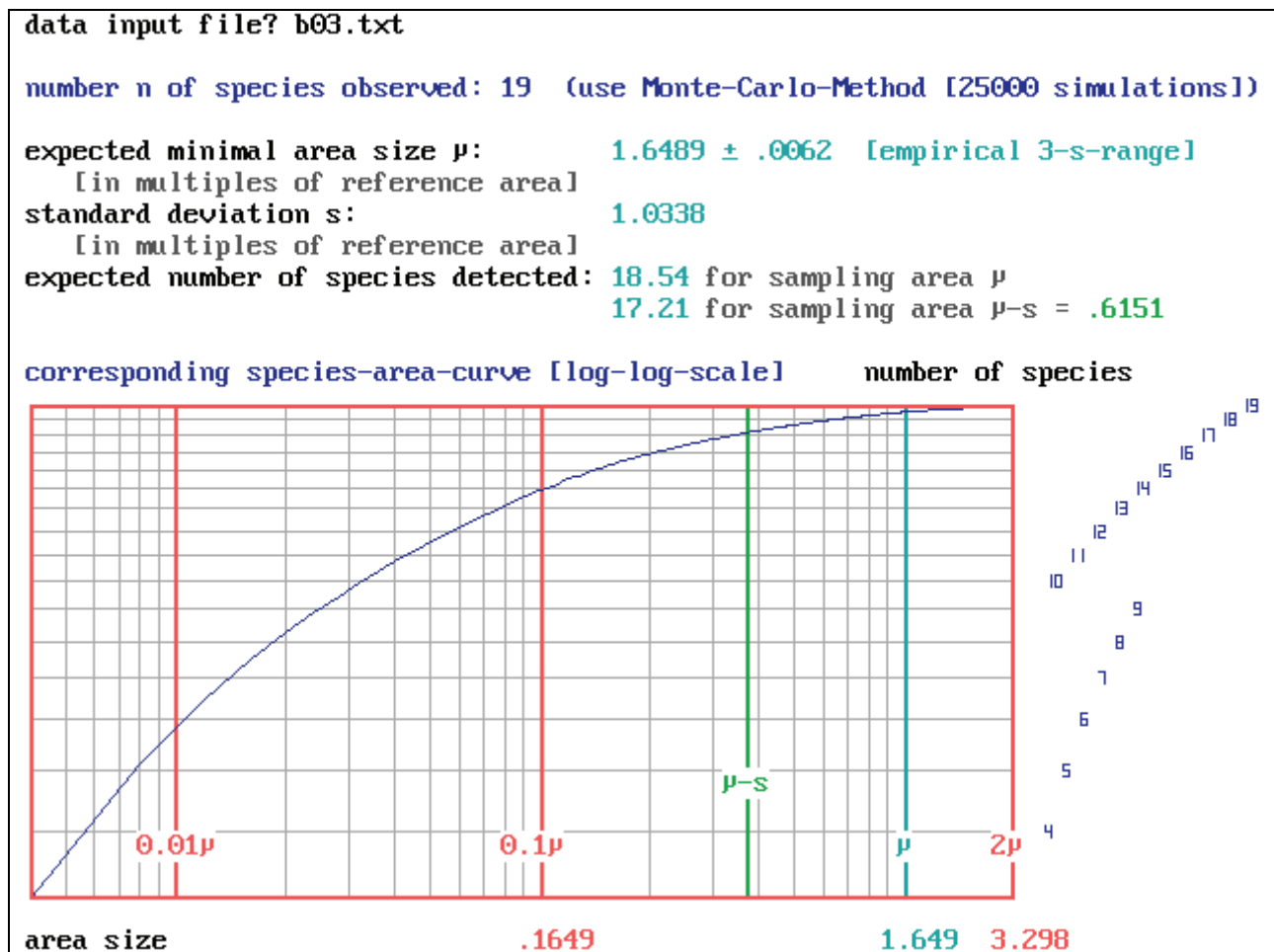
Species	B03	C03	J03	B08	C08	J08
1 Sagartia troglodytes	0	0	0	0	0	2
2 Nemertini sp.	0	0	6	0	5	2
3 Littorina littorea	6	0	0	0	0	0
4 Hydrobia ulvae	0	31	0	0	1190	0
5 Mytilus edulis	129	16	0	3224	0	2
6 Cerastoderma edule	72	9	0	56	64	0
7 Tellina tenuis	0	0	82	0	0	63
8 Macoma balthica	100	76	27	108	95	32
9 Scrobicularia plana	10	0	0	5	0	0
10 Ensis americanus	1	0	0	4	18	52
11 Mya arenaria	9	12	0	27	171	0
12 Harthothoe sarsi	0	0	1	5	2	0
13 Eteone longa	19	13	10	7	24	0
14 Anaitides mucosa	13	3	8	0	26	0
15 Nereis diversicolor	50	42	0	164	81	0
16 Nereis virens	0	0.3	0	0	0	0
17 Nereis longissima	2	0	0	0	0	2
18 Nephtys hombergii	4	1	22	2	0	17
19 Scoloplos armiger	21	148	19	14	731	95
20 Scoleopsis foliosa	0	2	6	0	2	7
21 Marenzelleria viridis	1	1	0	0	0	0
22 Magelona papillicornis	0	0	9	0	0	21
23 Tharyx marioni	0	0	0	0	0	2
24 Heteromastus filiformis	94	98	0	279	100	0
25 Arenicola marina	48	42	7	40	52	7
26 Lanice conchilega	2	0	4	24	0	21
27 Gammarus locusta	9	0	0	19	0	0
28 Bathyporeia sarsi	0	0	11	0	0	7
29 Urothoe poseidonis	0	0	1	0	0	0
30 Corophium arenarium	0	2	0	0	50	0
31 Crangon crangon	0	2	3	17	52	21
32 Carcinus maenas	9	0	0	38	18	2
33 Asterias rubens	0	0	0	0	0	2
$E(W_K) = E(m^2(\Xi_K))$	1,66	3,78	1,55	0,66	0,77	1,29

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Nimmt man idealisierend an, daß sich die verschiedenen Arten über der Probenfläche „rein zufällig“ und ohne gegenseitige Beeinflussung verteilen, so kann man das obige Minimal-Areal-Modell zumindest näherungsweise zur Anwendung bringen. Die erhobenen Abundanzen können dann als erwartungstreue Schätzer für die benötigten Poisson-Parameter betrachtet werden. Man erhält damit für den Erwartungswert der Minimal-Areal-Fläche die obigen Zahlen (in m^2).

Man sieht hier aber, daß die Erwartungswerte der Minimal-Areal-Flächen in jedem Fall die ursprüngliche Probenflächengröße von $0,43 m^2$ weit übersteigen; das bedeutet, daß insbesondere die selteneren Arten bzw. solche mit niedriger Besiedlungsdichte häufig in der Probenfläche nicht gefunden werden, auch wenn sie – in großräumigerem Maßstab – tatsächlich vorhanden sind. Die zahlreichen Nullen in der Tabelle sind also nicht unbedingt ein Indikator dafür, daß die entsprechenden Arten nicht vorhanden wären – man hat sie u.U. nur einfach nicht entdeckt!

Die folgenden Graphiken zeigen die mit einem Programm berechneten Minimal-Areal-Auswertungen für die 6 Proben aus dem Wattenmeer.



II. Zufällige abgeschlossene Mengen

data input file? c03.txt

number n of species observed: 17 (use Monte-Carlo-Method [25000 simulations])

expected minimal area size μ : 3.8079 \pm .0186 [empirical 3-s-range]

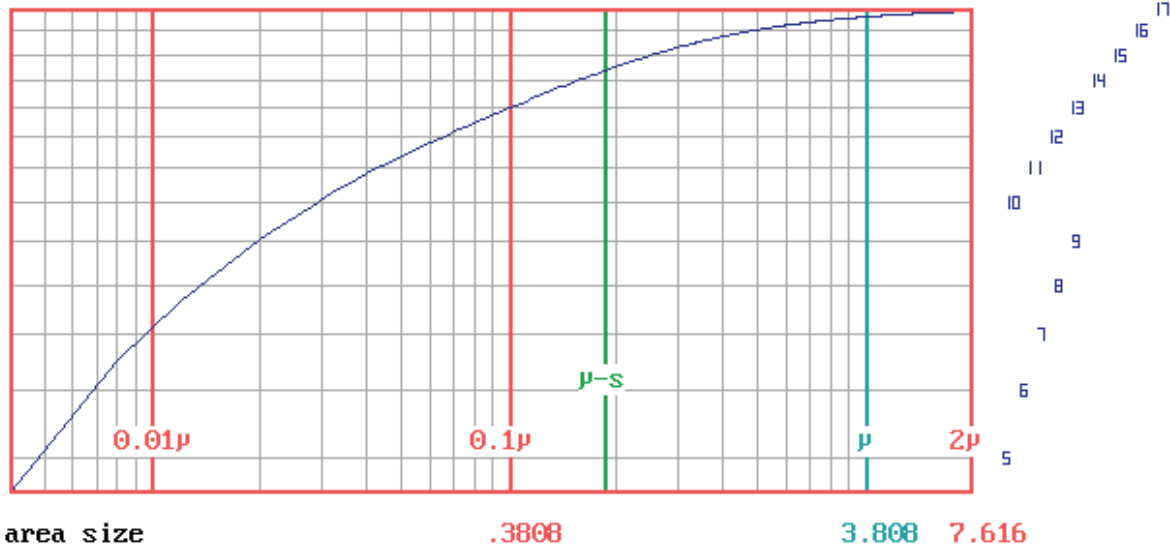
[in multiples of reference area]

standard deviation s: 3.0924

[in multiples of reference area]

expected number of species detected: 16.64 for sampling area μ
14.38 for sampling area $\mu-s = .7155$

corresponding species-area-curve [log-log-scale] number of species



data input file? j03.txt

number n of species observed: 15

expected minimal area size μ : 1.5555

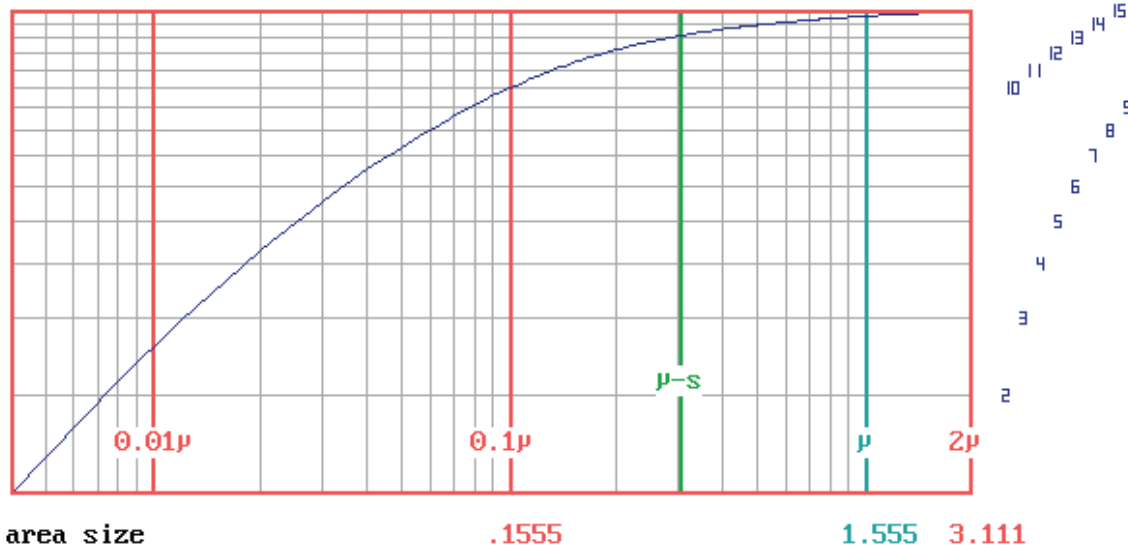
[in multiples of reference area]

standard deviation s: 1.0772

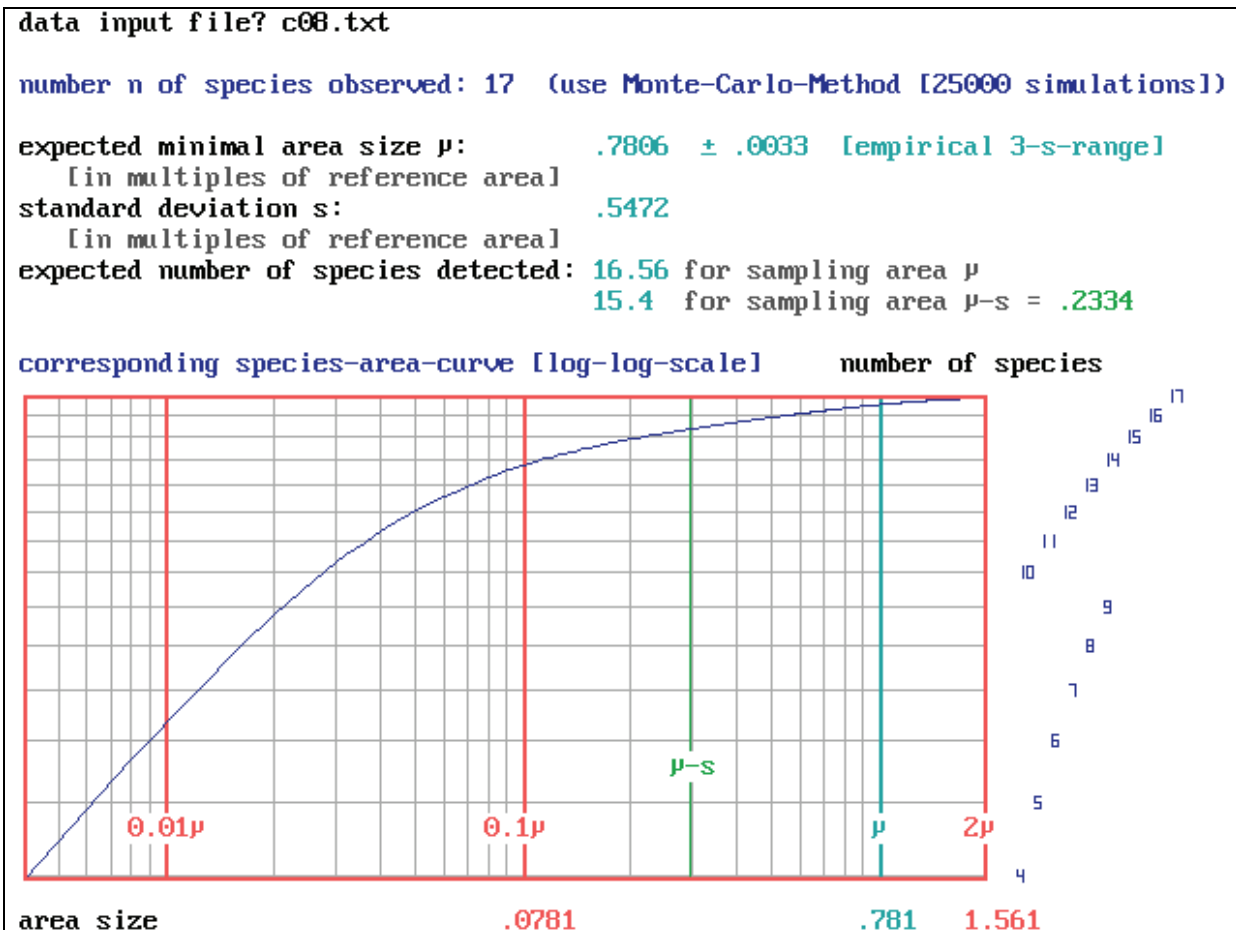
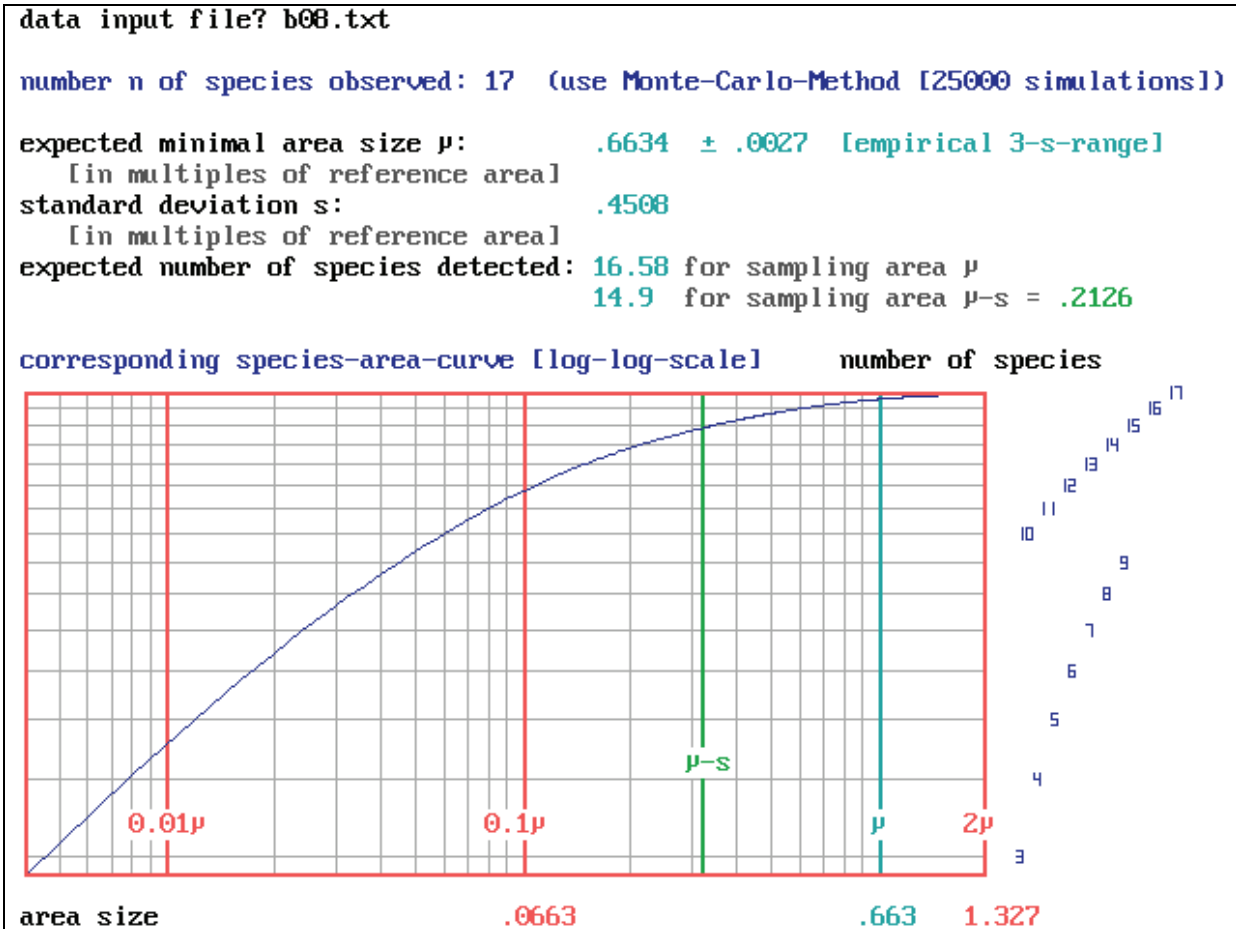
[in multiples of reference area]

expected number of species detected: 14.57 for sampling area μ
13.18 for sampling area $\mu-s = .4783$

corresponding species-area-curve [log-log-scale] number of species



II. Zufällige abgeschlossene Mengen



II. Zufällige abgeschlossene Mengen

II. 4. Boole-Modelle

Eine besonders interessante und zugleich verhältnismäßig einfache Konstruktion stationärer / isotroper zufälliger abgeschlossener Mengen erhält man durch das Ersetzen der „Punkte“ eines stationären / isotropen Punktprozesses durch geeignete „einfache“ zufällige abgeschlossene Mengen (z.B. Kugeln, Würfel usw.) Die so entstehenden Boole-Modelle gehen auf Matheron und andere Autoren gegen Ende der 1960er Jahre zurück; sie werden oft auch als *Keim-Korn-Modelle* bezeichnet. Insbesondere lassen sich damit geeignete Punktprozesse auch mit zufälligen abgeschlossenen Mengen identifizieren.

Lemma 21: Es sei N eine endliche Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{Z}^+ , unabhängig von $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, einer Familie stochastisch unabhängiger d -dimensionaler Zufallsvektoren mit derselben atomlosen Verteilung Q . Dann ist $\Xi := \bigcup_{k=1}^N \{X_k\} = \{X_1, \dots, X_N\}$ eine zufällige abgeschlossene Menge (mit der Konvention $\Xi = \emptyset$, falls $N = 0$) mit dem Kapazitätsfunktional

$$T_{\Xi}(K) = E\left[1 - (1 - Q(K))^N\right] = 1 - \varphi_N(1 - Q(K)) \text{ für alle } K \in \mathcal{K}^d,$$

wobei φ_N die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion der Zufallsvariablen N bezeichne.

Beweis: Sei (Ω, \mathcal{A}, P) der zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum. Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ ist

$\Xi_n := \bigcup_{k=1}^n \{X_k\} = \{X_1, \dots, X_n\}$ eine ZAM nach Lemma 10 und Lemma 11, d.h. es gilt $\{\Xi_n \in \mathfrak{B}\} \in \mathcal{A}$ für alle $\mathfrak{B} \in \mathfrak{F}^d$, mit

$$1 - T_{\Xi_n}(K) = P(\Xi_n \cap K = \emptyset) = P\left(\bigcup_{k=1}^n (\{X_k\} \cap K) = \emptyset\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \notin K\}\right) = (1 - Q(K))^n$$

für alle $K \in \mathcal{K}^d$ und $n \in \mathbb{N}$ (man beachte, dass auf Grund der Atomlosigkeit die X_1, \dots, X_n fast sicher paarweise verschieden sind). die Ferner ist

$$\{\Xi \in \mathfrak{B}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\Xi_n \in \mathfrak{B}\} \cap \{N = n\} \in \mathcal{A}$$

für alle $\mathfrak{B} \in \mathfrak{F}^d$, mit

$$\begin{aligned} 1 - T_{\Xi}(K) &= P(\Xi \cap K = \emptyset) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{\Xi_n \cap K = \emptyset\} \cap \{N = n\}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\Xi_n \cap K = \emptyset) \cdot P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - Q(K))^n \cdot P(N = n) = E\left[(1 - Q(K))^N\right] = \varphi_N(1 - Q(K)) \end{aligned}$$

für alle $K \in \mathcal{K}^d$, womit alles gezeigt ist. ■

Bemerkung: Ist $N = n$ eine konstante Zufallsvariable für ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt offensichtlich

$$T_{\Xi}(K) = 1 - (1 - Q(K))^n \text{ für alle } K \in \mathcal{K}^d.$$

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Mit Hilfe von Lemma 21 ist es möglich, einen fundamentalen Zusammenhang zwischen Punktprozessen und zufälligen abgeschlossenen Mengen herzustellen. Wir beginnen mit einer Beschreibung der Identifikation zwischen Poisson-Punktprozessen und ZAM.

Satz 18: Es sei $\xi = \sum_{n=1}^N \varepsilon_{X_n}$ ein kanonischer Poisson-Punktprozess mit den Parametern $\lambda > 0$ und atomloser Verteilung Q im Sinne von Satz 3. Dann ist $\Xi := \bigcup_{k=1}^N \{X_k\} = \{X_1, \dots, X_N\}$ eine zufällige abgeschlossene Menge mit dem Kapazitätsfunktional

$$T_{\Xi}(K) = 1 - e^{-\lambda Q(K)} \text{ für alle } K \in \mathcal{K}^d.$$

Ist umgekehrt $\Xi = \bigcup_{k=1}^N \{X_k\} = \{X_1, \dots, X_N\}$ eine ZAM gemäß der Konstruktion von Lemma 21 mit $P^N = \mathcal{P}(\lambda)$, so ist $\xi := \sum_{n=1}^N \varepsilon_{X_n}$ ein kanonischer Poisson-Punktprozess mit den Parametern $\lambda > 0$ und Q im Sinne von Satz 3.

Beweis: Es genügt, die Beziehung für das Kapazitätsfunktional nachzuweisen. Im Fall von $P^N = \mathcal{P}(\lambda)$ ist aber $\varphi_N(t) = e^{\lambda(t-1)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Abschnitt II.5), womit die Behauptung folgt. ■

Eine Erweiterung von Satz 18 auf homogene Poisson-Prozesse gibt das folgende Resultat.

Satz 19: Es sei ξ ein homogener Poisson-Punktprozess mit Parameter $\lambda > 0$ im Sinne von Definition 5 und $I = \{\mathbf{j}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung der Menge $I = \mathbb{Z}^d$. Dann gibt es Familien $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit den Eigenschaften:

- $P^{N_n} = \mathcal{P}(\lambda)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $P^{X_{ij}} = \mathcal{U}(I_i)$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit dem Standard-Intervall $I_i = I_{\mathbf{j}_i, \mathbf{j}_i + \mathbf{1}} \in \mathcal{B}^d$ (wobei $\mathbf{j}_i + \mathbf{1}$ durch koordinatenweise Addition der 1 aus \mathbf{j}_i hervorgeht)

so dass ξ die Darstellung

$$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_i} \varepsilon_{X_{ij}}$$

besitzt (vgl. die Bemerkung im Anschluss an Satz 5). Dann ist $\Xi := \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{N_i} \{X_{ij}\}$ eine zufällige abgeschlossene Menge mit dem Kapazitätsfunktional

$$T_{\Xi}(K) = 1 - e^{-\lambda m^d(K)} \text{ für alle } K \in \mathcal{K}^d.$$

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Beweis: Offenbar ist durch $\mathbb{R}^d = \bigoplus_{i=1}^{\infty} I_{j_i, j_i+1}$ eine disjunkte Zerlegung von \mathbb{R}^d mit $m^d(I_{j_i, j_i+1}) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gegeben, wodurch die Darstellbarkeit von ξ in der angegebenen Art durch Satz 5 sichergestellt ist. Die Aussage folgt nun aus Satz 18, wobei nur gewährleistet sein muss, dass jede

Realisierung $\Xi(\omega) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{N_i} \{X_{ij}(\omega)\}$ mit $\omega \in \Omega$ der zufälligen Menge Ξ abgeschlossen bleibt (die

Erweiterung der Messbarkeit auf eine abzählbare Vereinigungsbildung in Lemma 11 ist dann evident). Da in jeder Teilmenge I_{j_i, j_i+1} aber nur endlich viele „Punkte“ realisiert werden, besitzt keine der Mengen $\Xi(\omega)$ Häufungspunkte außerhalb von $\Xi(\omega)$, d.h. alle $\Xi(\omega)$ sind abgeschlossen.

Bezgl. des Kapazitätsfunktionalen argumentiert man so: die Punktprozesse $\xi_i := \sum_{j=1}^{N_i} \varepsilon_{X_{ij}}$ sind unabhängige Poisson-Punktprozesse mit den Parametern $\lambda_i = \lambda$ und $Q_i = \mathcal{U}(I_i)$, so dass die ZAM

$\Xi_i := \bigcup_{j=1}^{N_i} \{X_{ij}\}$ ebenfalls unabhängig sind mit den Kapazitätsfunktionalen

$$T_{\Xi_i}(K) = 1 - e^{-\lambda m^d(K \cap I_i)} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \text{ und } K \in \mathcal{K}^d.$$

Ähnlich wie im Beweis von Lemma 21 folgt nun

$$\begin{aligned} 1 - T_{\Xi}(K) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\Xi_i\} \cap K = \emptyset\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{\Xi_i \cap K = \emptyset\}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda m^d(K \cap I_i)} = \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{\infty} m^d(K \cap I_i)\right) \\ &= \exp\left(-\lambda m^d\left(K \cap \bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i\right)\right) = \exp(-\lambda m^d(K)) \end{aligned}$$

für alle $K \in \mathcal{K}^d$, womit Satz 19 bewiesen ist. ■

Bemerkungen:

- Da das Lebesgue-Maß m^d auf \mathcal{B}^d σ -endlich ist, kann Robbin's Theorem (Satz 16) angewendet werden mit dem Ergebnis

$$E[\mu_{\Xi}(B)] = E[\mu(\Xi \cap B)] = \int_B T_{\Xi}(\{x\}) m^d(dx) = \int_B 0 m^d(dx) = 0 \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}^d$$

wegen

$$T_{\Xi}(\{x\}) = 1 - \exp(-\lambda m^d(\{x\})) = 1 - 1 = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Der Bedeckungsgrad p_{Ξ} eines homogenen Poisson-Prozesses Ξ in ZAM-Form ist also erwartungsgemäß Null, da (auch abzählbar unendlich viele) isolierte Punkte des \mathbb{R}^d das Lebesgue-Maß Null besitzen.

- Der in Satz 19 konstruierte homogene Poisson-Prozess Ξ in ZAM-Form ist offensichtlich auch mit diesem Sprachgebrauch stationär und isotrop im Sinne von Definition 8. Damit ergibt sich das vorige Ergebnis auch direkt aus Lemma 19.

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Die Idee eines Boole-Modells besteht nun - vereinfachend ausgedrückt - darin, die „Punkte“ einer solchen ZAM geeignet zu „vergrößern“, indem diese durch Objekte mit positivem Lebesgue-Maß ausgetauscht werden, was einen positiven Bedeckungsgrad im Falle der Stationarität zur Folge hat.

Definition 11 (Boole-Modell): Es sei Ξ_0 eine *abzählbare* zufällige abgeschlossene Menge und $\{\Xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine auch von Ξ_0 stochastisch unabhängige Familie von zufälligen *beschränkten* abgeschlossenen (d.h. zufälligen kompakten) Mengen mit demselben Kapazitätsfunktional $T = T_{\Xi_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die zufällige abgeschlossene Menge

$$\Xi := \bigcup_{x_n \in \Xi_0} \{x_n + \Xi_n\}$$

Boole-Modell mit den *Keimen* $x \in \Xi_0$ und den *Körnern* Ξ_n . Ist insbesondere Ξ_0 ein Poisson-Punktprozess in ZAM-Form, so spricht man auch von einem Poisson-Boole-Modell.

Bemerkungen:

- Häufig wählt man als Körner d -dimensionale abgeschlossene Kugeln mit Mittelpunkt $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ oder andere geeignete kompakte Mengen wie abgeschlossene Standard-Intervalle oder abgeschlossene Ellipsoide, die die $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ als Element enthalten.
- Im einfachen Poisson-Fall des Satzes 18 lässt sich das Boole-Modell auch so schreiben:

$$\Xi = \bigcup_{k=1}^N \{X_k + \Xi_k\}.$$

Wir wollen uns jetzt mit der Bestimmung des Überdeckungsgrades eines stationären Poisson-Boole-Modells befassen. Dazu benötigen wir noch zwei Zwischenschritte.

Lemma 22: Die Mengenoperationen „Spiegelung“ und „Minkowski-Addition“ auf \mathcal{F}^d sind \mathfrak{F}^d -messbar.

Beweis: Der üblichen Konvention folgend, bezeichnen wir für $F \in \mathcal{F}^d$ mit

$$S : F \mapsto \check{F} := \{-x \mid x \in F\} \in \mathcal{F}^d \text{ die an } \mathbf{0} \text{ gespiegelte Menge}$$

und für $F, G \in \mathcal{F}^d$ mit

$$M : (F, G) \mapsto F + G := \{f + g \mid f \in F, g \in G\} \in \mathcal{F}^d$$

die so genannte *Minkowski-Summe* von F und G . Es gilt:

$$S^{-1}(\mathcal{F}_K^d) = \{F \in \mathcal{F}^d \mid \check{F} \cap K \neq \emptyset\} = \{F \in \mathcal{F}^d \mid F \cap \check{K} \neq \emptyset\} = \mathcal{F}_K^d \in \mathfrak{F}^d \text{ für alle } K \in \mathcal{K}^d$$

(beachte: mit $K \in \mathcal{K}^d$ ist auch $\check{K} = \{-x \mid x \in K\} \in \mathcal{K}^d$), d.h. die Spiegelungsabbildung ist messbar.

Für den zweiten Teil betrachte die Abbildung $R : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d} : (x, y) \mapsto (x, y - x)$. Diese Abbildung ist stetig, und für die Urbildabbildung gilt:

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

$$R^{-1}(F \times G) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d} \mid x \in F, y \in x + G\} \text{ für alle } F, G \in \mathcal{F}^d,$$

woraus nach Lemma 12 und Lemma 10 (Messbarkeit von Projektionen) auch die Messbarkeit der Minkowski-Addition folgt. ■

Lemma 23: Es sei X ein d -dimensionaler Zufallsvektor mit der Verteilung Q und Ξ_1 eine von X unabhängige zufällige abgeschlossene Menge. Dann besitzt die zufällige abgeschlossene Menge $\Xi := X + \Xi_1$ das Kapazitätsfunktional

$$T_{\Xi}(K) = E\left[Q(\check{\Xi}_1 + K)\right] \text{ für alle } K \in \mathcal{K}^d.$$

Beweis: Ξ ist offenbar ein Boole-Modell mit $\Xi_0 = \{X\}$. Es folgt nach Robbin's Theorem (Satz 16):

$$\begin{aligned} T_{\Xi}(K) &= P(\Xi \cap K \neq \emptyset) = P((X + \Xi_1) \cap K \neq \emptyset) = P(X \in \check{\Xi}_1 + K) \\ &= \int P(x \in \check{\Xi}_1 + K) Q(dx) = \int T_{\check{\Xi}_1 + K}(\{x\}) Q(dx) = E\left[Q(\check{\Xi}_1 + K)\right] \end{aligned}$$

für alle $K \in \mathcal{K}^d$. ■

Satz 20: Es sei Ξ ein Poisson-Boole-Modell mit einem Poisson-Punktprozess Ξ_0 in ZAM-Form mit den Parametern $\lambda > 0$ und atomloser Verteilung Q . Dann gilt für das zugehörige Kapazitätsfunktional:

$$T_{\Xi}(K) = 1 - \exp\left(-\lambda \cdot E\left[Q(\check{\Xi}_1 + K)\right]\right) \text{ für alle } K \in \mathcal{K}^d.$$

Beweis: Analog dem Beweis von Lemma 21 folgt aus Lemma 23, mit der Darstellung

$$\Xi_0 = \bigcup_{k=0}^N \{X_k\}:$$

$$\begin{aligned} 1 - T_{\Xi}(K) &= P(\Xi \cap K = \emptyset) = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n P((X_k + \Xi_k) \cap K = \emptyset) \cdot P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - E\left[Q(\check{\Xi}_1 + K)\right]\right)^n \cdot P(N = n) = \varphi_N\left(1 - E\left[Q(\check{\Xi}_1 + K)\right]\right) = \exp\left(-\lambda \cdot E\left[Q(\check{\Xi}_1 + K)\right]\right) \end{aligned}$$

für alle $K \in \mathcal{K}^d$. ■

Als Erweiterung von Satz 20 erhalten wir noch:

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Satz 21: Es sei Ξ ein Poisson-Boole-Modell mit einem homogenen Poisson-Prozess Ξ_0 in ZAM-Form mit Parameter $\lambda > 0$. Dann ist Ξ stationär, und es gilt:

$$T_{\Xi}(K) = 1 - \exp\left(-\lambda \cdot E\left[\mathfrak{m}^d(\check{\Xi}_1 + K)\right]\right) = 1 - \exp\left(-\lambda \cdot E\left[\mathfrak{m}^d(\Xi_1 + \check{K})\right]\right) \text{ für alle } K \in \mathcal{K}^d.$$

Für den Bedeckungsgrad p_{Ξ} ergibt sich hieraus noch

$$p_{\Xi} = T_{\Xi}(\{\mathbf{0}\}) = 1 - \exp\left(-\lambda \cdot E\left[\mathfrak{m}^d(\Xi_1)\right]\right).$$

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 19 unter Beachtung der sich entsprechend ergebenden Beziehung

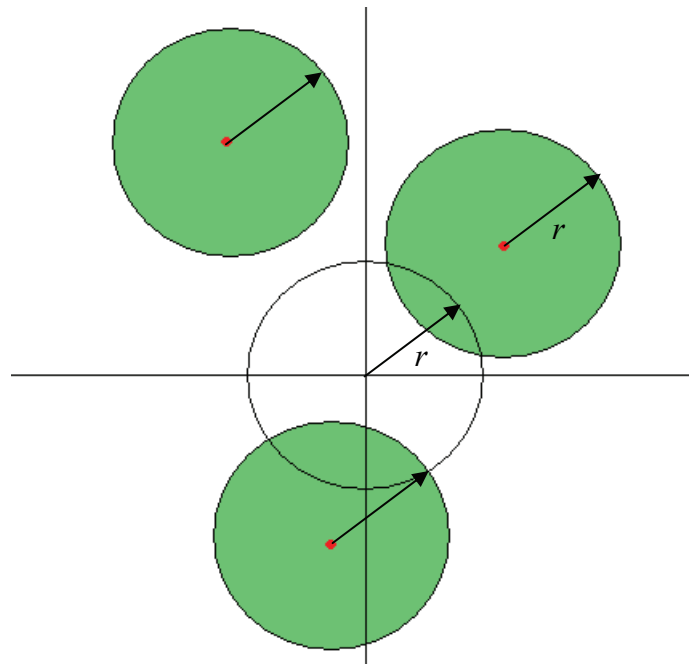
$$T_{\Xi_{[i]}}(K) = 1 - \exp\left[-\lambda E\left[\mathfrak{m}^d\left(\left(\check{\Xi}_1 + K\right) \cap I_i\right)\right]\right] \text{ für } i \in \mathbb{N},$$

wobei $\Xi_{[i]}$ das Teil-Boole-Modell über dem Intervall I_i , $i \in \mathbb{N}$ bezeichne. Für die weiteren Aussagen beachte man, dass $\mathfrak{m}^d(\check{B}) = \mathfrak{m}^d(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}^d$ auf Grund der Spiegelungs-Invarianz des Lebesgue-Maßes gilt. ■

Bemerkung: Im speziellen Fall, dass die Körner $\{\Xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ alle deterministische abgeschlossene Kugeln $K(r)$ um den Nullpunkt mit Radius $r > 0$ sind, folgt die Formel für den Bedeckungsgrad in Satz 21 auch direkt aus der Überlegung

$$1 - p_{\Xi} = P(\mathbf{0} \notin \Xi) = P(\xi(K(r)) = 0) = \exp(-\lambda \cdot \mathfrak{m}^d(K(r))),$$

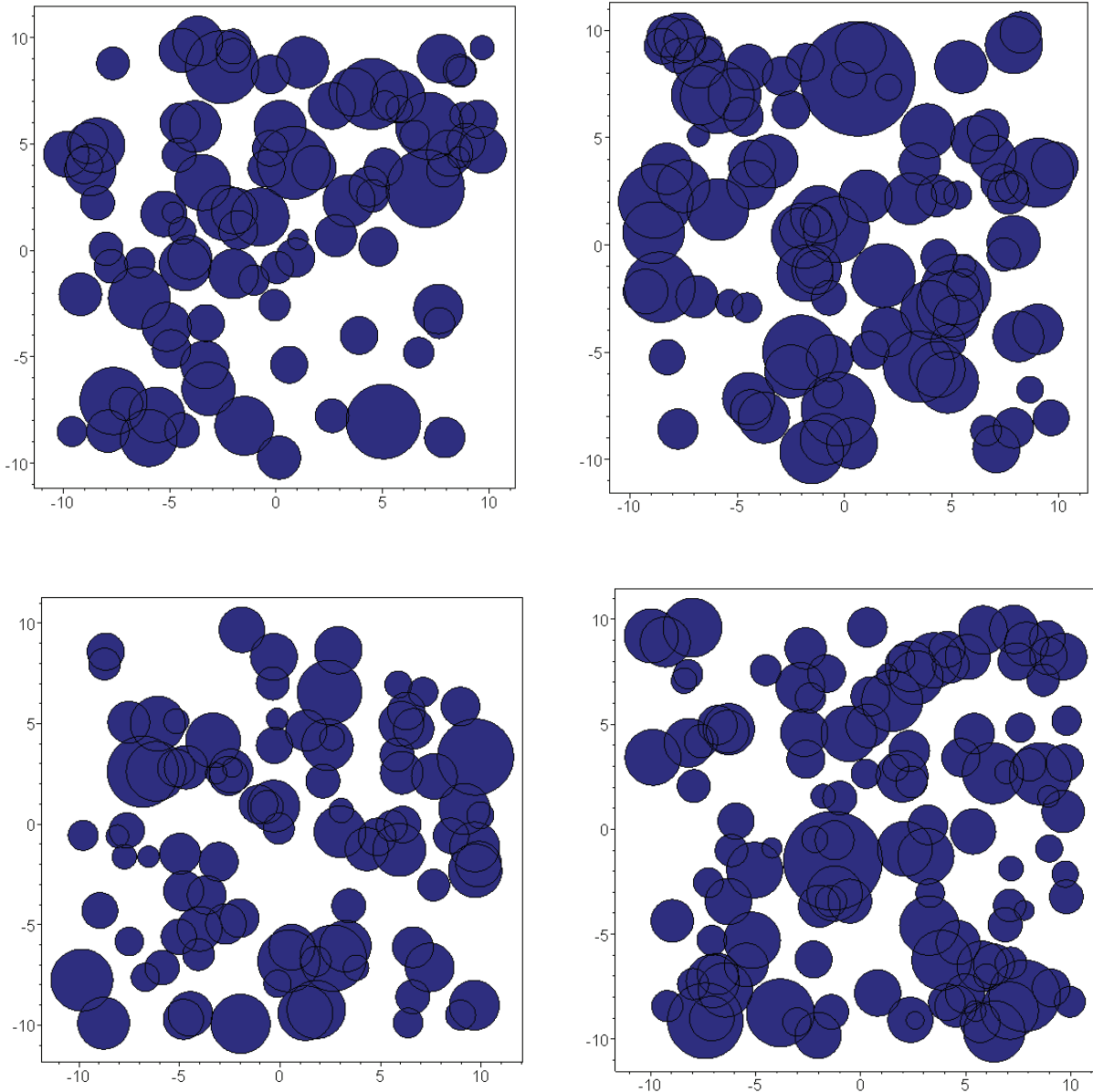
wobei ξ einen homogenen Poisson-Punktprozess mit Parameter $\lambda > 0$ bezeichne.



Veranschaulichung für $d = 2$; die roten Punkte repräsentieren ξ
dargestellt ist der Fall $\{\mathbf{0} \notin \Xi\} = \{\xi(K(r)) = 0\}$

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Die nachfolgenden Graphiken zeigen vier Simulationen von *zweidimensionalen* homogenen Poisson-Boole-Modellen mit Parameter $\lambda = 0,25$ und zufälligen abgeschlossenen Kreisen als Körnern. Als Verteilung für den Radius R wurde eine Lognormal-Verteilung mit Parametern $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 0,1$ gewählt. Die Fenster für den zu Grunde liegenden homogenen Poisson-Prozess wurden auf den Bereich $[-10,10] \times [-10,10]$ beschränkt.

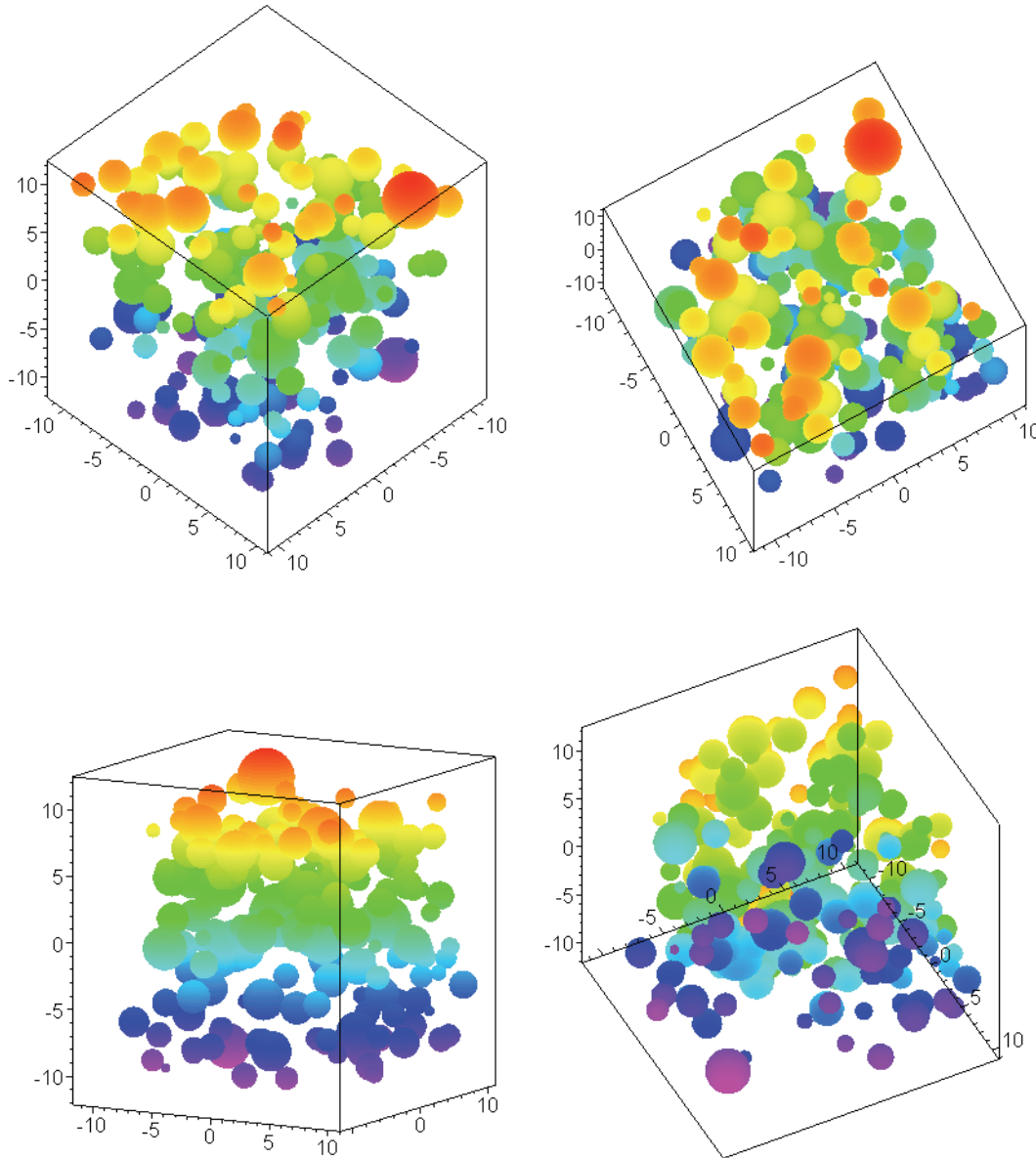


Für den Überdeckungsgrad p_{Ξ} erhält man hier wegen $E(R^2) = e^{2(\mu+\sigma^2)} = e^{0,2} = 1,2214\dots$ speziell

$$p_{\Xi} = T_{\Xi}(\{\mathbf{0}\}) = 1 - \exp(-\lambda \cdot E[\mathbf{m}^d(\Xi_1)]) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4} E(R^2) \pi\right) = 0,6168\dots$$

II. Zufällige abgeschlossene Mengen

Die nachfolgenden Graphiken zeigen eine Simulation eines *dreidimensionalen* homogenen Poisson-Boole-Modells mit Parameter $\lambda = 0,25$ und zufälligen abgeschlossenen Kugeln als Körnern aus vier unterschiedlichen Perspektiven. Als Verteilung für den Radius R wurde wieder eine Lognormal-Verteilung mit Parametern $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 0,1$ gewählt. Die Fenster für den zu Grunde liegenden homogenen Poisson-Prozess wurden auf den Bereich $[-10,10] \times [-10,10] \times [-10,10]$ beschränkt.



Für den Überdeckungsgrad p_{Ξ} erhält man hier wegen $E(R^3) = e^{3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2} = e^{0,45} = 1,5683\dots$ noch

$$p_{\Xi} = T_{\Xi}(\{\mathbf{0}\}) = 1 - \exp(-\lambda \cdot E[m^d(\Xi_1)]) = 1 - \exp\left(-E(R^3) \frac{\pi}{3}\right) = 0,8064\dots$$

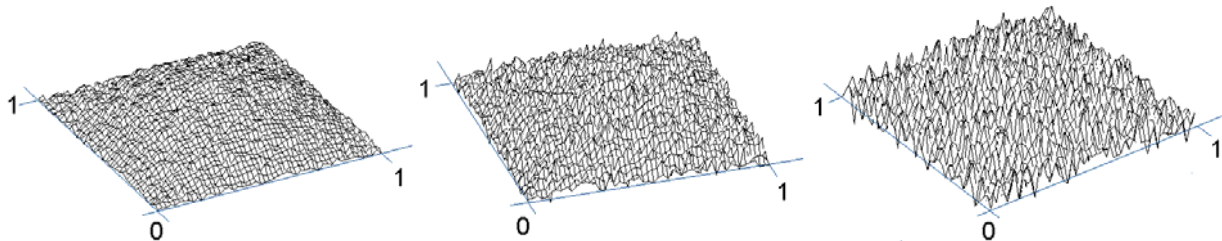
III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Die Entwicklung moderner geostatistischer Methoden geht zurück auf empirische Studien des südafrikanischen Ingenieurs Danie Gerhardus Krige, der in den 1950er Jahren im Goldbergbau im Witwatersrand¹ (ein Höhenzug in den Provinzen Gauteng, North West und Mpumalanga [ehemals Transvaal]) beschäftigt war. Seine Ideen wurden später von Georges Matheron an der französischen École des Mines in Fontainebleau (in der Nähe von Paris gelegen) aufgegriffen und auf eine solide mathematische Grundlage gestellt. Geostatistik kann einerseits als Teilgebiet der Linearen Statistischen Modelle (Regressionsmodelle) aufgefasst werden, andererseits aber auch als Teilgebiet der Theorie der Zufallsfelder (in der Geostatistik meist mit „regionalisierten Variablen“ assoziiert).

III.1. Maßtheoretische Grundlagen

Definition 12: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ für $d \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{Z} = \{Z(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in D\}$ eine Familie reellwertiger Zufallsvariablen. Dann heißt \mathbf{Z} ein *Zufallsfeld* über D . Die Elemente $Z(\mathbf{x})$ von \mathbf{Z} heißen *regionalisierte Variable*.

Bemerkung: Ein Zufallsfeld kann aus Sicht der klassischen Stochastik aufgefasst werden als eine Familie von Zufallsvariablen mit einem mehrdimensionalen Index. In der Geostatistik wird aber \mathbf{x} weniger als Index, sondern vielmehr als *Geo-Referenz* betrachtet, d.h. als ein physischer Ort, an dem Messungen erhoben werden, die als Realisierungen der Zufallsvariablen $Z(\mathbf{x})$ aufgefasst werden. Daher werden für Anwendungen in der Regel zusammenhängende Gebiete $D \subseteq \mathbb{R}^d$ betrachtet.



Realisierung von Zufallsfeldern mit $D = [0,1] \times [0,1]$ verschiedener „Rauigkeit“

Ein wesentliches Ziel geostatistischer Analysen ist die *Vorhersage* eines Wertes des Zufallsfeldes an Stellen, für die keine Messwerte vorliegen. Es geht hier also nicht um eine *Parameterschätzung*, sondern um eine *Prognose der Zufallswerte* auf der Basis von gegebenen Beobachtungen. In der Regel bestehen zwischen zwei Werten $Z(\mathbf{x})$ und $Z(\mathbf{y})$ des Zufallsfeldes für $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ stochastische Abhängigkeiten, die üblicherweise umso größer sind, je näher \mathbf{x} und \mathbf{y} zusammenliegen. Es treten manchmal aber auch periodische Zusammenhänge auf. Aus diesem Grund spielt in der Geostatistik die Modellierung räumlicher stochastischer Abhängigkeiten eine besonders wichtige Rolle.

Beispiel: Es sei Ξ eine zufällige abgeschlossene Menge im Sinne von Kapitel II. Dann ist $\mathbf{Z} = \{\mathbb{1}_{\Xi}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in D\}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Zufallsfeld. Zur Veranschaulichung wählen wir hier $\Xi = R \cdot K(1)$ mit einer (beliebigen) Zufallsvariablen $R \geq 0$ mit stetiger Verteilungsfunktion und der d -dimensionalen Einheitskugel $K(1)$ und $D := [-1,1]^2$. Dann gilt:

¹ Die südafrikanische Währung *Rand* wurde nach diesem Höhenzug benannt, weil dort Gold in größerer Menge gefunden wurde.

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

$$\begin{aligned} P(\{Z(\mathbf{x}) = 1\} \cap \{Z(\mathbf{y}) = 1\}) &= P(\{R \geq \|\mathbf{x}\|_2\} \cap \{R \geq \|\mathbf{y}\|_2\}) \\ &= P(R \geq \max\{\|\mathbf{x}\|_2, \|\mathbf{y}\|_2\}) = 1 - F_R(\max\{\|\mathbf{x}\|_2, \|\mathbf{y}\|_2\}). \end{aligned}$$

Entsprechend gilt

$$P(\{Z(\mathbf{x}) = 1\}) = P(R \geq \|\mathbf{x}\|_2) = 1 - F_R(\|\mathbf{x}\|_2),$$

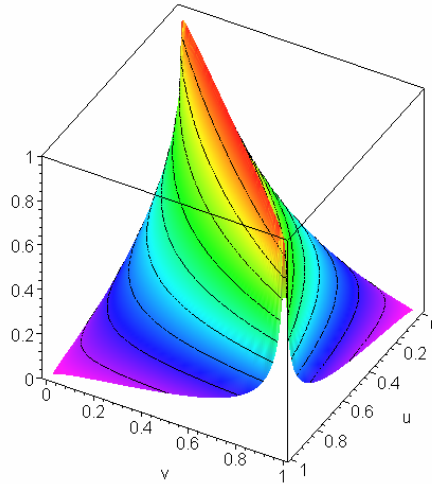
so dass

$$\begin{aligned} \text{Kov}(Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{y})) &= 1 - F_R(\max\{\|\mathbf{x}\|_2, \|\mathbf{y}\|_2\}) - [1 - F_R(\|\mathbf{x}\|_2)] \cdot [1 - F_R(\|\mathbf{y}\|_2)] \\ &= F_R(\|\mathbf{x}\|_2) + F_R(\|\mathbf{y}\|_2) - F_R(\|\mathbf{x}\|_2) \cdot F_R(\|\mathbf{y}\|_2) - F_R(\max\{\|\mathbf{x}\|_2, \|\mathbf{y}\|_2\}) \end{aligned}$$

für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ folgt.

Im speziellen Fall $P^R = \mathcal{U}[0,1]$ ergibt sich damit z.B. für die Korrelation

$$\rho(Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{y})) = \frac{\|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2 - \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 - \max\{\|\mathbf{x}\|_2, \|\mathbf{y}\|_2\}}{\sqrt{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 (1 - \|\mathbf{x}\|_2)(1 - \|\mathbf{y}\|_2)}} \quad \text{für } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D.$$



Graph der Funktion $c(u, v) = \frac{u + v - uv - \max(u, v)}{\sqrt{uv(1-u)(1-v)}}$ für $(u, v) \in (0, 1]^2$

Definition 13: Ein Zufallsfeld mit $D = \mathbb{R}^d$ heißt *stark* (oder *strikt*) *stationär von der Ordnung* $n \in \mathbb{N}$, wenn

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{Z(\mathbf{x}_i) \leq z_i\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \{Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) \leq z_i\}\right) \quad \text{für alle } \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d \text{ und } (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \text{ gilt.}$$

Das Zufallsfeld heißt allgemeiner *stark* (oder *strikt*) *stationär*, wenn es stationär von *jeder* Ordnung $n \in \mathbb{N}$ ist.

Das Zufallsfeld heißt *schwach stationär von der Ordnung* $n \in \mathbb{N}$, wenn das n -te absolute Moment jeder regionalisierten Variablen existiert und

$$E\left[\prod_{i=1}^m Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})\right] = E\left[\prod_{i=1}^m Z(\mathbf{x}_i)\right] \quad \text{für alle } m \leq n \text{ und alle } \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d \text{ gilt.}$$

Es heißt allgemeiner *schwach stationär*, wenn es schwach stationär von *jeder* Ordnung $n \in \mathbb{N}$ ist.

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Lemma 24: Ist ein Zufallsfeld \mathbf{Z} von der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ stark (schwach) stationär, so auch von jeder kleineren Ordnung $m < n$.

Beweis: Für die starke Stationarität betrachte man den Fall $z_i \rightarrow \infty$ für $i = m + 1, \dots, n$. Die Aussage für die schwache Stationarität folgt aus der Hölder-Ungleichung, vgl. das Skript zur STOCHASTIK, Lemma 37 d). ■

Lemma 25: Ein strikt stationäres Zufallsfeld der Ordnung $n \in \mathbb{N}$, bei dem alle regionalisierten Variablen absolute Momente der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ besitzen, ist auch schwach stationär von der Ordnung n , aber nicht notwendig umgekehrt.

Beweis: Die Definition der starken Stationarität der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ impliziert, dass alle m -dimensionalen Randverteilungen des Zufallsfeldes identisch sind für $m \leq n$. Daher sind auch alle Produkt-Momente gleicher Ordnung identisch. Die Umkehrung gilt nicht, wie etwa folgendes Gegenbeispiel für den Fall $n = 1$ zeigt:

Es sei $\mathbf{Z} = \{Z(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$ eine Familie stochastisch unabhängiger, normalverteilter (und damit auch integrierbarer) Zufallsvariablen mit $P^{Z(\mathbf{x})} = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \|\mathbf{x}\|_2 + 1)$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt $E[Z(\mathbf{x})] = \mu = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, aber es ist $P^{Z(\mathbf{x})} \neq P^{Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})}$ für alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ mit $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$. ■

Bemerkung: Das Zufallsfeld $\mathbf{Z} = \{\mathbb{1}_{\Xi}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$ ist offensichtlich stark stationär, wenn die zufällige abgeschlossene Menge Ξ stationär im Sinne der Definition 8 ist.

In der Geostatistik wird üblicherweise (nur) angenommen, dass das Zufallsfeld \mathbf{Z} schwach stationär von zweiter Ordnung ist (sog. *kanonische Hypothese*). Es gilt dann:

Lemma 26: Unter der kanonischen Hypothese bestehen die Beziehungen

$$E[Z(\mathbf{x})] = \mu = E[Z(\mathbf{0})]$$

$$Kov[Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] = Kov[Z(\mathbf{0}), Z(\mathbf{h})]$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$. Die daraus resultierende Funktion

$$C(\mathbf{h}) := Kov[Z(\mathbf{0}), Z(\mathbf{h})] \text{ für } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$$

heißt *Kovarianzfunktion* des Zufallsfeldes \mathbf{Z} .

Beweis: Der erste Teil folgt sofort aus Lemma 24 und Definition 13. Der zweite Teil folgt direkt aus Definition 13 wegen

$$\begin{aligned} Kov[Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] &= E[Z(\mathbf{x}) \cdot Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] - E[Z(\mathbf{x})] \cdot E[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] \\ &= E[Z(\mathbf{0}) \cdot Z(\mathbf{h})] - E[Z(\mathbf{0})] \cdot E[Z(\mathbf{h})] = Kov[Z(\mathbf{0}), Z(\mathbf{h})] \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$. ■

Die kanonische Hypothese bedeutet also, dass die „räumliche Variabilität“ des Zufallsfeldes nicht von den einzelnen Koordinaten $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ abhängt, sondern überall gleich ist und nur von der Differenz der Koordinaten abhängt.

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Definition 14 (positiv semidefinite Funktion): Eine Abbildung $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *positiv semidefinit*, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j g(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \geq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ alle } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ und alle } \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d.$$

Lemma 27: Unter der kanonischen Hypothese gilt für die Kovarianzfunktion C des Zufallsfeldes \mathbf{Z} :

- a) $C(\mathbf{0}) = \text{Var}[Z(\mathbf{x})] \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$
- b) $C(\mathbf{h}) = C(-\mathbf{h})$ für alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$, d.h. C ist symmetrisch
- c) $|C(\mathbf{h})| \leq C(\mathbf{0})$ für alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$, d.h. C ist beschränkt
- d) C ist positiv semidefinit.

Beweis:

- a) $C(\mathbf{0}) = \text{Kov}[Z(\mathbf{0}), Z(\mathbf{0})] = \text{Var}[Z(\mathbf{0})] = \text{Kov}[Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x})] = \text{Var}[Z(\mathbf{x})] \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$
- b) $C(\mathbf{h}) = \text{Kov}[Z(\mathbf{0}), Z(\mathbf{h})] = \text{Kov}[Z(\mathbf{0} - \mathbf{h}), Z(\mathbf{h} - \mathbf{h})] = \text{Kov}[Z(-\mathbf{h}), Z(\mathbf{0})] = C(-\mathbf{h})$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$
- c) $|C(\mathbf{h})| = |\text{Kov}[Z(\mathbf{0}), Z(\mathbf{h})]| = |\rho(Z(\mathbf{0}), Z(\mathbf{h}))| \cdot \sqrt{\text{Var}[Z(\mathbf{0})] \cdot \text{Var}[Z(\mathbf{h})]} \leq \text{Var}[Z(\mathbf{0})] = C(\mathbf{0})$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$
- d) Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j C(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Kov}(Z(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), Z(\mathbf{0})) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Kov}(Z(\mathbf{x}_i), Z(\mathbf{x}_j)) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i Z(\mathbf{x}_i)\right) \geq 0 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und alle $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$.

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Definition 15: Gilt unter der kanonischen Hypothese für ein Zufallsfeld \mathbf{Z} für die Kovarianzfunktion $C(\mathbf{0}) > 0$, so heißt die durch

$$\rho(\mathbf{h}) = \frac{C(\mathbf{h})}{C(\mathbf{0})} \text{ für alle } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$$

definierte Funktion ρ die *Korrelationsfunktion* des Zufallsfeldes \mathbf{Z} .

Bemerkung: Offensichtlich unterscheiden sich unter der kanonischen Hypothese die Kovarianz- und die Korrelationsfunktion eines Zufallsfeldes nur durch einen positiven Faktor, nämlich die Varianz $C(\mathbf{0}) = \text{Var}[Z(\mathbf{x})]$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Eine Korrelationsfunktion ρ kann deshalb auch aufgefasst werden als eine Kovarianzfunktion C mit Wert $C(\mathbf{0}) = 1$. Insbesondere erfüllt eine Korrelationsfunktion daher die Bedingungen b), c) [mit $C(\mathbf{0}) = 1$] und d) aus Lemma 27.

Beispiel: Wir greifen hier das stationäre Boole-Modell mit den deterministischen Körnern aus der Bemerkung im Anschluss an Satz 21 auf und setzen wieder $\mathbf{Z} = \{\mathbb{1}_{\Xi}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$. Dann ist \mathbf{Z} schwach stationär von zweiter Ordnung, und es gilt (vgl. Definition 9):

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

$$C(\mathbf{h}) = C_{\Xi}(\mathbf{h}) - p_{\Xi}^2 = P(\{\mathbf{0} \in \Xi\} \cap \{\mathbf{h} \in \Xi\}) - p_{\Xi}^2 = q_{\Xi} \cdot \left(\exp(-\lambda m^d(K(r) \setminus \{\mathbf{h} + K(r)\})) \right) - q_{\Xi}$$

für $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ mit

$$q_{\Xi} := 1 - p_{\Xi} = \exp(-\lambda m^d(K(r))).$$

Dabei stellt $\mathbf{h} + K(r)$ gerade die Kugel mit Radius r um den Punkt $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ dar. Dies sieht man wie folgt: Es bezeichne $A := \{Z(\mathbf{0}) = 0\}$, $B := \{Z(\mathbf{h}) = 0\}$. Es folgt für $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} P(Z(\mathbf{0}) = 1, Z(\mathbf{h}) = 1) &= P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= (1 - P(A)) + (1 - P(B)) + P(A \cap B) - 1 = P(A^c) + P(B^c) + P(A \cap B) - 1 \\ &= P(Z(\mathbf{0}) = 1) + P(Z(\mathbf{h}) = 1) + 1 - P(Z(\mathbf{0}) = 0, Z(\mathbf{h}) = 0) - 1 \\ &= 2 \cdot p_{\Xi} + P(\xi(K(r) \cup \{\mathbf{h} + K(r)\}) = 0) - 1 \\ &= 2 \cdot p_{\Xi} + \exp(-\lambda m^d(K(r) \cup \{\mathbf{h} + K(r)\})) - 1 \\ &= 2 \cdot p_{\Xi} + \exp(-\lambda m^d(\{\mathbf{h} + K(r)\} \oplus [K(r) \setminus \{\mathbf{h} + K(r)\}])) - 1 \\ &= 2 \cdot p_{\Xi} + \exp(-\lambda m^d(\{\mathbf{h} + K(r)\})) \cdot \exp(-\lambda m^d(K(r) \setminus \{\mathbf{h} + K(r)\})) - 1 \\ &= 2 \cdot p_{\Xi} + \exp(-\lambda m^d(K(r))) \cdot \exp(-\lambda m^d(K(r) \setminus \{\mathbf{h} + K(r)\})) - 1 \\ &= 2 \cdot p_{\Xi} + (1 - p_{\Xi}) \cdot \exp(-\lambda m^d(K(r) \setminus \{\mathbf{h} + K(r)\})) - 1 \\ &= 2 \cdot p_{\Xi} + q_{\Xi} \cdot \exp(-\lambda m^d(K(r) \setminus \{\mathbf{h} + K(r)\})) - 1, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} C(\mathbf{h}) &= P(Z(\mathbf{0}) = 1, Z(\mathbf{h}) = 1) - p_{\Xi}^2 = q_{\Xi} \cdot \exp(-\lambda m^d(K(r) \setminus \{\mathbf{h} + K(r)\})) - (1 + 2p_{\Xi} + p_{\Xi}^2) \\ &= q_{\Xi} \cdot \exp(-\lambda m^d(K(r) \setminus \{\mathbf{h} + K(r)\})) - q_{\Xi}^2 = q_{\Xi} \cdot \left(\exp(-\lambda m^d(K(r) \setminus \{\mathbf{h} + K(r)\})) - q_{\Xi} \right) \end{aligned}$$

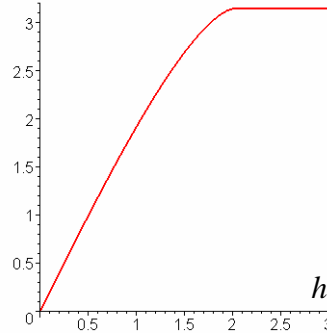
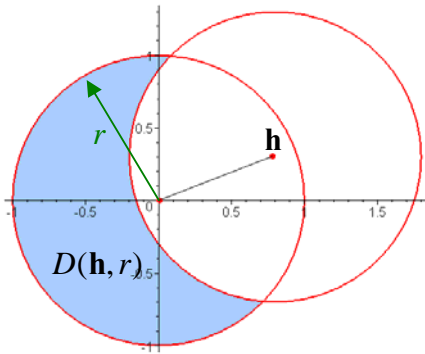
folgt.

Der Ausdruck $m^d(K(r) \setminus \{\mathbf{h} + K(r)\})$ ist im Allgemeinen nicht einfach zu berechnen, für $d = 2$ gilt aber z.B.:

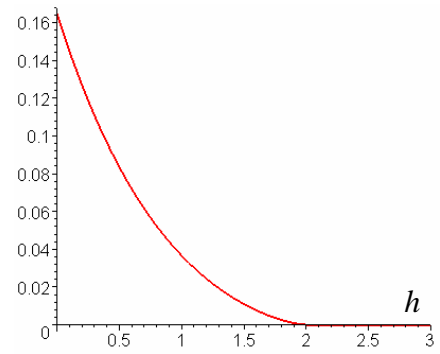
$$D(\mathbf{h}, r) := m^2(K(r) \setminus \{\mathbf{h} + K(r)\}) = \begin{cases} \left(\pi - 2 \cdot \arccos\left(\frac{h}{2r}\right) \right) \cdot r^2 + \frac{h}{2} \cdot \sqrt{4r^2 - h^2} & \text{für } h \leq 2r \\ \pi r^2 & \text{für } h > 2r \end{cases}$$

mit $h = \|\mathbf{h}\|_2 > 0$.

III. Zufallsfelder (Geostatistik)



$D(\mathbf{h}, 1)$



$C(\mathbf{h})$ für $r = 1, \lambda = 0,5$

Definition 16: Ein Zufallsfeld $\mathbf{Z} = \{Z(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in D\}$ heißt *isotrop*, wenn alle regionalisierten Variablen quadratisch integrierbar sind und die Kovarianzfunktion dargestellt werden kann als

$$\text{Kov}(Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{y})) = \tilde{c}(\|\mathbf{x}\|_2, \|\mathbf{y}\|_2) \text{ für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$$

mit einer geeigneten Funktion $\tilde{c} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Erfüllt das Zufallsfeld zusätzlich die kanonische Hypothese, so heißt die durch

$$c(h) := \tilde{c}(0, h) \text{ für alle } h \in \mathbb{R}^+$$

definierte Funktion *radiale Kovarianzfunktion* des Zufallsfeldes. In diesem Fall gilt

$$C(\mathbf{h}) = c(\|\mathbf{h}\|_2) \text{ für alle } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d.$$

Entsprechend heißt die im Fall $C(\mathbf{0}) > 0$ durch

$$r(h) := \frac{c(h)}{c(0)} \text{ für } h \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion r die *radiale Korrelationsfunktion* des Zufallsfeldes.

Bemerkung: Offensichtlich ist das Zufallsfeld $\mathbf{Z} = \{\mathbb{1}_{\Xi}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in D\}$ aus dem Beispiel nach Definition 12 isotrop, aber nicht (schwach) stationär. Das zuletzt diskutierte Beispiel im Anschluss an Lemma 27 ist dagegen stationär und isotrop. Für solche Zufallsfelder gilt einfacher:

Lemma 28: Unter der kanonischen Hypothese gilt für die radiale Kovarianzfunktion c eines isotropen Zufallsfeldes \mathbf{Z} :

- $c(0) = \text{Var}[Z(\mathbf{x})] \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$
- $|c(h)| \leq c(0)$ für alle $h \in \mathbb{R}$, d.h. c ist beschränkt
- c ist positiv semidefinit über \mathbb{R}^+ , d.h. es gilt

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j c(h_{ij}) \geq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ alle } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ und alle } h_{ij} \in \mathbb{R}^+, i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Beweis: Folgt sofort aus Lemma 27 wegen $c(h) = C(\mathbf{h}) = \text{Kov}(Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}))$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ mit $h = \|\mathbf{h}\|_2$. Für Teil c) beachte man, dass $C(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = c(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2)$ für alle $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^d$ gilt und sich die Aussage daher für $h_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2$ ergibt. ■

Bemerkung: Für die radiale Korrelationsfunktion r gelten die Aussagen von Lemma 28 entsprechend, mit $r(0) = 1$.

Die positive Semidefinitheit spielt bei der Definition einer Kovarianz- bzw. Korrelationsfunktion die entscheidende Rolle. Sie kann charakterisiert werden durch den folgenden

Satz 22 (Bochner): Unter der kanonischen Hypothese gilt: Jede *stetige* Abbildung C mit den Eigenschaften a) bis d) aus Lemma 27 ist Kovarianzfunktion eines geeigneten Zufallsfeldes \mathbf{Z} , und jede *stetige* Korrelationsfunktion ρ eines Zufallsfeldes \mathbf{Z} mit $\sigma^2 := C(\mathbf{0}) > 0$ lässt sich darstellen als Fourier-Transformierte

$$\rho(\mathbf{h}) = E[\cos(\langle \mathbf{X}, \mathbf{h} \rangle)] = E[\exp(i\langle \mathbf{X}, \mathbf{h} \rangle)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\sum_{j=1}^d h_j x_j\right) Q(dx_1, \dots, dx_d)$$

für alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ mit einem geeigneten d -dimensionalen Zufallsvektor \mathbf{X} mit Verteilung $Q = P^{\mathbf{X}}$, die symmetrisch zum Nullpunkt ist. Hierbei bezeichnet $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ wie üblich das Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. Wegen der Symmetrie zum Nullpunkt kann auch nur angenommen werden, dass Q auf $(\mathbb{R}^+)^d$ konzentriert ist. In diesem Fall gilt äquivalent

$$C(\mathbf{h}) = \sigma^2 E[\cos(\langle \mathbf{X}, \mathbf{h} \rangle)] = \sigma^2 \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \cos\left(\sum_{i=1}^d h_i x_i\right) Q(dx_1, \dots, dx_d) \text{ für alle } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d.$$

Beweis: Der Beweis dieses Satzes benutzt Methoden der Fourier-Analyse und Funktionalanalysis, vgl. SCHABENBERGER AND GOTWAY (2005), Abschnitt 2.5 oder ABRAHAMSEN (1997), Abschnitt 3.2.2. Wir zeigen hier nur, dass die Fourier-Transformierte die Eigenschaften einer Korrelationsfunktion besitzt. Dazu benutzen wir Tatsache, dass die komplexe Funktion $\zeta(x) = e^{ix}$ mit $z \in \mathbb{R}$ positiv semidefinit ist, d.h.

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k \bar{a}_j \zeta(x_k - x_j) = \left(\sum_{k=1}^n a_k e^{ix_k} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \bar{a}_j e^{-ix_j} \right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k e^{ix_k} \right) \overline{\left(\sum_{j=1}^n a_j e^{ix_j} \right)} = \left\| \sum_{k=1}^n a_k e^{ix_k} \right\|_{\mathbb{C}}^2 \geq 0$$

gilt für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, wobei für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ die Zahl $\bar{z} = a - bi \in \mathbb{C}$ wie üblich die konjugiert-komplexe Zahl zu a bezeichnet. Man beachte dabei, dass für $z = a + bi$, $w = c + di \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\bar{w} \cdot \bar{z} = (a - bi) \cdot (c - di) = ac - bd - (ad - bc)i = \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{w \cdot z}$$

und speziell $\overline{\zeta(z)} = e^{-iz}$ für $z \in \mathbb{R}$.

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k \bar{a}_j \rho(\mathbf{h}_k - \mathbf{h}_j) &= E \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k \bar{a}_j \exp(i \langle \mathbf{X}, \mathbf{h}_k - \mathbf{h}_j \rangle) \right] \\ &= E \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k \bar{a}_j \exp(i \langle \mathbf{X}, \mathbf{h}_k \rangle - i \langle \mathbf{X}, \mathbf{h}_j \rangle) \right] = E \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k \bar{a}_j \zeta(\langle \mathbf{X}, \mathbf{h}_k \rangle - \langle \mathbf{X}, \mathbf{h}_j \rangle) \right] \geq 0 \end{aligned}$$

für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n \in \mathbb{R}^d$, woraus die positive Semidefinitheit von C folgt (man wähle hierfür lediglich $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$). Die anderen Eigenschaften sind evident wegen

a) $E[\cos(\langle \mathbf{X}, \mathbf{0} \rangle)] = \cos(0) = 1$ (Normiertheit)

b) $E[\cos(\langle \mathbf{X}, -\mathbf{h} \rangle)] = E[\cos(-\langle \mathbf{X}, \mathbf{h} \rangle)] = E[\cos(\langle \mathbf{X}, \mathbf{h} \rangle)]$ für alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ (Symmetrie)

c) $|E[\cos(\langle \mathbf{X}, \mathbf{h} \rangle)]| \leq E[1] = 1$ für alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ (Beschränktheit)

Für den vollständigen Beweis siehe z.B. RUDIN (1973), Chapter 11, Exercise 14. ■

Die im Satz von Bochner auftretende Verteilung Q wird auch als das zu der Korrelationsfunktion ρ gehörige *Spektralmaß* bezeichnet. Im Fall, dass Q eine Lebesgue-Dichte q besitzt, lässt sich q darstellen als Fourier-Umkehrtransformierte

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle) \cdot \rho(\mathbf{h}) m^d(d\mathbf{h}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle) \cdot \rho(\mathbf{h}) m^d(d\mathbf{h}) \text{ für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Allerdings lassen sich mit dieser Beziehung keine Verteilungen Q „rekonstruieren“, die keine (Lebesgue-)Dichte besitzen. Dies zeigt schon für $d = 1$ das Beispiel der Korrelationsfunktion $\rho(h) = 1$ für alle $h \in \mathbb{R}$, welche man aus dem Satz von Bochner für den Fall $Q = \varepsilon_0$ erhält. Hier gilt nämlich

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle) \cdot \rho(\mathbf{h}) m^d(d\mathbf{h}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(xh) dh = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(xh)}{x} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aus dem Satz von Bochner erhält man sofort noch die folgende Abschätzung für das Verhalten von Korrelationsfunktionen in der Nähe des Nullpunkts:

Lemma 29: Es sei ρ eine stetige Korrelationsfunktion. Ist die Norm $\|\mathbf{X}\|_2$ des in der Darstellung des Satzes von Bochner verwendeten Zufallsvektors \mathbf{X} quadratisch interierbar, so gilt

$$\rho(\mathbf{h}) \geq 1 - \frac{1}{2} \|\mathbf{h}\|_2^2 E[\|\mathbf{X}\|_2^2] \text{ für alle } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d.$$

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Beweis: Aus der bekannten Ungleichung

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

folgt mit den Bezeichnungen aus Satz 26 und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\rho(\mathbf{h}) = E[\cos(\langle \mathbf{X}, \mathbf{h} \rangle)] \geq E\left[1 - \frac{1}{2} \langle \mathbf{X}, \mathbf{h} \rangle^2\right] \geq E\left[1 - \frac{1}{2} \|\mathbf{h}\|_2^2 \|\mathbf{X}\|_2^2\right] = 1 - \frac{1}{2} \|\mathbf{h}\|_2^2 E[\|\mathbf{X}\|_2^2] \text{ für alle } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d. \blacksquare$$

Die folgende Tabelle enthält einige nach dem Satz von Bochner berechnete stetige Korrelationsfunktionen für die Dimensionen $d = 1$ und $d = 2$ (bzw. noch allgemeiner).

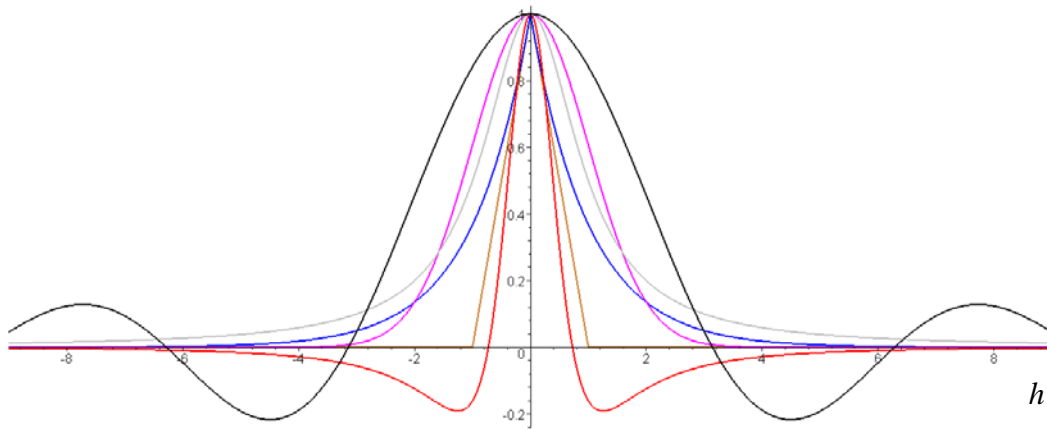
i	d	Q	$\rho_i(\mathbf{h})$ für $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$
1	1	$\mathcal{U}[0,1]$	$\text{sinc}(h) = \frac{\sin(h)}{h}$
2	1	$\mathcal{E}(1)$	$\frac{1}{1+h^2}$
3	1	$\Gamma(\alpha,1)$	$\frac{\cos(\alpha \cdot \arctan(h))}{(1+h^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$
4	1	$\mathcal{N}(0,1)$	$\exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)$
5	1	\mathcal{C} (Cauchy-Verteilung)	$\exp(- h)$
6	1	\mathcal{COS} (Cosinus-Verteilung)	$(1- h) \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(h)$
7	2	$\mathcal{U}[0,1]^2$	$\frac{\cos(h_1) + \cos(h_2) - \cos(h_1 + h_2) - 1}{h_1 \cdot h_2}$
8	2	$\mathcal{E}(1) \otimes \mathcal{E}(1)$	$\frac{1 - h_1 h_2}{(1+h_1^2)(1+h_2^2)}$
9	2	$\mathcal{N}(0,1) \otimes \mathcal{N}(0,1)$	$\exp\left(-\frac{h_1^2 + h_2^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\ \mathbf{h}\ _2^2}{2}\right)$
10	d	$\bigotimes_{i=1}^d \mathcal{N}(0,1)$	$\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d h_i^2\right) = \exp\left(-\frac{\ \mathbf{h}\ _2^2}{2}\right)$

Als *Cosinus-Verteilung* bezeichnen wir dabei das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Lebesgue-Dichte

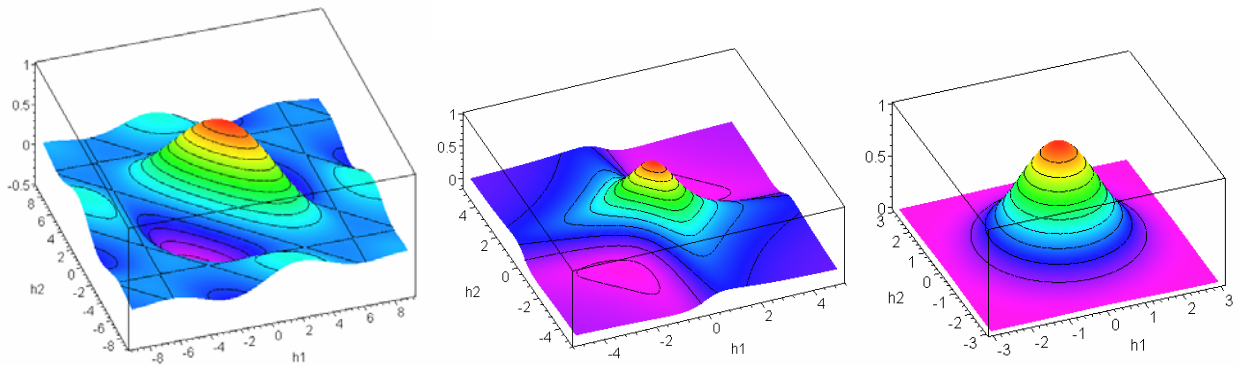
$$g(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\pi x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Man beachte, dass die Korrelationsfunktionen ρ_5 und ρ_6 nicht die Ungleichung des Lemma 29 erfüllen, weil eine Cauchy- bzw. Cosinus-verteilte Zufallsvariable nicht quadratisch integrierbar ist.



Graphen der Korrelationsfunktionen ρ_1 bis ρ_6



Graphen der Korrelationsfunktionen ρ_7 bis ρ_9

Weitere Beispiele finden sich in SCHABENBERGER AND GOTWAY (2005), Table 4.4.

Offensichtlich hängt nur die Korrelationsfunktion ρ_9 allein von $\|\mathbf{h}\|_2$ ab. Wir wollen daher jetzt der Frage nachgehen, wann im Falle eines *isotropen* Zufallsfelds unter der kanonischen Hypothese die Korrelationsfunktion ρ eine Darstellung der Art

$$\rho(\mathbf{h}) = \rho(-\mathbf{h}) = r(\|\mathbf{h}\|_2) \quad \text{für } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d \quad (*)$$

für eine geeignete Funktion r besitzt (die dann mit der radialen Korrelationsfunktion identisch ist). Hierbei muss zwangsläufig die Dimension Berücksichtigung finden:

Satz 23: Unter der kanonischen Hypothese gilt: Eine stetige Korrelationsfunktion r eines d -dimensionalen isotropen Zufallsfeldes \mathbf{Z} mit $\sigma^2 := C(\mathbf{0}) > 0$ lässt sich durch (*) darstellen, wenn die Bedingung

$$r(h) = E[B_d(h \cdot X)] = \int_0^\infty B_d(h \cdot x) Q(dx) \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}$$

mit einer geeigneten Zufallsvariablen X mit Verteilung $Q = P^X$ erfüllt ist.

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Hierbei ist

$$B_d(z) = \left(\frac{2}{z}\right)^\nu \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) J_\nu(z), \quad z > 0$$

die so genannte *Basis-Funktion* der Dimension d und J_ν die Bessel-Funktion erster Art der Ordnung ν mit $\nu = \frac{d}{2} - 1$.

Zum Beweis dieses Satzes verweisen wir auf SCHABENBERGER AND GOTWAY (2005), Abschnitt 4.3.

Die Besselfunktionen erster Art sind definiert durch die Potenzreihen

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \quad \text{für } z > 0.$$

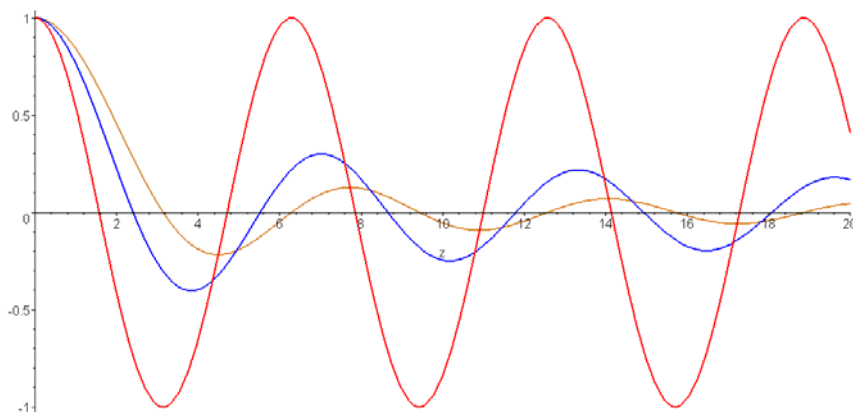
Bemerkung: Für die ersten drei - für die Praxis hauptsächlich relevanten - Dimensionen gilt:

$$B_1(z) = \cos z$$

$$B_2(z) = J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!^2}$$

$$B_3(z) = \frac{\sin z}{z}$$

für $z > 0$ (vgl. SCHABENBERGER AND GOTWAY (2005), Abschnitt 4.3).



Verlauf der Basis-Funktionen $B_1(z)$ (rot), $B_2(z)$ (blau) und $B_3(z)$ (braun)

Ferner gilt: $\lim_{d \rightarrow \infty} B_d(z) = e^{-z^2}$ für $z > 0$. Weitere Eigenschaften von Korrelations-/Kovarianz-funktionen behandelt

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Lemma 30: Unter der kanonischen Hypothese gilt:

- a) Ist $S: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine lineare Abbildung, so ist mit jeder Kovarianz-/Korrelationsfunktion C auch $C \circ S$ eine Kovarianz-/Korrelationsfunktion.
- b) Ist C eine Kovarianzfunktion, so auch $b \cdot C$ für festes $b > 0$. In diesem Fall ist $b \cdot C(\mathbf{0})$ die Varianz des Zufallsfeldes.
- c) Sind ρ_1, \dots, ρ_n Korrelationsfunktionen für $n \in \mathbb{N}$ und sind $c_1, \dots, c_n > 0$ mit $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, so ist auch $\sum_{i=1}^n c_i \rho_i$ eine Korrelationsfunktion.
- d) Sind C_1, \dots, C_n Kovarianzfunktionen für $n \in \mathbb{N}$ und sind $d_1, \dots, d_n > 0$, so ist auch $\sum_{i=1}^n d_i C_i$ eine Kovarianzfunktion.
- e) Sind C_1, \dots, C_n Kovarianz-/Korrelationsfunktionen für $n \in \mathbb{N}$, so auch $\prod_{i=1}^n C_i$.

Beweis: Die Eigenschaften a) bis d) folgen direkt aus Lemma 27 und Satz 22. Teil e) ergibt sich aus Satz 22, wenn man o.B.d.A. annimmt, dass die zur Darstellung der $\rho_i = \frac{C_i}{C_i(\mathbf{0})}$ für $C_i(\mathbf{0})$ verwendeten Zufallsvektoren \mathbf{X}_k , $k = 1, \dots, n$ stochastisch unabhängig sind, denn dann ist

$$\prod_{k=1}^n \rho_k(\mathbf{h}) = \prod_{k=1}^n E[\exp(i \langle \mathbf{X}_k, \mathbf{h} \rangle)] = E\left[\prod_{k=1}^n \exp(i \langle \mathbf{X}_k, \mathbf{h} \rangle)\right] = E\left[\exp\left(\sum_{k=1}^n i \langle \mathbf{X}_k, \mathbf{h} \rangle\right)\right] = E\left[\exp\left(i \left\langle \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k, \mathbf{h} \right\rangle\right)\right]$$

für alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$, womit das Lemma bewiesen ist. ■

Bemerkung: Aus Teil a) von Lemma 29 ergibt sich spezieller noch:

- Ist $C(\mathbf{h})$ eine Kovarianz-/Korrelationsfunktion, so auch $C(a \cdot \mathbf{h})$ für festes $a \in \mathbb{R}$ ($\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$).
- Ist $C(\mathbf{h})$ eine Kovarianz-/Korrelationsfunktion und $I \subseteq \{1, \dots, d\}$ eine feste Index-Teilmenge, so ist auch $C(S_I(\mathbf{h}))$ eine Kovarianz-/Korrelationsfunktion für $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$, wobei

$$S_I(\mathbf{h})_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i \in I \\ h_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die letztere Beziehung bedeutet dabei anschaulich, dass eine Korrelations-/Kovarianzfunktion auch bei „Projektion“ in einen niedriger dimensional Teilraum eine Korrelations-/Kovarianzfunktion bleibt.

Lemma 30 eröffnet damit zahlreiche Möglichkeiten zur Modellierung von Korrelations-/Kovarianzfunktionen, die sich später für die Krige-Verfahren als nützlich erweisen werden.

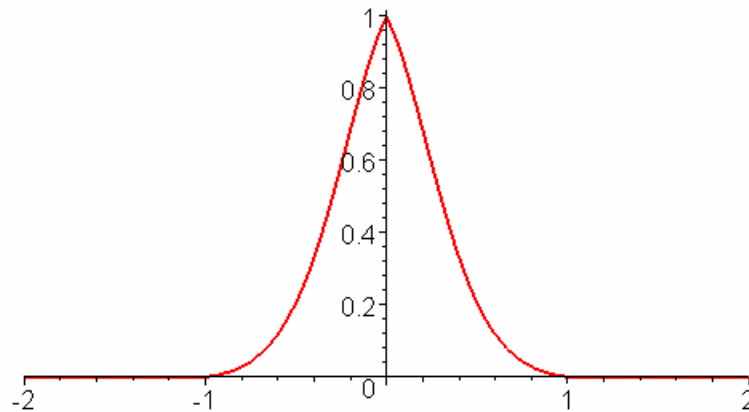
III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Beispiel: Wählt man die mehrdimensionalen Korrelationsfunktion ρ_7 bis ρ_9 aus der Tabelle auf S. 87, so sieht man, dass sich die eindimensionalen Versionen ρ_1 , ρ_2 und ρ_4 ergeben, wenn man entweder h_1 oder h_2 Null setzt. Im ersten Fall muss dabei der Grenzwert betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h_2 \rightarrow 0 \\ h_2 \neq 0}} \frac{\cos(h_1) + \cos(h_2) - \cos(h_1 + h_2) - 1}{h_1 \cdot h_2} &= \lim_{\substack{h_2 \rightarrow 0 \\ h_2 \neq 0}} \frac{\cos(h_1) - \cos(h_1 + h_2) + \cos(h_2) - 1}{h_1 \cdot h_2} \\ &= -\frac{1}{h_1} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial h_2} \cos(h_1 + h_2) \Big|_{h_2=0} + \frac{\partial}{\partial h_2} \cos(h_2) \Big|_{h_2=0} \right] = \frac{\sin h_1}{h_1} + \sin 0 = \frac{\sin h_1}{h_1} \end{aligned}$$

für $h_1 \neq 0$.

Man beachte noch, dass durch den Übergang von einer Korrelationsfunktion ρ zu der Korrelationsfunktion ρ^n für gerade $n \in \mathbb{N}$ immer nicht-negative Korrelationsfunktionen erreichbar sind.



Graph der produkt-kombinierten Korrelationsfunktion $\rho(h) = \frac{1-|h|}{(1+h^2)^4} \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(h)$

III.2. Gauß'sche Zufallsfelder

Den Gauß'schen Zufallsfeldern kommt in der Theorie der schwach stationären Zufallsfelder zweiter Ordnung eine besondere Bedeutung zu, weil ihre Existenz aus der Vorgabe geeigneter Kovarianzfunktionen folgt und sie auch relativ einfach zu simulieren sind.

Definition 17: Ein Zufallsfeld $\mathbf{Z} = \{Z(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in D\}$ heißt *Gauß'sches Zufallsfeld*, wenn alle seine endlich-dimensionalen Randverteilungen multivariate Normalverteilungen sind.

Unter der kanonischen Hypothese ist die Existenz Gauß'sche Zufallsfelder durch die Angabe einer (zulässigen) Kovarianz- oder Korrelationsfunktion gesichert. Eine Darstellung solcher Zufallsfelder ist mittels des Karhunen-Loève-Theorems möglich (zum theoretischen Hintergrund der *Lebesgue-Räume* vgl. etwas das Skript ANALYTISCHE PRINZIPIEN DER STOCHASTIK, Abschnitt I.1.5):

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Satz 24 (Karhunen-Loève): Unter der kanonischen Hypothese sei $\mathbf{Z} = \{Z(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in [0,1]^d\}$ ein Gauß'sches Zufallsfeld mit Erwartungswert Null und Korrelationsfunktion ρ . Der Fredholm-Integral-Operator $T_Z : L^2\left([0,1]^d, [0,1]^d \cap \mathcal{B}^d, \mathfrak{m}^d\right) \rightarrow L^2\left([0,1]^d, [0,1]^d \cap \mathcal{B}^d, \mathfrak{m}^d\right)$ sei definiert durch

$$T_Z f(\mathbf{x}) := \int_{[0,1]^d} \rho(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{y}) \mathfrak{m}^d(d\mathbf{y}), \quad f \in L^2\left([0,1]^d, [0,1]^d \cap \mathcal{B}^d, \mathfrak{m}^d\right), \quad \mathbf{x} \in [0,1]^d.$$

Ferner sei die Folge $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ die Folge der (wegen der positiven Semidefinitheit von ρ) nicht-negativen, absteigenden Eigenwerte und $\{e_k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}}$ die Folge der zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren des Fredholm-Operators, d.h.

$$T_Z e_k(\mathbf{x}) = \lambda_k e_k(\mathbf{x}) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

mit

$$\int_{[0,1]^d} e_k(\mathbf{x}) \cdot e_m(\mathbf{x}) \mathfrak{m}^d(d\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad \text{für } k, m \in \mathbb{N} \text{ und } \mathbf{x} \in [0,1]^d.$$

Dann gilt:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} Y_k e_k(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in [0,1]^d,$$

wobei die Konvergenz im Raum $L^2\left(\Omega \times [0,1]^d, \mathcal{A} \otimes \left([0,1]^d \cap \mathcal{B}^d\right), P \otimes \mathfrak{m}^d\right)$ zu verstehen ist und $\stackrel{D}{=}$ Gleichheit in Verteilung meint. Hierbei ist $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -verteilter Zufallsvariablen.

Zum Hintergrund dieses Satzes vgl. GELFAND ET AL. (2010), ABSCHNITT 8.4.1.1 oder CHRISTAKOS (1992), Kapitel 8.11. Man beachte, dass die Voraussetzung $\mu = 0$ unwesentlich ist, weil man durch den Übergang von $Z(\mathbf{x})$ zu $Z(\mathbf{x}) - \mu$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ stets ein Gauß'sches Zufallsfeld mit Erwartungswert Null erhält.

Für praktische Anwendungen wird die obige Reihendarstellung nach endlich vielen Termen abgeschnitten; vgl. CHRISTAKOS (1992), Kapitel 8.11. Allerdings ist die Bestimmung der Fredholm'schen Eigenwerte und Vektoren im Allgemeinen aufwändig oder nur numerisch möglich.

Bemerkung: Aus der Karhunen-Loève-Darstellung ergibt sich noch die bekannte Beziehung (Satz von Mercer):

$$E[Z(\mathbf{x}) \cdot Z(\mathbf{y})] = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k(\mathbf{x}) e_k(\mathbf{y}) = \sigma^2 \rho(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{für } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^d.$$

Dies kann man wie folgt einsehen:

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Es gilt

$$\begin{aligned}\sigma^2 \rho(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= E[Z(\mathbf{x}) \cdot Z(\mathbf{y})] = E\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} Y_k e_k(\mathbf{x})\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} Y_j e_j(\mathbf{y})\right)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_j} E[Y_k Y_j] e_k(\mathbf{x}) e_j(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k(\mathbf{x}) e_k(\mathbf{y})\end{aligned}$$

für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0, 1]^d$.

Neben der Existenzfrage sind noch vor allem die Pfadeigenschaften Gauß'scher Zufallsfelder von Interesse. Hier gilt speziell:

Satz 25: Ist unter der kanonischen Hypothese die Korrelationsfunktion ρ stetig und erfüllt die Abschätzung

$$\rho(\mathbf{h}) \geq 1 - \frac{c \|\mathbf{h}\|_2^{2d}}{|\ln \|\mathbf{h}\|_2|^{3+\varepsilon}} \text{ für } \|\mathbf{x}\|_2 < 1$$

für Konstanten $c, \varepsilon > 0$, so existieren Versionen des Zufallsfeldes, die fast sicher stetige Pfade besitzen.

Für eine ausführlichere Diskussion zu diesem Punkt siehe CHRISTAKOS (1992), ABRAHAMSEN (1997) oder SCHABENBERGER AND GOTWAY (2005), Abschnitt 2.3. (Vgl. in diesem Zusammenhang Lemma 29!).

Anforderungen an fast sicher *differenzierbare* Pfade des Zufallsfeldes sind höher und erfordern in der Regel entsprechende Differenzierbarkeitseigenschaften der Korrelationsfunktion. In der Theorie wird stattdessen meist die L^2 -Differenzierbarkeit behandelt.

Definition 18: Unter der kanonischen Hypothese heißt ein Zufallsfeld $\mathbf{Z} = \{Z(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$ L^2 -stetig (auch: *stetig im quadratischen Mittel*), wenn gilt:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \|Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})\|_2 = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} E\left[\left(Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})\right)^2\right] = 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Das Zufallsfeld heißt L^2 -differenzierbar (auch: *differenzierbar im quadratischen Mittel*), wenn ein Zufallsfeld $\dot{\mathbf{Z}} = \{\dot{Z}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$ existiert, so dass

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \left\| \frac{Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_2} - \dot{Z}(\mathbf{x}) \right\|_2 = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} E\left[\left(\frac{Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_2} - \dot{Z}(\mathbf{x})\right)^2\right] = 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Satz 26: Unter der kanonischen Hypothese ist ein Zufallsfeld $\mathbf{Z} = \{Z(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$ genau dann

- L^2 -stetig, wenn die Korrelationsfunktion ρ in $\mathbf{h} = 0$ stetig ist
- L^2 -differenzierbar, wenn die Korrelationsfunktion ρ in $\mathbf{h} = 0$ differenzierbar ist.

Beweis: Die erste Aussage ergibt sich unmittelbar aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \|Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})\|_2 &= E\left[(Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}))^2\right] = \text{Var}[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] \\ &= \text{Var}[Z(\mathbf{x})] + \text{Var}[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] - 2\text{Kov}[Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] \\ &= 2(C(\mathbf{0}) - C(\mathbf{h})) = 2C(\mathbf{0})[1 - \rho(\mathbf{h})] = 2\sigma^2[1 - \rho(\mathbf{h})] \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$.

Für den Beweis der zweiten Aussage siehe CHRISTAKOS (1992), Chapter 2, Section 11.4. ■

Eine Monte-Carlo-Simulation von Gauß'schen Zufallsfeldern ist auf verschiedene Weisen möglich, vgl. etwa CHRISTAKOS (1992), Chapter 8. Eine sehr einfache Möglichkeit besteht in der Ausnutzung von Definition 17 durch Diskretisierung des Bereichs D , über dem das Zufallsfeld simuliert werden soll. Es genügt aus den oben dargelegten Gründen, den Fall $\mu = 0$ zu betrachten. Ist nun $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine fest vorgegebene Menge paarweise verschiedener „Gitterpunkte“, so besitzt der Zufallsvektor $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T := (Z(\mathbf{x}_1), \dots, Z(\mathbf{x}_N))^T$ nach Voraussetzung eine multivariate Normalverteilung mit Erwartungswert $\mathbf{0}$ und einer Varianz-Kovarianz-Matrix Σ , deren Einträge durch die paarweisen Kovarianzen $\sigma_{ij} = \sigma^2 \rho(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ für $i, j \in \{1, \dots, N\}$ gegeben sind. Wegen der nicht-negativen Definitheit von Σ existiert (mindestens) eine quadratische invertierbare Matrix A mit der Eigenschaft $\Sigma = A \cdot A^T$. Diese Matrix A kann zur Simulation vermöge der Transformation

$$\mathbf{Y} := A \cdot \mathbf{W}$$

herangezogen werden, wobei \mathbf{W} einen N -dimensionalen Zufallsvektor aus unabhängigen, standard-normalverteilten Komponenten bildet.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine solche Matrix A zu bestimmen; im Allgemeinen existieren sogar mehrere Lösungen. Ein Weg besteht in der *Spektralzerlegung* der Matrix Σ : voraussetzungsgemäß besitzt die Matrix Σ genau N (ggf. mit Vielfachheiten vorkommende) positive *Eigenwerte* $\lambda_1, \dots, \lambda_N$; ferner existiert eine $N \times N$ -Matrix T aus orthonormalen *Eigenvektoren* mit der Eigenschaft

$$\Sigma = T \Delta T^T = T \Delta T^{-1} \text{ mit } \Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_N \end{bmatrix}$$

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Hier ist $A = T\Delta^{1/2}$ eine mögliche Wahl, mit $\Delta^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \sqrt{\lambda_{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{\lambda_N} \end{bmatrix}$.

Eine andere Möglichkeit besteht in der *Cholesky-Zerlegung* von Σ ; Die gesuchte Matrix A wird dabei als *untere Dreiecksmatrix* angenommen:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}.$$

Hiermit ergibt sich

$$\Sigma = [\sigma_{ij}] = AA^T = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{21} & \dots & a_{11}a_{N1} \\ a_{21}a_{11} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & \dots & a_{21}a_{N1} + a_{22}a_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}a_{11} & a_{N1}a_{21} + a_{N2}a_{22} & \dots & \sum_{k=1}^d a_{Nk}^2 \end{bmatrix}.$$

Diese Gleichung kann rekursiv aufgelöst werden zu

$$a_{11} = \sqrt{\sigma_{11}}, \quad a_{kk} = \sqrt{\sigma_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki}^2}, \quad a_{k1} = \frac{\sigma_{k1}}{a_{11}}, \quad a_{kj} = \frac{\sigma_{kj} - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ki}a_{ji}}{a_{jj}}, \quad 1 \leq k, j \leq N.$$

Durch eine genügend feine Auflösung des Bereichs D , über dem simuliert werden soll, erhält man damit ein diskretisiertes Zufallsfeld, dessen Werte man abschließend (z.B. für eine Visualisierung) durch numerische Methoden interpolieren kann.

Beispiel: Wir betrachten ein isotropes Gauß-Feld mit der Korrelationsfunktion

$$\rho_\alpha(\mathbf{h}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{h}\|_2^\alpha}{10}\right), \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2 \text{ für } \alpha \in \{1, 2\} \text{ und } \sigma^2 = 1.$$

(Diese führt nach Satz 28 für $\alpha = 1$ zu einem nicht L^2 -differenzierbaren Zufallsfeld!).

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Als Gitterpunkte wählen wir $x_{nm} := \left(\frac{n}{10}, \frac{m}{10}\right)$ mit $n, m \in \{0, \dots, 9\}$, d.h. hier: $N = 100$. Zur Vereinfachung der Rechnung betrachten wir die „Vektorisierungs“-Funktion

$$g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+ : (n, m) \mapsto 10 \cdot n + m$$

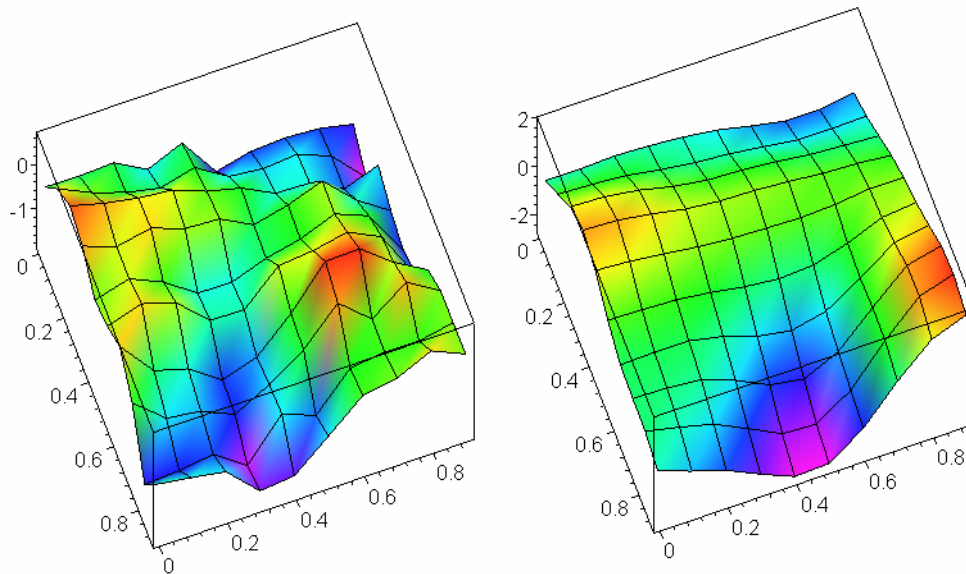
mit der Umkehrung

$$f := g^{-1} : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : k \mapsto \left(\left\lfloor \frac{k}{10} \right\rfloor, k - 10 \cdot \left\lfloor \frac{k}{10} \right\rfloor \right).$$

Der Zufallsvektor \mathbf{Y} ist dann 100-dimensional und besitzt die 100×100 -Kovarianzmatrix Σ mit den Einträgen

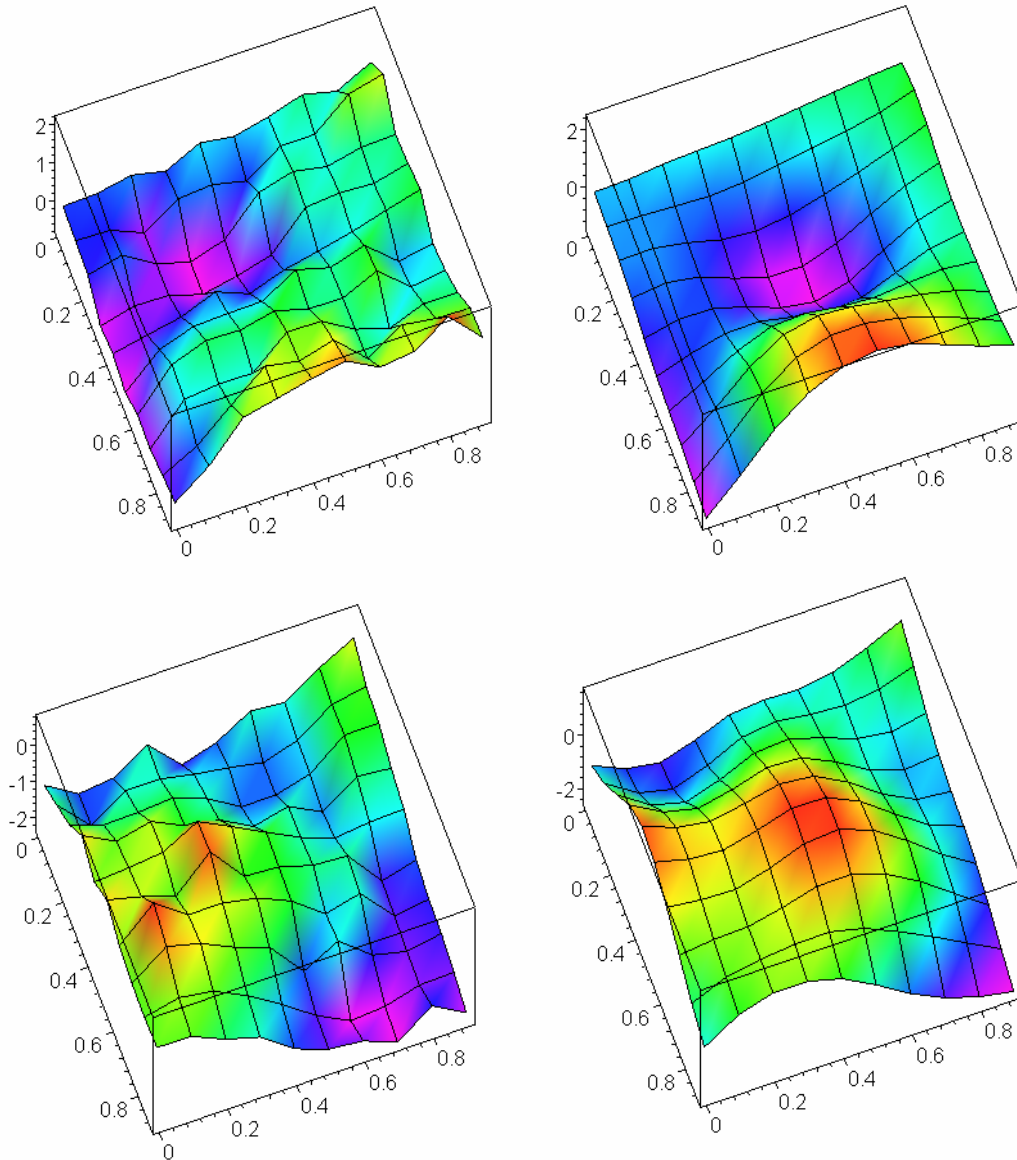
$$\sigma_{ij} = \rho \left(\frac{f(i-1)}{10}, \frac{f(j-1)}{10} \right) \text{ für } i, j \in \{1, \dots, 100\}.$$

Die Berechnung der Cholesky-Zerlegung und die anschließende Simulation / Visualisierung geschieht am einfachsten mit einem Computeralgebra-System. Die folgenden Graphiken zeigen verschiedene Simulationen mit demselben Zufallsgenerator für $\alpha = 1$ (links) und $\alpha = 2$ (rechts). Man erkennt deutlich die unterschiedliche „Rauigkeit“ der Simulationen, bedingt durch die höhere bzw. geringere Glattheit der Korrelationsfunktion.



Simulationen eines Gauß'schen Zufallsfeldes mit $\alpha = 1$ (links) und $\alpha = 2$ (rechts)

III. Zufallsfelder (Geostatistik)



Simulationen eines Gauß'schen Zufallsfeldes mit $\alpha = 1$ (links) und $\alpha = 2$ (rechts), Fortsetzung

Bei der Simulation von Gauß'schen Zufallsfeldern kann es - insbesondere bei regelmäßigen Gitterungen - passieren, dass die Varianz-Kovarianzmatrix Σ singular ist. In diesem Fall existiert zwar noch eine Cholesky-Zerlegung, aber es gibt dann meist Probleme wegen numerischer Instabilitäten. In diesem Fall kann man sich am einfachsten behelfen mit einem Übergang von Σ zu $\Sigma^* = \frac{1}{1+\varepsilon}(\Sigma + \varepsilon I)$ mit der $N \times N$ -Einheitsmatrix I und einem geeignetem $\varepsilon > 0$. Σ^* ist dann ebenfalls eine (zulässige) Varianz-Kovarianzmatrix, die aber nicht-singular ist.

Gauß'sche Zufallsfelder ermöglichen auf einfache Weise auch Konstruktionen von Zufallsfeldern mit *vorgegebenen* (eindimensionalen) Randverteilungen. Bezeichnet F die zugehörige Verteilungsfunktion und Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung, so lässt sich dies über die Transformation

$$Z^*(\mathbf{x}) = F^{-1}(\Phi(Z(\mathbf{x}))) \text{ für } \mathbf{x} \in D$$

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Mit der Pseudo-Inversen F^{-1} bewerkstelligen, denn $\Phi(Z(\mathbf{x}))$ ist für jedes $\mathbf{x} \in D$ $\mathcal{U}[0,1]$ -verteilt. Es handelt sich hierbei praktisch um die Anwendung einer unendlich-dimensionalen Gauß-Copula. Das transformierte Zufallsfeld

$$\mathbf{Z}^* = \{Z^*(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in D\}$$

erfüllt unter geeigneten Integrierbarkeitsbedingungen natürlich auch die kanonische Hypothese.

Ein wichtiger Spezialfall sind die *lognormalen* Zufallsfelder, bei denen F die Verteilungsfunktion einer Lognormalverteilung $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ ist. Hier kann einfach die Transformation

$$Z^*(\mathbf{x}) = \exp(Z(\mathbf{x})) \text{ für } \mathbf{x} \in D$$

gewählt werden. Als Parameter für dieses Feld ergeben sich dann für alle $\mathbf{x} \in D$

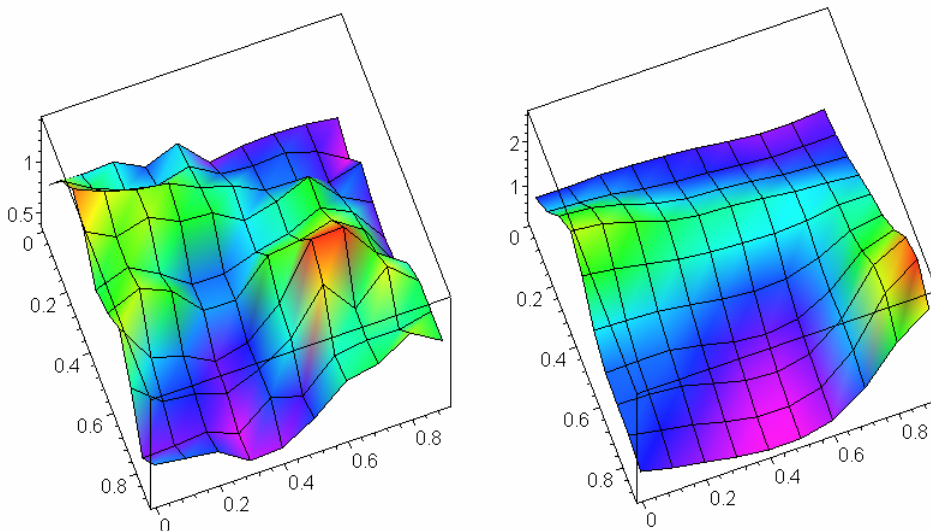
$$\mu^* = E[Z^*(\mathbf{x})] = E[\exp(Z(\mathbf{x}))] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\sigma^{2*} = \text{Var}[Z^*(\mathbf{x})] = \text{Var}[\exp(Z(\mathbf{x}))] = \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (\exp(\sigma^2) - 1) = \mu^{*2} \cdot (\exp(\sigma^2) - 1)$$

und

$$\rho^*(\mathbf{x}) = \text{Kov}(Z^*(\mathbf{x}), Z^*(\mathbf{0})) = E[\exp(Z(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{0}))] - \mu^{*2} = \mu^{*2} \cdot (\exp(\sigma^2 \rho(\mathbf{x})) - 1).$$

Die nachfolgenden Graphiken zeigen zwei Simulationen auf der Basis des ersten Gauß'schen Zufallsfeldes des vorigen Beispiels, mit $Z^*(\mathbf{x}) = \exp\left(\frac{Z(\mathbf{x})}{2}\right)$ für $\mathbf{x} \in [0,1]^2$ (dies entspricht formal der Situation $\mu = 0$ und $\sigma^2 = \frac{1}{2}$).



Simulation eines lognormalen Zufallsfeldes, links: $\alpha = 1$, rechts: $\alpha = 2$

III. 3. Variogramm und Semivariogramm

Für geostatistische Analysen wird statt der Kovarianz- oder Korrelationsfunktion in der Regel das so genannte *Variogramm* oder *Semivariogramm* betrachtet. Unter der kanonischen Hypothese gilt, wie schon oben verwendet:

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] &= \text{Var}[Z(\mathbf{x})] + \text{Var}[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] - 2\text{Kov}[Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] \\ &= 2(C(\mathbf{0}) - C(\mathbf{h})) = 2C(\mathbf{0})[1 - \rho(\mathbf{h})] = 2\sigma^2[1 - \rho(\mathbf{h})] \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$. Allerdings ist es möglich, dass die Unabhängigkeit von $\text{Var}[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})]$ von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ auch unter allgemeineren Bedingungen als der kanonischen Hypothese gegeben ist. Daher bezeichnet man das Vorliegen dieser schwächeren Unabhängigkeitsannahme auch als *intrinsische Hypothese* (vgl. dazu z.B. SCHABENBERGER AND GOTWAY (2005), Abschnitt 2.2 oder ARMSTRONG (1998), Abschnitt 2.4).

Definition 19: Unter der intrinsischen Hypothese heißt die durch

$$\gamma(\mathbf{h}) := \sigma^2[1 - \rho(\mathbf{h})] \text{ für } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$$

definierte Abbildung das (zu dem Zufallsfeld gehörige) *Semivariogramm*. Die Abbildung

$$2\gamma(\mathbf{h}) = \text{Var}[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] \text{ für } \mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$$

heißt *Variogramm*.

In der Literatur werden die Begriffe Variogramm und Semivariogramm manchmal synonym verwendet, vgl. etwa ARMSTRONG (1998), Abschnitt 2.4.

Im Fall der Isotropie hängt das Semivariogramm $\gamma(\mathbf{h})$ nur von der Länge $\|\mathbf{h}\|_2$ ab. Analog zu früheren Bezeichnungen nennen wir dann die Funktion g mit $\gamma(\mathbf{h}) = g(\|\mathbf{h}\|_2)$ für $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ wieder das *radiale Semivariogramm*; es gilt dann unter der intrinsischen Hypothese entsprechend

$$g(h) := \sigma^2[1 - r(h)] \text{ für } h \geq 0.$$

Es hat sich in der Geostatistik folgender Sprachgebrauch für radiale Semivariogramme eingebürgert:

- Der Grenzwert $s := \lim_{h \rightarrow \infty} g(h)$ heißt *Sill* (Schwelle). Unter der kanonischen Hypothese fällt der *Sill* mit der Varianz σ^2 zusammen. Unter der rein intrinsischen Hypothese kann der *Sill* den Wert ∞ annehmen.
- Falls der *Sill* s mit einem endlichen Wert r erreicht wird, d.h. es gilt $g(r) = s$, heißt r *Range* (Reichweite). Für praktische Zwecke wird der (endliche) Wert r , für den die (endliche) Größe $0,95 \times s$ erreicht wird, als *Practical Range* (praktische Reichweite) bezeichnet.

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Für nicht-isotrope (*anisotrope*) Zufallsfelder werden häufig auch *Richtungs-(Semi-)Variogramme* betrachtet, also Funktionen der Art

$$2g_e(h) = \text{Var}[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x} + h \cdot \mathbf{e})] \text{ für } h \geq 0,$$

wobei $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^d$ einen *Richtungsvektor* (d.h. einen Vektor mit $\|\mathbf{e}\|_2 = 1$) bezeichnet. Die Bezeichnungen *Sill* und *Range* werden hier analog verwendet.

Die Reichweite gibt aus praktischer Sicht die maximale Distanz im Zufallsfeld an, innerhalb der essentielle Abhängigkeiten zwischen „Standorten“ bestehen.

In vielen geostatistischen Anwendungen wird darüber hinaus auch noch der so genannte *Nugget-Effekt*² betrachtet. Hierunter versteht man das Phänomen

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \gamma(\mathbf{h}) > 0 \text{ bzw. } \lim_{h \rightarrow 0} g(h) > 0.$$

Ein solcher Effekt kann bei L^2 -stetigen Zufallsfeldern theoretisch nicht auftreten. In der Literatur wird dieser Effekt in der Regel daher entweder mit einem mikro-skaligen Strukturbruch oder mit überlagerter Messungenauigkeit begründet; vgl. ARMSTRONG (1998), Abschnitt 3.4, SCHABENBERGER AND GOTWAY (2005), Abschnitt 2.3 oder CHRISTAKOS (1992), Kapitel 7. Wir werden hier auf diesen Effekt nicht näher eingehen.

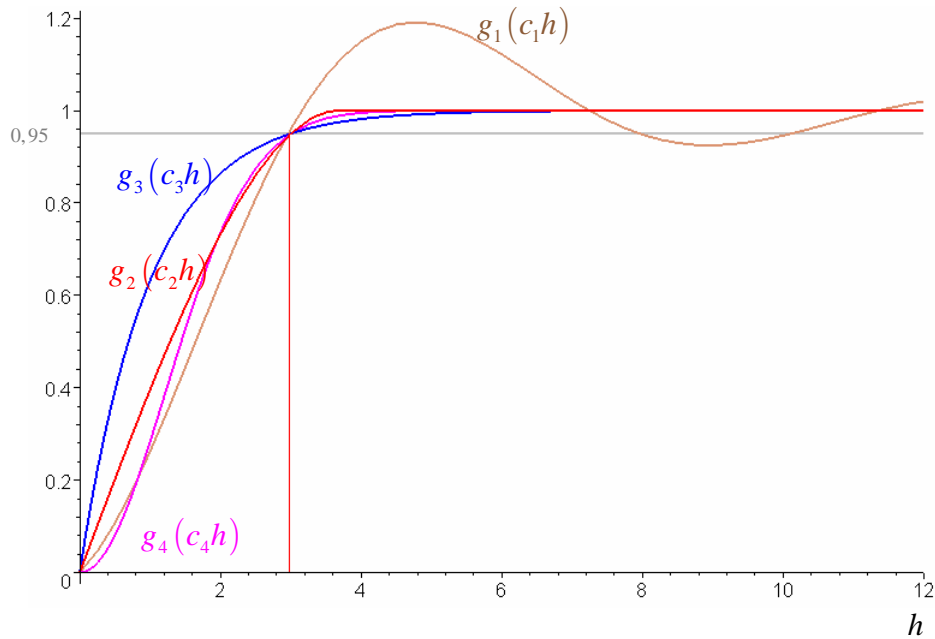
Die nachfolgende Tabelle enthält einige (zulässige) radiale parametrische Semivariogrammfunktionen g der Dimension $d \geq 2$ für kanonische isotrope Zufallsfelder mit Varianz $\sigma^2 = 1$ (hier identisch mit dem *Sill*), die in der Praxis häufig verwendet werden. Der Parameter a ist positiv, der jeweilige Skalenfaktor c so gewählt, das die praktische Reichweite von $g(c \cdot h)$ gerade a beträgt. Hierbei ist J_0 die Bessel-Funktion erster Art der Ordnung 0, vgl. Satz 23.

k	d	Name	Skalenfaktor c_k	$g_k(h)$
1	2	<i>Hole Effect</i>	2,286	$1 - \exp\left(-\frac{h}{a \cdot b}\right) \cdot J_0\left(\frac{h}{a}\right), b > 5$
2	≤ 3	sphärisch	0,811	$\frac{3}{2} \cdot \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^3, h \leq a$
3	≥ 2	exponentiell	2,996	$1 - \exp\left(-\frac{h}{a}\right)$
4	≥ 2	Gauß	1,731	$1 - \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right)$

Die nachfolgenden Graphiken zeigen den Verlauf der skalierten Semivariogrammfunktionen $g_k(c_k \cdot h)$ für $a = 3$ und $b = 5$.

² Dieses Phänomen wurde empirisch zuerst in den Goldminen Südafrikas beobachtet, wo man es auf die körnige Struktur der feinen Goldklumpen (Nuggets) zurückführte.

III. Zufallsfelder (Geostatistik)



Für rein intrinsische (nicht kanonische) isotrope Zufallsfelder bildet auch die folgenden Funktionenklasse zulässige radiale Semivariogrammfunktionen (mit unendlichem *Sill*), für alle Dimensionen $d \in \mathbb{N}$, mit $0 \leq a < 2$ und $b > 0$:

Name	$g(h)$
<i>Power Model</i>	$b \cdot h^a$

Für weitere Klassen zulässiger Semivariogrammfunktionen vgl. ARMSTRONG (1998), Abschnitt 3.12, SCHABENBERGER AND GOTWAY (2005), Abschnitt 4.3, oder GELFAND ET AL. (2010), S. 23 ff.

Für die Krig-Prädiktoren werden geeignete Schätzungen der Semivariogrammfunktion benötigt. Im Fall der Isotropie des Zufallsfeldes wird üblicherweise der Schätzer von Matheron verwendet:

$$\hat{g}(h) = \frac{1}{2 \cdot \#N(h)} \sum_{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \in N(h)} [Z(\mathbf{x}_i) - Z(\mathbf{x}_j)]^2 \text{ für } h > 0,$$

wobei $N(h)$ die Menge aller verfügbaren Punktpaare $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \in \mathbb{R}^d$ bezeichnet mit $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j = \mathbf{h}$ für $\|\mathbf{h}\|_2 = h$. Dieser Schätzer ist erwartungstreu wegen

$$\begin{aligned} E[\hat{g}(h)] &= \frac{1}{2 \cdot \#N(h)} \sum_{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \in N(h)} E\left([Z(\mathbf{x}_i) - Z(\mathbf{x}_j)]^2\right) = \frac{1}{2 \cdot \#N(h)} \sum_{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \in N(h)} \text{Var}(Z(\mathbf{x}_i) - Z(\mathbf{x}_j)) \\ &= \frac{1}{2} \text{Var}(Z(\mathbf{0}) - Z(\mathbf{h})) = g(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

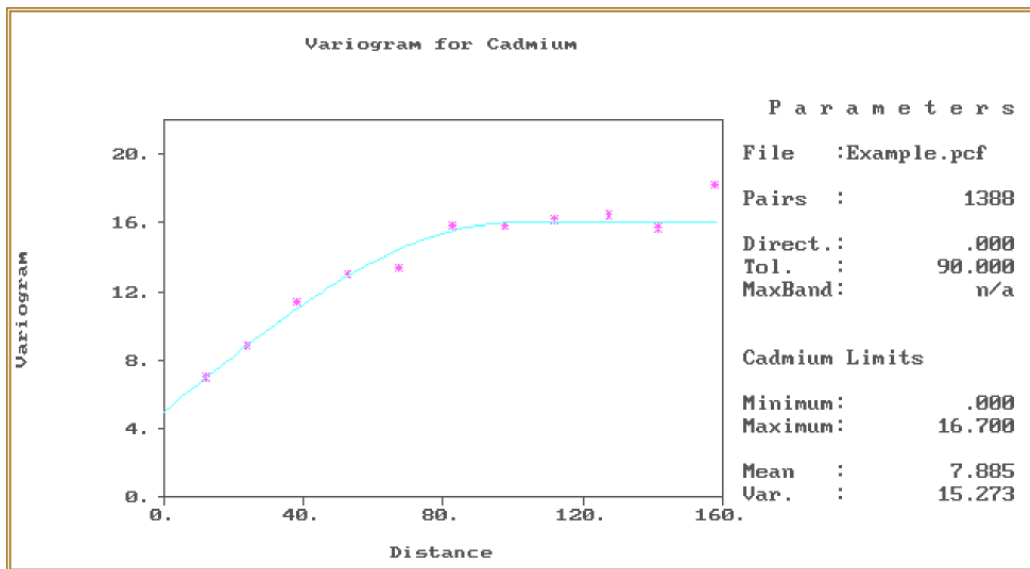
für alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$. In der Praxis werden mangels genügend vieler Daten in der Menge $N(h)$ meist alle Paare $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \in \mathbb{R}^d$ zusammengefasst, die sich „näherungsweise“ um den Vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ unterscheiden. Damit erhält man für sinnvolle verfügbare Abstände (*lags*) $\|\mathbf{h}\|_2 = h$ eine so genannte

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

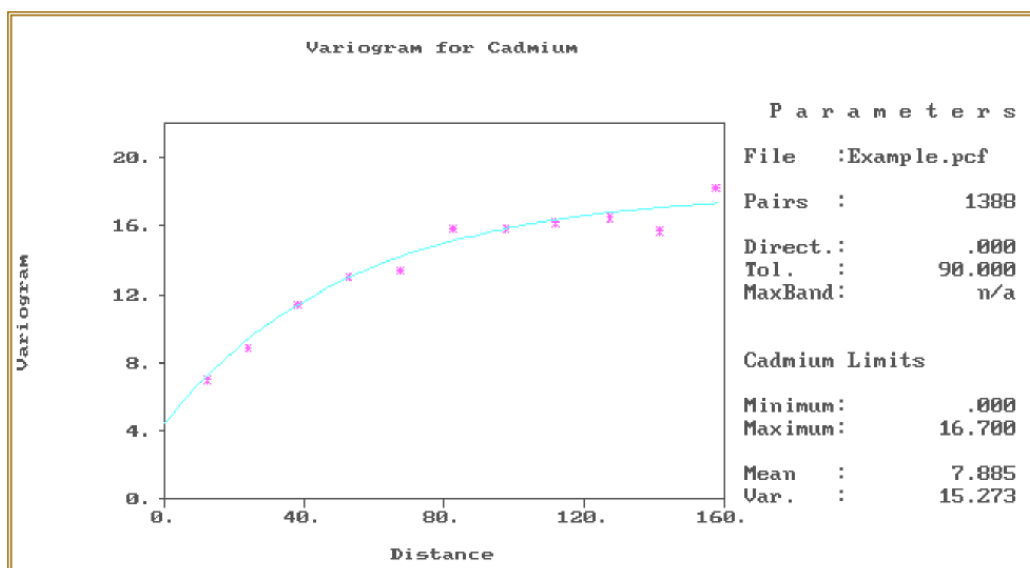
„Semivariogramm-Wolke“, aus der z.B. mittels eines Regressionsverfahrens eine zulässige Semivariogrammfunktion geschätzt wird. Für Einzelheiten vgl. ARMSTRONG (1998), Kapitel 4, SCHABENBERGER AND GOTWAY (2005), Abschnitt 4.4. oder E. ENGLUND AND A. SPARKS (1991).

Zur Schätzung von anisotropen Semivariogrammfunktionen vgl. GELFAND ET AL. (2010), Chapter 3, SCHABENBERGER AND GOTWAY (2005), Abschnitt 4.3.7 oder oder E. ENGLUND AND A. SPARKS (1991).

Die folgenden beiden Graphiken zeigen eine Semivariogramm-Wolke aus dem GEO-EAS-Programm für die räumliche Verteilung von Cadmium (siehe E. ENGLUND AND A. SPARKS (1991), S. 37ff). Hierbei wurde jeweils ein Nugget-Effekt berücksichtigt, die Anpassung erfolgte an zwei verschiedene Semivariogrammfunktionen.



Nugget = 5, Anpassung an sphärisches Modell, $Sill = 16$, $Range = 80$



Nugget = 4,5, Anpassung an exponentielles Modell, $Sill = 18$, $Range = 160$

III. 4. Krige-Prädiktoren

Eine wesentliche Aufgabe der praktischen Geostatistik besteht darin, auf der Basis von (endlich vielen) Beobachtungen eines Zufallsfelds eine räumlich Vorhersage für Bereiche zu machen, in denen keine Beobachtungen vorliegen. Üblicherweise wird dann mit numerischen Methoden auf der Grundlage der insgesamt vorhandenen „Daten“ eine Kartierung vorgenommen.

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit den statistischen Aspekten dieser Vorhersagen eingehender befassen. Wir beschränken uns zur Vereinfachung dabei auf den *isotropen Fall* unter der *kanonischen Hypothese* mit $\mu \neq 0$.

Aus technischen Gründen nehmen wir ferner an, dass die Abbildung

$$(\Omega \times \mathbb{R}^d, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^d) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1): (\omega, \mathbf{x}) \mapsto Z(\omega, \mathbf{x})$$

geeignete Mess- und Integrierbarkeitseigenschaften (bzgl. des Lebesgue-Maßes) besitzt. Als Vorhersage-Zielgröße wird häufig ein (zufälliger) *räumlicher Mittelwert*

$$\mathbf{Z}_V = \frac{1}{m^d(V)} \int_V Z((\mathbf{y})) m^d(d\mathbf{y})$$

für eine (in der Regel beschränkte) Borel-Menge $V \in \mathcal{B}^d$ betrachtet. Für den (Grenz-)Fall $V = \{\mathbf{x}_0\}$ mit festem $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ wird einfacher

$$\mathbf{Z}_{\{\mathbf{x}_0\}} = Z(\mathbf{x}_0)$$

gesetzt. Typischerweise liegt der Bereich V außerhalb der Standorte \mathbf{x} , an denen Daten erhoben werden (können). Bei Vorliegen geeigneter Integrierbarkeitseigenschaften verwenden wir abkürzend folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \bar{c}_V &:= \text{Var}(\mathbf{Z}_V) = E\left[(\mathbf{Z}_V - \mu)^2\right] = \frac{1}{m^d(V)^2} E\left[\int_V Z((\mathbf{y}) - \mu) m^d(d\mathbf{y}) \cdot \int_V Z((\mathbf{z}) - \mu) m^d(d\mathbf{z})\right] \\ &= \frac{1}{m^d(V)^2} E\left[\iint_{V \times V} Z((\mathbf{y}) - \mu) \cdot Z((\mathbf{z}) - \mu) m^d(d\mathbf{y}) m^d(d\mathbf{z})\right] \\ &= \frac{1}{m^d(V)^2} \iint_{V \times V} E[Z((\mathbf{y}) - \mu) \cdot Z((\mathbf{z}) - \mu)] m^d(d\mathbf{y}) m^d(d\mathbf{z}) \\ &= \frac{1}{m^d(V)^2} \iint_{V \times V} \text{Kov}[Z((\mathbf{y})), Z((\mathbf{z}))] m^d(d\mathbf{y}) m^d(d\mathbf{z}) = \frac{\sigma^2}{m^d(V)^2} \iint_{V \times V} \rho(\mathbf{y} - \mathbf{z}) m^d(d\mathbf{y}) m^d(d\mathbf{z}) \\ &= \frac{\sigma^2}{m^d(V)^2} \iint_{V \times V} r(\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2) m^d(d\mathbf{y}) m^d(d\mathbf{z}) \end{aligned}$$

und

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

$$\begin{aligned}\bar{c}_V(\mathbf{x}) &:= \text{Kov}[Z(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{Z}_V] = \frac{1}{\mathfrak{m}^d(V)} E \left[\int_V (Z(\mathbf{x}) - \mu)(Z(\mathbf{y}) - \mu) \mathfrak{m}^d(d\mathbf{y}) \right] \\ &= \frac{1}{\mathfrak{m}^d(V)} \iint_{V \times V} \text{Kov}[Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{y})] \mathfrak{m}^d(d\mathbf{y}) = \frac{\sigma^2}{\mathfrak{m}^d(V)} \int_V r(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2) \mathfrak{m}^d(d\mathbf{y})\end{aligned}$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Im Fall von $V = \{\mathbf{x}_0\}$ mit festem $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ vereinfachen sich diese Ausdrücke zu

$$\bar{c}_V = \text{Var}[Z(\mathbf{x}_0)] = \sigma^2$$

und

$$\bar{c}_V(\mathbf{x}) = \sigma^2 r(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2) \text{ für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Definition 20: Ein Prädiktor $\hat{\mathbf{Z}}_V = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{x}_i)$ für \mathbf{Z}_V mit $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ heißt BLUP (**B**est **L**inear **U**nbiased **P**redictor), wenn er folgende Eigenschaften erfüllt:

$$E[\hat{\mathbf{Z}}_V] = E[\mathbf{Z}_V] = \frac{1}{\mathfrak{m}^d(V)} \int_V E[Z(\mathbf{y})] \mathfrak{m}^d(d\mathbf{y}) = \frac{1}{\mathfrak{m}^d(V)} \int_V \mu \mathfrak{m}^d(d\mathbf{y}) = \mu$$

(Erwartungstreue; Unbiasedness) und

$$\text{Var}[\hat{\mathbf{Z}}_V - \mathbf{Z}_V] = \min! \text{ unter allen linearen Prädiktoren (**B**est)}$$

Lemma 31: Ein Prädiktor $\hat{\mathbf{Z}}_V = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{x}_i)$ für \mathbf{Z}_V mit $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann erwartungstreu, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Beweis: Es gilt

$$\mu = E[\mathbf{Z}_V] = E[\hat{\mathbf{Z}}_V] = E \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{x}_i) \right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i E[Z(\mathbf{x}_i)] = \mu \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

genau dann, wenn $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. ■

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Satz 27: Ein Prädiktor $\hat{\mathbf{Z}}_V = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{x}_i)$ für \mathbf{Z}_V mit $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann BLUP, wenn die $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$G(\boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{\lambda}^T M_1 \boldsymbol{\lambda} - 2M_2 \boldsymbol{\lambda} \text{ unter der Nebenbedingung } M_3 \boldsymbol{\lambda} = 1$$

minimieren, wobei $\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und

$$M_1 = \left[c \left(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2 \right) \right]_{i,j=1,\dots,n}, \quad M_2 = [\bar{c}_V(\mathbf{x}_1), \dots, \bar{c}_V(\mathbf{x}_n)] \text{ und } M_3 = [1, \dots, 1] \text{ (mit } n \text{ Komponenten) gilt.}$$

Beweis: Es gilt

$$\text{Var}[\hat{\mathbf{Z}}_V] = \text{Var} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{x}_i) \right] = \boldsymbol{\lambda}^T M_1 \boldsymbol{\lambda}$$

und somit

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\mathbf{Z}}_V - \mathbf{Z}_V] &= \text{Var}[\hat{\mathbf{Z}}_V] + \text{Var}[\mathbf{Z}_V] - 2\text{Kov}[\hat{\mathbf{Z}}_V, \mathbf{Z}_V] \\ &= \boldsymbol{\lambda}^T M_1 \boldsymbol{\lambda} + \bar{c}_V - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{c}_V(\mathbf{x}_i) = \bar{c}_V + \boldsymbol{\lambda}^T M_1 \boldsymbol{\lambda} - 2M_2 \boldsymbol{\lambda}, \end{aligned}$$

woraus mit Lemma 31 die Behauptung folgt. ■

Satz 28: Ein Prädiktor $\hat{\mathbf{Z}}_V = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{x}_i)$ für \mathbf{Z}_V mit $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann BLUP, wenn $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ Lösung des Krige-Systems

$$\mathbf{K} \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}} = \bar{\mathbf{c}}$$

ist mit $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} M_1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = (\boldsymbol{\lambda}, \nu)^T$ und $\bar{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} M_2^T \\ 1 \end{bmatrix}$, wobei $\mathbf{1}^T = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Es handelt sich hier um ein quadratisches Minimierungsproblem mit einer linearen Nebenbedingung. Dazu betrachten wir die Lagrange-Funktion

$$L(\bar{\boldsymbol{\lambda}}) = L(\boldsymbol{\lambda}, \nu) = G(\boldsymbol{\lambda}) - 2\nu(\mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} - 1) = \boldsymbol{\lambda}^T M_1 \boldsymbol{\lambda} - 2M_2 \boldsymbol{\lambda} + 2\nu(\mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} - 1) \text{ für } \bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Wegen

$$\nabla L(\bar{\boldsymbol{\lambda}}) = 2 \cdot \begin{bmatrix} M_1 \boldsymbol{\lambda} + \nu \cdot \mathbf{1} - M_2^T \\ \mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} - 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (\mathbf{K} \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}} - \bar{\mathbf{c}})$$

und der notwendigen Bedingung für ein (relatives) Minimum $\nabla L(\bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathbf{0}$ folgt, dass $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{K} \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}} = \bar{\mathbf{c}}$$

sein muss.

III. Zufallsfelder (Geostatistik)

Da die Funktion $\lambda^tr M_1 \lambda$ nach Voraussetzung positiv-semidefinit in λ ist, liegt bei (jeder) Lösung ein (relatives und zugleich absolutes) Minimum der Funktion G unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ vor. Im Fall der positiven Definitheit von M_1 ist die (dann eindeutig bestimmte) Lösung gegeben durch $\bar{\lambda} = \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{c}}$. ■

Bemerkung: Auf Grund der Beziehung

$$g(h) := \sigma^2 - c(h) \text{ für } h \geq 0$$

kann das Krige-System in Satz 28 auch mittels der radialen Semivariogramm-Funktion g dargestellt werden; es lautet dann

$$\mathbf{K}^* \cdot \bar{\lambda} = \bar{\mathbf{c}}^*$$

mit $\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} M_1^* & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^{tr} & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{\lambda} = (\lambda, \nu)^{tr}$ und $\bar{\mathbf{c}}^* = \begin{bmatrix} M_2^{*tr} \\ 1 \end{bmatrix}$, wobei

$$M_1^* = \left[g(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2) \right]_{i,j=1,\dots,n}, \quad M_2^* = [\bar{g}_V(\mathbf{x}_1), \dots, \bar{g}_V(\mathbf{x}_n)] \text{ und } \bar{g}_V(\mathbf{x}) = \frac{1}{m^d(V)} \int_V g(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2) m^d(d\mathbf{y})$$

für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ist.

In den üblichen praktischen Anwendungen wird die radialen Semivariogramm-Funktion g durch Methoden, wie sie im vorigen Abschnitt beschrieben wurden, geschätzt.

Sofern das betrachtete Zufallsfeld nicht sofort die kanonische Hypothese erfüllt, wird meist vorab eine *Trendbereinigung* mittels einer linearen Regression (in mehreren Variablen) durchgeführt und dann die beschriebene Prädiktoren-Methode für das (als kanonisch angenommene) Residualfeld durchgeführt.

Für weitere praktische Aspekte von Kriging-Prädiktoren und Krige-Schätzern vgl. etwa ARMSTRONG (1998), Kapitel 7 und 8.

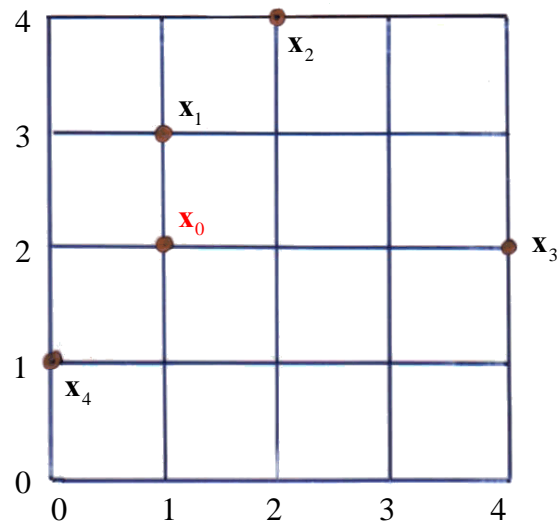
Man beachte, dass der Krige-Prädiktor eine *exakte Interpolation* der Werte des Zufallsfelds liefert, anders als viele numerische Verfahren, die lediglich eine *Glättung* der Daten vornehmen.

Beispiel: Wir betrachten einen Ausschnitt aus einem Zufallsfeld, für das an vier Standorten $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4 \in \mathbb{R}^2$ Daten erhoben wurden (vgl. die Graphik auf der folgenden Seite):

\mathbf{x}_i	(1,3)	(2,4)	(4,2)	(0,1)
$Z(\mathbf{x}_i)$	1,4	1,7	0,8	0,9

Als Semivariogrammfunktion wird ein exponentielles Modell $g(h) = 1 - \exp\left(-\frac{h}{a}\right)$ mit $a = 1$ zu Grunde gelegt (d.h. mit Sill $s = \sigma^2 = 1$). Ferner sei $V = \{\mathbf{x}_0\}$ mit $\mathbf{x}_0 = (1,2)$.

III. Zufallsfelder (Geostatistik)



Wir erhalten damit

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0,7568 & 0,9576 & 0,8931 & 1 \\ 0,7568 & 0 & 0,9408 & 0,9728 & 1 \\ 0,9576 & 0,9408 & 0 & 0,9838 & 1 \\ 0,8931 & 0,9728 & 0,9838 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{c}}^* = \begin{bmatrix} 0,6321 \\ 0,8230 \\ 0,9502 \\ 0,7568 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit der Lösung} \quad \bar{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} 0,3968 \\ 0,1736 \\ 0,1267 \\ 0,3028 \\ 0,1088 \end{bmatrix}.$$

Als Kriging-Prädiktor ergibt sich daraus

$$\hat{\mathbf{Z}}_v = \sum_{i=1}^4 \lambda_i Z(\mathbf{x}_i) = 1,2246.$$

Erwartungsgemäß sind hier die Gewichte λ_1 und λ_4 am größten, da die Punkte \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_4 den kürzesten Abstand zum Punkt \mathbf{x}_0 besitzen.

Verzeichnis der Definitionen, Sätze und Lemmata

Definition	Satz	Lemma	Seite
		1	3
		2	4
1			5
		3	6
		4	6
		5	6
	1		7
2			7
3			7
4			8
	2		8
	3		9
	4		11
	5		13
	6		14
	7		15
	8		15
5			16
	9		16
	10		21
	11		37
		6	46
		7	47
		8	49
	12		49
6			50
		9	50
	13		51
		10	51
		11	52
		12	52
		13	53
		14	53
7			54
		15	54
	14		54
		16	55
	15		55
	16		57
		17	57

Definition	Satz	Lemma	Seite
8			59
		18	59
9			59
		19	60
10			64
		20	64
	17		65
		21	71
	18		72
	19		72
11			74
		22	74
		23	75
	20		75
	21		76
12			79
13			80
		24	81
		25	81
		26	81
14			82
		27	82
15			82
16			84
		28	84
	22		85
		29	86
	23		88
		30	90
17			91
	24		92
	25		93
18			93
	26		94
19			99
20			104
		31	104
	27		104
	28		105

Danksagung

Herr Dipl.-Math. Martin Hampel hat das Skript sehr gründlich durchgesehen und zahlreiche Verbesserungsvorschläge gemacht. Dafür sei ihm an dieser Stelle herzlich gedankt.

Literatur

- [1] P. ABRAHAMSEN (1997): *A Review of Gaussian Random Fields and Correlation Functions*. 2nd ed., Norwegian Computing Center, Oslo.
- [2] M. ARMSTRONG (1998): *Basic Linear Geostatistics*. Springer, Berlin.
- [3] G. CHRISTAKOS (1992): *Random Field Models in Earth Sciences*. Dover Publications, Mineola, N.Y.
- [4] P.J. DIGGLE AND P.J. RIBEIRO JR. (2005): *Model-based Geostatistics*. Springer, N.Y.
- [5] S. DITTMANN (1999): *The Wadden Sea Ecosystem. Stability Properties and Mechanisms*. Springer, Berlin.
- [6] E. ENGLUND AND A. SPARKS (1991): *GEO-EAS 1.2.1. Geostatistical Environmental Assessment Software*. US Environmental Protection Agency, Las Vegas.
- [7] A.E. GELFAND, P.J. DIGGLE, E. FUENTES AND P. GUTTORP (2010): *Handbook of Spatial Statistics*. Chapman & Hall, Boca Raton.
- [8] J. HURT, P. LACHOUT AND D. PFEIFER (2001): On an estimation problem for type I censored spatial Poisson processes. *Kybernetika* 37 (2001), 103 - 108.
- [9] J. ILLIAN, A. PENTTINEN, D. STOYAN AND H. STOYAN (2008): *Statistical Analysis and Modelling of Spatial Point Patterns*. Wiley, N.Y.
- [10] O. KALLENBERG (1983). *Random Measures*. Akademie-Verlag, Berlin.
- [11] P.K. KITANIDIS (1997): *Introduction to Geostatistics. Applications in Hydrogeology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [12] A. KLENKE (2008): *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, Berlin.
- [13] G. MATHERON (1975): *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley, N.Y.
- [14] I. MOLCHANOV (1997): *Statistics for the Boolean Model for Practitioners and Mathematicians*. Wiley, N.Y.
- [15] I. MOLCHANOV (1997): *Theory of Random Sets*. Springer, N.Y.
- [16] D. PFEIFER, H.-P. BÄUMER, H. ORTLEB, U. SCHLEIER AND G. SACH (1996): Modeling spatial distributional patterns of benthic meiofauna species by Thomas and related processes. *Ecological Modelling* 87, 285 - 294.
- [17] D. PFEIFER, H.-P. BÄUMER AND U. SCHLEIER (1996): The "Minimal Area" problem in ecology: a spatial Poisson process approach. *Computational Statistics* 11 (1996), 415 - 428.
- [18] N. REMY, A. BOUCHER AND J. WU (2009): *Applied Geostatistics with SGeMS*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [19] H. RUE AND L. HELD (2005): *Gaussian Markov Random Fields. Theory and Applications*. Chapman & Hall, Boca Raton.
- [20] O. SCHABENBERGER AND C.A. GOTWAY (2005): *Statistical Methods for Spatial Data Analysis*. Chapman & Hall, Boca Raton.
- [21] R. SCHNEIDER UND W. WEIL (2000): *Stochastische Geometrie*. Teubner, Stuttgart.
- [22] D. STOYAN, W.S. KENDALL AND J. MECKE (1987): *Stochastic Geometry and Its Applications*. Wiley, N.Y.
- [23] D. STOYAN AND H. STOYAN (1992): *Fraktale - Formen - Punktfelder*. Methoden der Geometrie-Statistik. Akademie-Verlag, Berlin.
- [24] K. WIRTZ UND V. NIESEL (1999): Modelle in der Ökosystemforschung: Methoden, Bewertung und Empfehlungen. Eine Synthese aus der Ökosystemforschung Wattenmeer. ICBM, Universität Oldenburg.