ZVersWiss (2012) 101:581–595
DOI 10.1007/s12297-012-0212-4

ABHANDLUNG

Ein Reservierungsverfahren für die Rechtsschutzversicherung nach Art der Lebensversicherung

Dietmar Pfeifer · Soeren Henniges · Doreen Straßburger · Alice Winkel

Online publiziert: 28. August 2012

Zusammenfassung In der vorliegenden Arbeit wird eine dem spezifischen Geschäftsmodell der Rechtsschutzversicherung angepasste Verfahrensweise zur Berechnung von Reserven für bekannte gemeldete und unbekannte, nachgemeldete Schadenfälle vorgestellt. Ein wesentliches Merkmal ist hierbei die Trennung von Fallzahlen und durchschnittlichen Fallkosten, die eine genauere Modellierung des Abwicklungsverhaltens ermöglichen und die spezifischen Besonderheiten der Rechtsschutzversicherung besser abbilden. Im Unterschied zu anderen Reservierungsverfahren für Fallzahlen und Regulierungskosten, die in der Praxis häufig ohne Überprüfung der Voraussetzungen zur Anwendbarkeit verwendet werden, wird hier ein der Lebensversicherung nachgebildetes Modell gewählt, bei dem die Zeit bis zur Schließung eines Falls durch eine „Lebensdauerverteilung" modelliert wird. Die Trennung in die genannten Modellkomponenten erlaubt auch eine einfache, den gesetzlichen Forderungen nachkommende Berücksichtigung von Teuerungseffekten. Schließlich lässt sich das vorgestellte Verfahren auch in einfacher, aber angemessener Weise auf die Bestimmung der Nachmeldereserve übertragen.

Abstract In this paper we introduce a new approach to the calculation of claims reserves (known and IBNR cases) which is particularly adapted to the business model

D. Pfeifer (✉)
Institut für Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 26111 Oldenburg, Deutschland
e-mail: dietmar.pfeifer@uni-oldenburg.de

S. Henniges · A. Winkel
Deutsche Rechtsschutz-Versicherung AG, Abraham-Lincoln-Str. 3, 65189 Wiesbaden, Deutschland

S. Henniges
e-mail: Soeren.Henniges@deurag.de

D. Straßburger
Actuarial Solutions GmbH, Hopfenstr. 21, 20359 Hamburg, Deutschland
e-mail: d.strassburger@actuarialsolutions.de

of legal expense insurance. An essential aspect here is the split into two model components: case numbers and average claim costs. In contrast to other reserving methods for case numbers and claims cash flows which are frequently used in practice without checking the validity for application we introduce a model in which the time until case settlement is described by a lifetime distribution according to the principles of life insurance. The split of model components also allows for a simple implementation of cost inflation effects which is required by German law. Finally, the approach proposed here can readily be transferred to the calculation of IBNR reserves.

1 Einleitung

1.1 Rechtliche Rahmenbedingungen

Zum Bilanzstichtag bestehen für ein Versicherungsunternehmen Verpflichtungen aus Schadenfällen, die rechtlich entstanden oder wirtschaftlich verursacht sind. Für die aus diesen Verpflichtungen resultierenden ungewissen Verbindlichkeiten wird eine Schadenrückstellung gebildet. Die Schadenrückstellung setzt sich aus folgenden wesentlichen Teilrückstellungen zusammen:

- Schadenrückstellungen für eingetretene und dem Versicherungsunternehmen am Bilanzstichtag bekannte, aber noch nicht abgewickelte Schadenfälle (bekannte Schäden),
- Schadenrückstellungen für bereits eingetretene, aber noch nicht gemeldete Schadenfälle,
- Schadenrückstellungen für Schadenregulierungskosten.

Die dem Versicherungsunternehmen bekannten Schadenfälle sind grundsätzlich einzeln zu bewerten (Einzelbewertungsgrundsatz). Die Höhe der Schadenrückstellung muss nach vernünftiger kaufmännischer Beurteilung bemessen werden. Dabei ist insbesondere das bilanzrechtliche Vorsichtsprinzip zu berücksichtigen, um die dauerhafte Erfüllbarkeit der Verpflichtungen sicherzustellen.

Die Höhe der Schadenrückstellung sollte daher so angelegt sein, dass mit hinreichender Sicherheit für jeden einzelnen Versicherungsfall die späteren Auszahlungen die Schadenrückstellung nicht überschreiten. Die Schadenrückstellungen sind in Höhe der endgültig zu erwartenden Verpflichtungen zu bilden. Erwartete Rückflüsse an das Versicherungsunternehmen (Beispiel Forderungen aus Regressen) müssen von den Schadenrückstellungen abgesetzt werden, §26 RechVersV. Diese Vorschrift ist eine Ausnahme des ansonsten geltenden Saldierungsverbotes.

In bestimmten Fällen ist das Abweichen vom Einzelbewertungsgrundsatz erlaubt. Eine Gruppen – oder Pauschalbewertung bekannter Schäden ist zulässig, wenn in einer Sparte gleichartige Risiken vorliegen, deren individuelle Bemessung schwierig oder wirtschaftlich unzumutbar ist, wenn sich Schäden zwar insgesamt, aber noch nicht im Einzelnen hinreichend konkretisiert haben oder sich ein Wert im Einzelfall nicht ermitteln lässt. Dies gilt insbesondere auch für die Rechtsschutzversicherung.

Spätestens am Ende des dritten auf das Zeichnungsjahr folgenden Geschäftsjahres muss auf eine Einzelbewertung übergegangen werden.

In der vorliegenden Arbeit werden wir hauptsächlich die Bestimmung der Pauschalreserven für bekannte und nachgemeldete Schäden behandeln und nur kurz auf die Möglichkeit einer daraus abgeleiteten Einzelfallreserve eingehen.

1.2 Determinanten des Rechtsschutzschadens

Die Höhe der Rechtsanwaltsgebühren ist gesetzlich geregelt und im Gesetz klar und eindeutig strukturiert. Gleiches gilt für die Gerichtskosten- und sonstigen Gebührenrechnungen. Soweit Kosten Dritter auszugleichen sind, basieren diese ebenfalls auf den genannten Grundlagen und sind in einem gerichtlichen Verfahren ermittelt.

Der zu ersetzende Schaden in der Rechtsschutzversicherung wird im Wesentlichen durch die der Rechtsanwaltsgebührenberechnung zugrunde liegenden Parameter bestimmt. Dies sind (bei den streitwertabhängigen Gebühren) der Streitwert, der Instanzenzug und das Verhältnis von Obsiegen und Unterliegen bei Abschluss des Schadens. Die letztgenannten Parameter sind im Gegensatz zum Streitwert zwar nicht eindeutig bestimmbar, spiegeln sich jedoch sowohl in dem Anteil der ohne Kosten geschlossenen Schäden wieder, als auch in den Durchschnittskosten je Schaden.

Ergänzend ist festzuhalten, dass die versicherten Risiken klar definierten Leistungsarten zugeordnet sind und darüber auch eine Zuordnung zu den Abrechnungsvarianten des RVG möglich ist.

Wegen dieser der Rechtsschutzversicherung zu Grunde liegenden Determinanten ist eine wie sonst übliche Anwendung bekannter Reservierungsverfahren auf die historisch bekannten Schadenzahlungsströme nicht geboten. Deshalb werden in dem hier verfolgten mathematischen Ansatz die Fallzahlen und die durchschnittlichen Fallkosten zunächst getrennt modelliert und erst nach Vervollständigung der Datendreiecke oder Datentrapeze wieder zusammengeführt. Da für jedes Meldejahr die Anzahl der insgesamt zu bearbeitenden Fälle feststeht und überwiegend nur bei Schließung eines Falls eine Zahlung anfällt,[1] bietet es sich an, die Schließung eines Schadenfalls über eine „Lebensdauerverteilung" wie in der Lebensversicherung zu modellieren. Bei der Schließung selbst ist die binäre Option „mit Zahlung" oder „ohne Zahlung" zu berücksichtigen. Hierfür können auf der Basis historischer Daten bedingte Eintrittswahrscheinlichkeiten geschätzt werden.

Die durchschnittlichen Fallkosten lassen sich ebenfalls leicht mit den üblichen statistischen Ansätzen aus historischen Daten ermitteln. Die Trennung von Fallzahlen und Durchschnittskosten ermöglicht darüber hinaus auch eine methodisch einfache Berücksichtigung von Teuerungszuschlägen, wie sie gesetzlich verlangt wird.

Schließlich lässt sich mit dem hier vorgestellten Ansatz auch die Nachmelderreserve einfach ermitteln. Boetius (1996, S. 301) führt hierzu aus:

„Nachgemeldete Schäden sind Schäden, die im Zeitpunkt der Bilanzaufstellung bereits eingetreten, dem VU aber noch nicht gemeldet und ihm daher nicht bekannt sind [...]. Die hierfür zu bildende *Nachmelderückstellung* wird in der Bilanz unter der Position ‚Rückstellung für noch nicht abgewickelte Versicherungsfälle' ausgewiesen [...] und terminologisch unzutreffend als Teil der Spätschadenrückstellung behandelt [...].

Die Tatsache, dass der Gläubiger (VN, Geschädigter) noch keine Ansprüche gegen den Schuldner (VU) geltend gemacht hat, schließt die Bildung von Rückstellungen nicht aus, wenn nach den Erfahrungen der Vergangenheit solche Inanspruchnahmen wahrscheinlich sind. Wenn dem VU zwar nicht der einzelne Schaden, wohl

[1] Zahlungen erfolgen zwar auch während der Lebensdauer. Der endgültige und überwiegende Zahlungsaufwand erfolgt jedoch mit Schließung der Akte.

aber die durch Erfahrung begründete Tatsache bekannt ist, dass und in welcher Höhe solche Schäden das Bilanzjahr aufwandmäßig belasten, muss es dem rückstellungsmäßig Rechnung tragen. Eine *Einzel*bilanzierung solcher Schäden ist nicht möglich, weil dies die Beurteilung und damit Kenntnis des einzelnen Versicherungsfalls voraussetzt. Daher ist eine *Gesamt*bewertung vorzunehmen, soweit nach versicherungstechnischen Berechnungen und Erfahrungen abgrenzbare Versicherungsbestände mit nachgemeldeten Schäden wahrscheinlich belastet werden. Grundlage der vorzunehmenden Schätzung ist die aus den Erfahrungen der Vergangenheit abzuleitende Wahrscheinlichkeit, in welcher durchschnittlichen Höhe insgesamt zu dem betreffenden Versicherungsbestand nachgemeldete Schäden anfallen.“

Der in dieser Arbeit vorgestellte Ansatz trägt diesen Anforderungen in besonderem Maße Rechnung.

2 Die Situation bereits bekannter Schadenfälle

2.1 Das mathematische Modell

Wir bezeichnen die in ganzen Jahren erfasste, gestutzte Lebensdauer eines entstandenen Schadenfalls von der Meldung bis zur Schließung mit K_0. Für die restliche Lebensdauer eines bereits x Jahre alten Schadenfalls verwenden wir das Symbol K_x, mit $x = 0, 1, 2, \ldots$ sowie die aus der Lebensversicherungsmathematik bekannten Notationen für Überlebens- bzw. Sterbewahrscheinlichkeiten

$$ {}_{k+1}p_x = P(K_x > k) \quad \text{mit } {}_1p_x = p_x = P(K_x > 0),\ x, k \geq 0 \tag{1} $$

und

$$ q_x = 1 - p_x, \quad x \geq 0. \tag{2} $$

Die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit q_x gibt also die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein x Jahre alter Schadenfall im laufenden Jahr geschlossen wird. Bekanntlich reichen die q_k mit $k = 0, 1, 2, \ldots$ aus, um die Verteilung von K_x vollständig zu bestimmen, nämlich über die Formeln

$$ \pi_n = P(K_x = n) = {}_np_x q_{x+n}, \quad x, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3} $$

und

$$ {}_np_x = \prod_{j=0}^{n-1} p_{x+j} = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_{x+j}), \quad x, n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{mit } {}_0p_x = 1,\ {}_0q_x = 0 \tag{4} $$

(zur Terminologie und Symbolik vgl. Gerber 1986 oder Ortmann 2009). Zur Beschreibung der Fälle, die bei Schließung mit einer Zahlung enden, führen wir noch die Indikatorvariable I ein mit den beiden Zuständen 0 (keine Zahlung) und 1 (Zahlung). Erfahrungsgemäß ist die Verteilung von I nur abhängig von der Gesamtlebensdauer K_0 des Schadenfalls; wir führen daher noch die Bezeichnung

$$ z_n = P(I = 1 | K_0 = n) \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5} $$

ein. Für einen bereits x-jährigen Schadenfall ergibt sich analog

$$P(I=1|K_x=n)=P(I=1|K_0=x+n)=z_{x+n}\quad \text{für } x,n=0,1,2,\ldots \tag{6}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein gemeldeter Schadenfall nach n Jahren mit einer Zahlung geschlossen wird, ergibt sich damit zu

$$P(K_0=n,I=1)=P(I=1|K_0=n)\cdot P(K_0=n)=z_n\cdot q_n\cdot\prod_{j=0}^{n-1}(1-q_j),\\ n=0,1,2,\ldots. \tag{7}$$

Für einen bereits x-jährigen Schadenfall ergibt sich entsprechend

$$P(K_x=n,I=1)=P(I=1|K_x=n)\cdot P(K_x=n)=z_{x+n}\cdot q_{x+n}\cdot\prod_{j=0}^{n-1}(1-q_{x+j}),\\ n=0,1,2,\ldots. \tag{8}$$

Die Höhe Z_x der Zahlung, die ein bereits x-jähriger Schadenfall bei Schließung verursacht, ist ebenfalls eine Zufallsvariable. Offensichtlich gilt für ihre (bedingte) Verteilung

$$P^{Z_x}(\bullet|K_x=n,I=0)=\varepsilon_0\quad \text{für alle } x,n=0,1,2,\ldots \tag{9}$$

(Einpunktverteilung in Null), da im Fall $I=0$ keine Zahlung bei Schließung fällig wird. Setzen wir zur Abkürzung

$$Q_n=P^{Z_0}(\bullet|K_0=n,I=1)\quad \text{für } n=0,1,2,\ldots \tag{10}$$

und unterstellen wieder, dass die (bedingte) Verteilung von Z_x nur von der Gesamtlebensdauer K_0 abhängt, so erhalten wir allgemeiner

$$P^{Z_x}(\bullet|K_x=n,I=1)=P^{Z_0}(\bullet|K_0=x+n,I=1)=Q_{x+n}\\ \text{für } x,n=0,1,2,\ldots. \tag{11}$$

Für die unbedingte Verteilung von Z_x erhalten wir abschließend mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und den Rechenregeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten (vgl. Milbrodt 2010, S. 27ff):

$$\begin{aligned}P^{Z_x}(A)&=\sum_{n=0}^{\infty}P(Z_x\in A|K_x=n)\cdot P(K_x=n)\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}P(Z_x\in A,I=0|K_x=n)\cdot P(K_x=n)\\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}P(Z_x\in A,I=1|K_x=n)\cdot P(K_x=n)\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}P(Z_x\in A|I=0,K_x=n)\cdot P(I=0|K_x=n)\cdot P(K_x=n)\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} P(Z_x \in A | I=1, K_x = n) \cdot P(I=1|K_x=n) \cdot P(K_x = n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon_0(A) \cdot (1 - z_{x+n}) + Q_{x+n}(A) \cdot z_{x+n} \right\} \cdot q_{x+n} \cdot \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_{x+j}) \quad (12)$$

für alle (Borel-messbaren) Ereignisse $A \subseteq \mathbb{R}$. Dabei ist zu beachten, dass die Summation nur formal unendlich viele Terme enthält, da die „Lebensdauer" eines Schadenfalls in der Realität natürlich begrenzt ist, d.h. es existiert ein „Endalter" ϖ mit $q_\varpi = 1$ und damit $P(K_0 > \varpi) = 0$. In der Rechtsschutzversicherung liegt das Endalter je nach Leistungsart erfahrungsgemäß zwischen 9 und 15 Jahren oder wird aus praktischen Gründen so festgelegt.

Zur Berechnung eines für die Reservierung erforderlichen *Best Estimate* für die Zufallsvariable Z_x ist deren Erwartungswert als Grundlage zu bestimmen; explizit ergibt sich aus (12):

$$E(Z_x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{x+n} \cdot z_{x+n} \cdot q_{x+n} \cdot \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_{x+j}) \quad (13)$$

mit dem zur Verteilung Q_k gehörigen Erwartungswert μ_k für $k = 0, 1, 2, \ldots$.

2.2 Schätzung der Modellparameter

Eine statistische Schätzung des Erwartungswerts $E(Z_x)$ erfordert die Schätzung der Größen μ_k, z_k und q_k für $k = 0, 1, 2, \ldots$. In der Regel liegen beim Versicherungsunternehmen hierfür historische Daten über Fallzahlentwicklungen mit und ohne Zahlung bei Schließung und Regulierungskosten in Dreiecks- oder Trapezform vor. Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur Dreiecke, eine Übertragung auf den Fall von Trapezen ist evident. Es bezeichne

- $\{N_{ij} | 0 \le i + j \le m\}$: die Anzahl der Schadenfälle aus Meldejahr i mit Schließungsjahr j und Zahlung bei Schließung
- $\{M_{ij} | 0 \le i + j \le m\}$: die Anzahl der Schadenfälle aus Meldejahr i mit Schließungsjahr j ohne Zahlung bei Schließung
- $K_{ij} = N_{ij} + M_{ij}$, $0 \le i + j \le m$: die Anzahl der Schadenfälle aus Meldejahr i mit Schließungsjahr j
- S_i: die Anzahl der im Meldejahr i insgesamt bekannten Schadenfälle; es ist dann $S_i \ge \sum_{j=0}^{m-i} K_{ij}$
- $\{SZ_{ij} | 0 \le i + j \le m\}$: die Zahlungen für Schäden aus Meldejahr i mit Schließungsjahr j und Zahlung bei Schließung

Hierbei läuft i von 0 bis m, der maximalen Dauer, bis ein Schadenfall endgültig reguliert ist (entspricht dem „Endalter" ϖ).

2.2.1 *Schätzung der Sterblichkeiten q_x im Fallzahlmodell*

Eine wichtige Annahme ist hier die Konstanz der Sterblichkeiten q_j über die Zeit (d.h. über die Meldejahre). Man erhält dann wie in der Lebensversicherung als Schätzer die Größen

Tab. 1 Dreieck $\{N_{ij} | 0 \le i + j \le m\}$ der Fallzahlen *mit* Zahlung bei Schließung

	Abwicklungsjahr	0	1	2	3	4	5	6	7
Meldejahr	Fallzahlen gesamt								
0	400	20	9	20	20	30	15	5	1
1	600	10	20	20	30	30	20	20	
2	700	10	20	20	30	40	43		
3	800	10	30	20	40	60			
4	900	20	30	30	40				
5	1000	30	50	50					
6	1100	30	40						
7	1200	20							

Tab. 2 Dreieck $\{M_{ij} | 0 \le i + j \le m\}$ der Fallzahlen *ohne* Zahlung bei Schließung

	Abwicklungsjahr	0	1	2	3	4	5	6	7
Meldejahr	Fallzahlen gesamt								
0	400	100	75	60	30	10	5	0	0
1	600	140	100	90	40	30	20	10	
2	700	170	140	120	60	30	10		
3	800	190	160	130	100	20			
4	900	230	200	140	110				
5	1000	270	350	150					
6	1100	370	340						
7	1200	480							

$$\hat{q}_0 = \frac{\sum_{i=0}^{m} K_{i0}}{\sum_{i=0}^{m} S_i}, \qquad \hat{q}_j = \frac{\sum_{i=0}^{m-j} K_{ij}}{\sum_{i=0}^{m-j} S_i - \sum_{\ell=0}^{j-1} \sum_{i=0}^{m-j} K_{i\ell}} \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{14}$$

Damit lassen sich auch die zukünftigen, noch nicht bekannten erwarteten Fallzahlen schätzen, und zwar durch

$$\hat{K}_{ij} = \left(S_i - \sum_{\ell=0}^{j-1} \hat{K}_{i\ell} \right) \cdot \hat{q}_j \quad \text{für } j = m - i + 1, \ldots, m, \tag{15}$$

wobei für die schon bekannten Fallzahlen $\hat{K}_{ij} = K_{ij}$, $j = 0, 1, \ldots, m - i$ zu setzen ist.

Tabellen 1 und 2 enthalten ein fiktives Beispiel mit $m = 7$, welches sich jedoch stark an einem realen Datensatz orientiert.

2.2.2 *Schätzung der Wahrscheinlichkeiten z_x für Zahlung bei Schließung*

Auch hier gehen wir davon aus, dass sich die Wahrscheinlichkeiten z_j über die Zeit stabil verhalten. Gemäß (5) können diese Wahrscheinlichkeiten dann geschätzt werden über die zugehörigen relativen Häufigkeiten, also

$$\hat{z}_j = \frac{\sum_{i=0}^{m-j} N_{ij}}{\sum_{i=0}^{m-j} K_{ij}} \quad \text{für } j = 0, 1, \ldots, m. \tag{16}$$

Tab. 3 Dreieck $\{K_{ij}|0 \le i + j \le m\}$ aller bekannten Fallzahlen mit den geschätzten Sterblichkeiten $\hat{q}_x$ und Ergänzung der geschätzten unbekannten Fallzahlen

	Abwicklungsjahr	0	1	2	3	4	5	6	7
Meldejahr	Fallzahlen gesamt								
0	400	120	84	80	50	40	20	5	1
1	600	150	120	110	70	60	40	30	20
2	700	180	160	140	90	70	53	4	3
3	800	200	190	150	140	80	26	8	6
4	900	250	230	170	150	54	30	9	7
5	1000	300	400	200	47	28	16	5	4
6	1100	400	380	135	87	53	29	9	7
7	1200	500	281	177	114	69	38	12	9
	$\hat{q}_x$	0,3134	0,4010	0,4216	0,4690	0,5365	0,6420	0,6250	1,0000

Tab. 4 Dreieck $\{N_{ij}|0 \le i + j \le m\}$ der Fälle mit Zahlung bei Schließung mit geschätzten Wahrscheinlichkeiten $\hat{z}_x$ und Ergänzung der geschätzten unbekannten Fallzahlen

	Abwicklungsjahr	0	1	2	3	4	5	6	7	
Meldejahr	Fallzahlen gesamt									Offene Fälle
0	400	20	9	20	20	30	15	5	1	0
1	600	10	20	20	30	30	20	20	20	20
2	700	10	20	20	30	40	43	3	3	6
3	800	10	30	20	40	60	18	6	6	30
4	900	20	30	30	40	34	21	7	7	69
5	1000	30	50	50	15	18	11	3	4	52
6	1100	30	40	25	28	34	20	6	7	121
7	1200	20	36	33	36	44	26	8	9	194
	$\hat{z}_x$	0,0714	0,1272	0,1882	0,3200	0,6400	0,6903	0,7143	1,0000	$\Sigma = 491$

Mit Hilfe der z_j kann dann auch das Dreieck der erwarteten Fallzahlen mit Zahlung bei Schließung vervollständigt werden, in dem man die ergänzten Einträge im Dreieck aller bekannten Fallzahlen (Tab. 3) mit diesen Wahrscheinlichkeiten multipliziert. Man erhält so die Schätzer

$$\hat{N}_{ij} = \hat{K}_{ij} \cdot \hat{z}_j \quad \text{für } j = m - i + 1, \ldots, m. \tag{17}$$

Erfahrungsgemäß steigen die z_x mit wachsendem x an, wie das Beispiel auch deutlich zeigt (Tab. 4).

2.2.3 *Schätzung der Erwartungswerte μ_x der Kosten je Fall mit Zahlung bei Schließung*

Im Gegensatz zu den vorigen beiden Abschnitten nehmen wir hier an, dass sich die Erwartungswerte der Kosten je Fall mit Zahlung bei Schließung über die Zeit (Meldejahre) verändern, mit zunehmender Tendenz. Dies steht im Einklang mit der Tatsache, dass Gebührensätze für Anwalts- und Gerichtskosten im Laufe der Zeit als die

Tab. 5 Dreieck $\{SZ_{ij}|0 \le i+j \le m\}$ der absoluten Zahlungen bei Schließung in EUR

	Abwicklungsjahr	0	1	2	3	4	5	6	7
Meldejahr									
0		3.580	4.300	16.000	30.000	80.000	50.000	14.000	4.000
1		1.800	11.000	20.000	50.000	75.000	72.000	55.000	
2		1.860	14.000	25.000	65.000	120.000	110.000		
3		1.900	16.000	22.000	110.000	190.000			
4		3.620	15.500	37.000	115.000				
5		6.060	25.000	65.000					
6		6.120	25.500						
7		4.580							

wesentlichen Kostentreiber mit der Zeit nach oben angepasst werden. Wir betrachten also genauer die Erwartungswerte $\mu_{ix} = E(Z_{ix})$ der Kosten Z_{ix} eines dem i-ten Meldejahr zugeordneten x-jährigen Falls mit Zahlung bei Schließung und unterstellen den Zusammenhang

$$\frac{\mu_{i+1,x}}{\mu_{ix}} = f_i \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{18}$$

mit den jährlichen Steigerungsfaktoren f_i. Dementsprechend ist der Ausdruck (13) zu modifizieren, d.h. zur Bestimmung eines *Best Estimate* betrachten wir jetzt in Abhängigkeit von den Meldejahren die Größen

$$E(Z_{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{i,x+n} \cdot z_{x+n} \cdot q_{x+n} \cdot \prod_{j=0}^{n-1}(1-q_{x+j}) \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots, m. \tag{19}$$

Dazu wird zunächst das Dreieck $\{RZ_{ij}|0 \le i+j \le m\}$ der *relativen* Kosten je Fall bei Schließung mit Zahlung aus dem Dreieck $\{SZ_{ij}|0 \le i+j \le m\}$ der *absoluten* Kosten (Tab. 5) gebildet:

$$RZ_{ij} = \frac{SZ_{ij}}{N_{ij}} \quad \text{für } j = m-i+1, \ldots, m. \tag{20}$$

Die Steigerungsfaktoren f_i können statistisch leicht durch das Wachstumsverhältnis der Zeilen im Dreieck $\{RZ_{ij}|0 \le i+j \le m\}$ bestimmt werden (Tab. 6):

$$\hat{f}_i = \frac{\sum_{j=0}^{m-i} RZ_{ij}}{\sum_{j=0}^{m-i} RZ_{i-1,j}} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m. \tag{21}$$

Eine Vervollständigung des Dreiecks der relativen Zahlungen bei Schließung wird dann folgendermaßen durchgeführt:

$$\widehat{RZ}_{ij} = \hat{f}_i \cdot \widehat{RZ}_{i-1,j} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m \text{ und } j = m-i+1, \ldots, m. \tag{22}$$

Wie man der Tab. 6 entnehmen kann, steigen die relativen Kosten in unserem Beispiel jährlich um mindestens 3 %, zum Ende hin sogar noch deutlicher.

Als Schätzer für die erwarteten relativen Kosten wählt man dann sinnvollerweise

$$\hat{\mu}_{ix} = \widehat{RZ}_{ix}, \tag{23}$$

wobei wieder für die schon bekannten Werte $\widehat{RZ}_{ij} = RZ_{ij}$, $j = 0, 1, \ldots, m-i$ zu setzen ist.

Tab. 6 Dreieck $\{RZ_{ij} | 0 \leq i + j \leq m\}$ der relativen Zahlungen bei Schließung in EUR mit Ergänzungen $\widehat{RZ}_{ij}$

	Abwicklungsjahr	0	1	2	3	4	5	6	7	
Meldejahr										Faktoren $\hat{f}_i$
0		179	478	800	1.500	2.667	3.333	2.800	4.000	
1		180	550	1.000	1.667	2.500	3.600	2.750	4.167	1,0417
2		186	700	1.250	2.167	3.000	2.558	2.855	4.326	1,0383
3		190	533	1.100	2.750	3.167	2.711	3.026	4.586	1,0599
4		181	517	1.233	2.875	3.328	2.849	3.180	4.819	1,0509
5		202	500	1.300	2.981	3.450	2.954	3.297	4.996	1,0368
6		204	638	1.558	3.573	4.136	3.541	3.953	5.989	1,1987
7		229	716	1.749	4.011	4.643	3.975	4.437	6.723	1,1225

Tab. 7 Dreieck $\{SZ_{ij} | 0 \leq i + j \leq m\}$ der absoluten Zahlungen bei Schließung in EUR mit Vervollständigung und Best Estimate für die Reserve

	Abwicklungsjahr	0	1	2	3	4	5	6	7	
Meldejahr										B.E.
0		3.580	4.300	16.000	30.000	80.000	50.000	14.000	4.000	0
1		1.800	11.000	20.000	50.000	75.000	72.000	55.000	83.333	83.333
2		1.860	14.000	25.000	65.000	120.000	110.000	7.932	13.460	21.392
3		1.900	16.000	22.000	110.000	190.000	48.065	17.196	29.181	94.441
4		3.620	15.500	37.000	115.000	114.258	58.531	20.940	35.535	229.264
5		6.060	25.000	65.000	44.739	62.897	32.220	11.527	19.561	170.944
6		6.120	25.500	39.577	99.256	139.541	71.483	25.574	43.398	418.829
7		4.580	25.561	58.211	145.989	205.241	105.139	37.615	63.831	641.585
										B = 1.659.788

2.3 Berechnung des Best Estimate für die Gesamtreserve

Wegen des im Modell berücksichtigten Teuerungseffektes wird der Best Estimate B_i für die Reserve R_i zunächst je Meldejahr i bestimmt, und zwar gemäß der Formeln (15) bis (17) zu

$$B_i = \sum_{j=m+1-i}^{m} \hat{\mu}_{ij} \cdot \hat{N}_{ij} \approx S_i \cdot \sum_{j=m+1-i}^{m} \hat{\mu}_{ij} \cdot \hat{z}_j \cdot \hat{q}_j \cdot \prod_{\ell=0}^{j-1} (1 - \hat{q}_\ell)$$
$$\text{für } i = 1, 2, \ldots, m. \tag{24}$$

Der gesamte Best Estimate B ergibt sich daraus durch Summation über die Meldejahre zu

$$B = \sum_{i=1}^{m} B_i. \tag{25}$$

Im betrachteten Beispiel liegt der Best Estimate für die Gesamtreserve damit bei ca. 1,66 Mio. EUR (Tab. 7).

Tab. 8 Dreieck der absoluten Zahlungen bei Schließung in EUR mit Vervollständigung und Best Estimate für die Reserve; $\overleftarrow{q}_x = 0,9 \cdot q_x$; $\tau = 183.169$ EUR $(+11,04\ \%)$

	Abwicklungsjahr	0	1	2	3	4	5	6	7	
Meldejahr										B.E.
0		3.580	4.300	16.000	30.000	80.000	50.000	14.000	4.000	0
1		1.800	11.000	20.000	50.000	75.000	72.000	55.000	83.333	83.333
2		1.860	14.000	25.000	65.000	120.000	110.000	8.031	13.250	21.281
3		1.900	16.000	22.000	110.000	190.000	43.258	20.534	33.877	97.669
4		3.620	15.500	37.000	115.000	102.832	58.775	27.899	46.028	235.534
5		6.060	25.000	65.000	40.265	61.608	35.212	16.714	27.576	181.375
6		6.120	25.500	35.619	95.843	146.646	83.816	39.786	65.640	467.349
7		4.580	23.005	55.897	150.406	230.131	131.533	62.436	103.008	756.416
	$\bar{q}_x$	0,2821	0,3609	0,3795	0,4221	0,4828	0,5778	0,5625	1,0000	B = 1.842.957

Tab. 9 Dreieck der absoluten Zahlungen bei Schließung in EUR mit Vervollständigung und Best Estimate für die Reserve; $\overleftarrow{q}_x = 0,8 \cdot q_x$; $\tau = 428.316$ EUR $(+25,81\ \%)$

	Abwicklungsjahr	0	1	2	3	4	5	6	7	
Meldejahr										B.E.
0		3.580	4.300	16.000	30.000	80.000	50.000	14.000	4.000	0
1		1.800	11.000	20.000	50.000	75.000	72.000	55.000	83.333	83.333
2		1.860	14.000	25.000	65.000	120.000	110.000	7.139	15.143	22.281
3		1.900	16.000	22.000	110.000	190.000	38.452	21.028	44.605	104.084
4		3.620	15.500	37.000	115.000	91.407	57.664	31.534	66.891	247.496
5		6.060	25.000	65.000	35.791	59.207	37.351	20.426	43.328	196.103
6		6.120	25.500	31.661	90.982	150.508	94.948	51.924	110.141	530.164
7		4.580	20.449	52.804	151.738	251.013	158.351	86.597	183.691	904.643
	$\bar{q}_x$	0,2507	0,3208	0,3373	0,3752	0,4292	0,5136	0,5000	1,0000	B = 2.088.104

2.4 Sensitivitätsanalysen und Sicherheitsmargen

Es ist möglich, durch Zu- oder Abschläge auf die geschätzten Sterblichkeiten Sicherheitszuschläge auf den Best Estimate für die Gesamtreserve zu berechnen. Tabellen 8 und 9 zeigen verschiedene Sicherheitszuschläge τ, die sich durch unterschiedliche prozentuale Abschläge auf die Sterblichkeiten ergeben.

Analoge Zuschläge können durch prozentuale Veränderungen der übrigen Modellparameter berechnet werden.

3 Die Situation bereits eingetretener, aber noch nicht gemeldeter Schadenfälle

Eine Besonderheit bei einigen Leistungsarten der Rechtsschutzversicherung ist dadurch gegeben, dass bereits eingetretene Schadenfälle erst mit einer deutlichen zeitlichen Verzögerung gemeldet werden. Die hier vorgestellte Methode zur Berechnung des Best Estimate für die so genannte Nachmeldereserve (vgl. Boetius (1996), Anm.

Tab. 10 Rechteck der Schadenfallzahlen $\{L_{ij} | 0 \le i \le m, 0 \le j \le r\}$ mit den Schätzern $\hat{\rho}_j$

	Vorlaufjahr j	0	1	2	3	4	5
Meldejahr i	Fallzahlen gesamt						
0	400	270	94	21	9	4	2
1	600	408	141	27	15	9	0
2	700	480	162	32	13	7	6
3	800	531	192	42	16	10	9
4	900	597	219	42	24	12	6
5	1000	669	244	47	22	13	5
6	1100	751	255	47	25	13	9
7	1200	819	279	51	24	15	12
	$\hat{\rho}_j$	0,6754	0,2367	0,0461	0,0221	0,0124	0,0073

975) beruht auf einer statistischen Hochrechnung der insgesamt erwarteten, vertragsrechtlich relevanten Fallzahlen in die Zukunft und einer anschließenden Anwendung des in Abschn. 2 vorgestellten Verfahrens. Damit ist zugleich eine angemessene Berücksichtigung des Zeit- und Änderungsfaktors gegeben (vgl. Boetius (1996), Anm. 984 und 985).

3.1 Das Fallzahlmodell für Nachmeldungen

Wir nehmen an, dass sich die Anzahl S_i der im Meldejahr i insgesamt bekannten Schadenfälle additiv aus Fallzahlen L_{ij} mit $j = 0, 1, 2, \ldots, r$ zusammensetzt, wobei L_{ij} die Anzahl der Schadenfälle bezeichnet, deren Verursachung bereits j Jahre vor dem Meldejahr i (also im Vorlaufjahr j) liegt, d.h. es gilt

$$S_i = \sum_{j=0}^{r} L_{ij} \tag{26}$$

mit einer je nach Leistungsart festzulegenden Größe r, und dass die Zufallsvektoren $L_i = (L_{i0}, \ldots, L_{ir})$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind. Ferner nehmen wir an, dass

$$E(L_{ij}) = \rho_j \cdot E(S_i) \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots, m \text{ und } j = 0, 1, \ldots, r, \tag{27}$$

gilt mit vom Meldejahr i unabhängigen Faktoren $\rho_j \le 1$ und $\sum_{j=1}^{r} \rho_j = 1$. Auf Grund der gemachten Voraussetzungen lassen sich diese Faktoren dann durch die Quotienten

$$\hat{\rho}_j = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} L_{ij}}{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} S_i} = \frac{\sum_{i=0}^{m} L_{ij}}{\sum_{i=0}^{m} S_i} \quad \text{für } j = 0, 1, \ldots, r \tag{28}$$

statistisch schätzen.

Zur Veranschaulichung ergänzen wir das behandelte Zahlenbeispiel in der Tab. 10 oben.

Beispielsweise wurden von den 400 im Meldejahr 0 bekannten Schadenfällen genau 270 im gleichen Jahr verursacht, 94 ein Jahr vorher, 21 zwei Jahre vorher usw.

Tab. 11 Rechteck der erwarteten Abwicklungsfallzahlen $\hat{a}_{ij}$ aus Nachmeldungen mit Zahlung bei Schließung

	Abwicklungsjahr j	0	1	2	3	4	5	6	7
Meldejahr i	$\hat{\kappa}_i$								
8	390	8,7	13,6	12,7	13,9	16,9	10,1	3,6	3,1
9	105	2,4	3,7	3,4	3,8	4,6	2,7	1,0	0,8
10	50	1,1	1,8	1,6	1,8	2,2	1,3	0,5	0,4
11	24	0,5	0,8	0,8	0,8	1,0	0,6	0,2	0,2
12	9	0,2	0,3	0,3	0,3	0,4	0,2	0,1	0,1
	$\hat{\pi}_j$	0,3134	0,2753	0,1734	0,1116	0,0678	0,0376	0,0131	0,0079
	$\hat{z}_j$	0,0714	0,1272	0,1882	0,3200	0,6400	0,6903	0,7143	1,0000

Auf der Basis der Schätzer $\hat{\rho}_j$ und der im aktuellen Jahr m bekannten Schadenfallzahl S_m lassen sich die in den Folgejahren aus Nachmeldungen insgesamt erwarteten Schadenfallzahlen κ_{i+m} mit aktueller vertragsrechtlicher Relevanz dann durch Multiplikation schätzen zu

$$\hat{\kappa}_{i+m} = S_m \cdot \sum_{j=i}^{r} \hat{\rho}_j \quad \text{für } i = 1, \ldots, r. \tag{29}$$

Die geschätzten erwarteten Anzahlen $\hat{a}_{ij}$ der sich aus den Nachmeldungen ergebenden Abwicklungsfälle mit Zahlung bei Schließung erhält man hieraus unter Anwendung des unter Abschn. 2.2 beschriebenen Verfahrens durch Multiplikation mit den geschätzten Wahrscheinlichkeiten $\hat{\pi}_n = \hat{q}_n \cdot \prod_{j=0}^{n-1}(1 - \hat{q}_j)$ und $\hat{z}_n$; es ergibt sich damit insgesamt (Tab. 11).

$$\hat{a}_{ij} = \hat{\kappa}_i \cdot \hat{\pi}_j \cdot \hat{z}_j \quad \text{für } i = m+1, \ldots, m+r \text{ und } j = 0, 1, \ldots, m. \tag{30}$$

Wegen der kleinen Beispielzahlen wurden die erwarteten Abwicklungsfälle zum besseren Verständnis hier mit einer Dezimale angegeben.

3.2 Berechnung des Best Estimate für die Nachmeldereserve

Gemäß den Ausführungen in Abschn. 2.3 reicht es, die erwarteten Anzahlen $\hat{a}_{ij}$ der erwarteten Abwicklungsfälle aus Nachmeldungen mit Zahlung bei Schließung mit geeigneten, teuerungskorrigierten erwarteten relativen Kosten zu multiplizieren (vgl. Tab. 6). Hierfür ist das entsprechende vervollständigte Rechteck um die Jahre $m+1, m+2, \ldots, m+r$ zu ergänzen, indem man die Kostensteigerungsfaktoren f_i passend fortschreibt. Wählt man eine zukünftige jährliche 5 %ige Kostensteigerung, so ergeben sich die Zahlen in Tab. 12.

Durch Multiplikation der jeweiligen Tabelleneinträge und anschließende Summation erhält man dann den Best Estimate B_i für die Nachmeldereserve im Meldejahr i als

$$B_i = \hat{\kappa}_i \cdot \sum_{j=0}^{m} \widehat{RZ}_{ij} \cdot \hat{z}_j \cdot \hat{\pi}_j \quad \text{für } i = m+1, \ldots, m+r. \tag{31}$$

Tab. 12 Hochgerechnetes Rechteck der erwarteten relativen Zahlungen $\{\widehat{RZ}_{ij} | i = m+1, \ldots, m+r, j = 0, \ldots, m\}$ bei Schließung in EUR für Nachmeldungen

	Abwicklungsjahr j	0	1	2	3	4	5	6	7	
Meldejahr i										Faktoren f_i
7		229	716	1.749	4.011	4.643	3.975	4.437	6.723	
8		240	751	1.837	4.211	4.875	4.174	4.659	7.059	1,05
9		252	789	1.929	4.422	5.118	4.382	4.892	7.412	1,05
10		265	828	2.025	4.643	5.374	4.602	5.136	7.782	1,05
11		278	870	2.126	4.875	5.643	4.832	5.393	8.172	1,05
12		292	913	2.233	5.119	5.925	5.073	5.663	8.580	1,05

Tab. 13 Rechteck der absoluten Zahlungen bei Schließung in EUR mit Best Estimate für die Nachmeldereserve

	Abwicklungsjahr j	0	1	2	3	4	5	6	7	
Meldejahr i										B.E.
8		2.097	10.254	23.353	58.568	82.339	42.180	16.977	21.607	257.374
9		596	2.916	6.640	16.653	23.413	11.994	4.827	6.144	73.183
10		298	1.455	3.315	8.313	11.686	5.987	2.410	3.067	36.529
11		147	720	1.641	4.115	5.785	2.963	1.193	1.518	18.082
12		57	281	639	1.604	2.255	1.155	465	592	7.048
										B = 392.216

Der Best Estimate B für die gesamte Nachmeldereserve ergibt sich durch Summation über die zukünftigen Meldejahre zu

$$B = \sum_{i=m+1}^{m+r} B_i. \tag{32}$$

Für das angegebene Beispiel erhält man somit die Zahlen der Tab. 13.

Der Best Estimate für die Nachmeldereserve beträgt also ca. 400.000 EUR.

Auch hier lassen sich Sensitivitätsanalysen wie in Abschn. 2.4 durchführen, um ggf. geeignete Sicherheitszuschläge zu ermitteln,

4 Anwendung des Verfahrens auf Einzelfallreserven

Prinzipiell lassen sich auch Einzelfallreserven durch ein proportionales „Downscaling" aus den Pauschalreserven berechnen, indem man unter Berücksichtigung der aktuellen Gebührentabellen sinnvolle streitwertabhängige Prozentsätze berechnet, die man auf die hochgerechneten durchschnittlichen Fallkosten (vgl. Tab. 6) anwendet. Auf weitere Einzelheiten soll hier aber nicht eingegangen werden.

Danksagung Frau Cand.-Math. Anna Wilke, Bremen und Herr M.Sc. Dominic Lauterbach, Oldenburg haben die mathematischen Teile des Manuskripts sorgfältig geprüft und wertvolle Hinweise gegeben, die zu einer Verbesserung der Qualität der Darstellung beigetragen haben.

Literatur

Boetius, J.: Handbuch der versicherungstechnischen Rückstellungen. Handels- und Steuerbilanzrecht der Versicherungsunternehmen. Verlag Dr. Otto Schmidt, Köln (1996)

Gerber, H.U.: Lebensversicherungsmathematik. Springer, Berlin (1986)

Milbrodt, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Eine Einführung mit Anwendungen und Beispielen aus der Versicherungs- und Finanzmathematik. Schriftenreihe Versicherungs- und Finanzmathematik, Bd. 36. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe (2010)

Ortmann, K.M.: Praktische Lebensversicherungsmathematik. Vieweg+Teubner, Wiesbaden (2009)