Eine elementare Näherungskonstruktion des regelmäßigen Elfecks mit Zirkel und Lineal

Dietmar Pfeifer
Institute of Mathematics, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, D-26111 Oldenburg, Germany (2022)

Abstract

In this note we present a simple elementary approximate construction of the regular hendekagon with ruler and compass. The underlying idea goes back to my paper „Eine elementare Näherungskonstruktion des regelmäßigen Siebenecks mit Zirkel und Lineal“.

Keywords: regular hendekagon, constructions with ruler and compass

MSC: 01A40

1. Einleitung

Näherungskonstruktionen regelmäßiger Vielecke sind schon seit der Antike bekannt. Exakte Konstruktionen regelmäßiger n-Ecke sind aber nur dann möglich, wenn, wie schon Gauß zeigte, n die Form $n = 2^{m-1} \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ besitzt, wobei $m,k \in \mathbb{N}$ und die p_i paarweise verschiedene Primzahlen der Form $p_i = 2^j + 1$ sind, vgl. Scriba und Schreiber (2010), S. 405. Grundsätzlich sind die „Ecken“ regelmäßiger n-Ecke in der komplexen Ebene Lösungen der so genannten Kreisteilungsgleichung

$$x^n - 1 = 0.$$

In der Arbeit „Eine elementare Näherungskonstruktion des regelmäßigen Siebenecks mit Zirkel und Lineal“ wurde gezeigt, dass eine approximativen Lösung dieser Gleichung für $n = 7$ gegeben ist durch

$$x_0 = -\frac{2}{9} + \frac{i}{9}\sqrt{77}$$

mit der Fehlerabschätzung

$$x_0^7=\left(-\frac{2}{9}+\frac{i}{9}\sqrt{77}\right)^7=\frac{4.782.958}{4.782.969}-\frac{1.169}{4.782.969}\sqrt{77}i$$

$$=0{,}999997...-0{,}002144...i$$

Im Falle $n=11$ ist eine approximative Lösung gegeben durch

$$x_0=-\frac{1}{7}+\frac{4}{7}\sqrt{3}\,i$$

mit der Fehlerabschätzung

$$x_0^{11}=\left(-\frac{1}{7}+\frac{4}{7}\sqrt{3}\,i\right)^{11}=\frac{1.977.290.831}{1.977.326.743}+\frac{6.880.364}{1.977.326.743}\sqrt{3}\,i$$

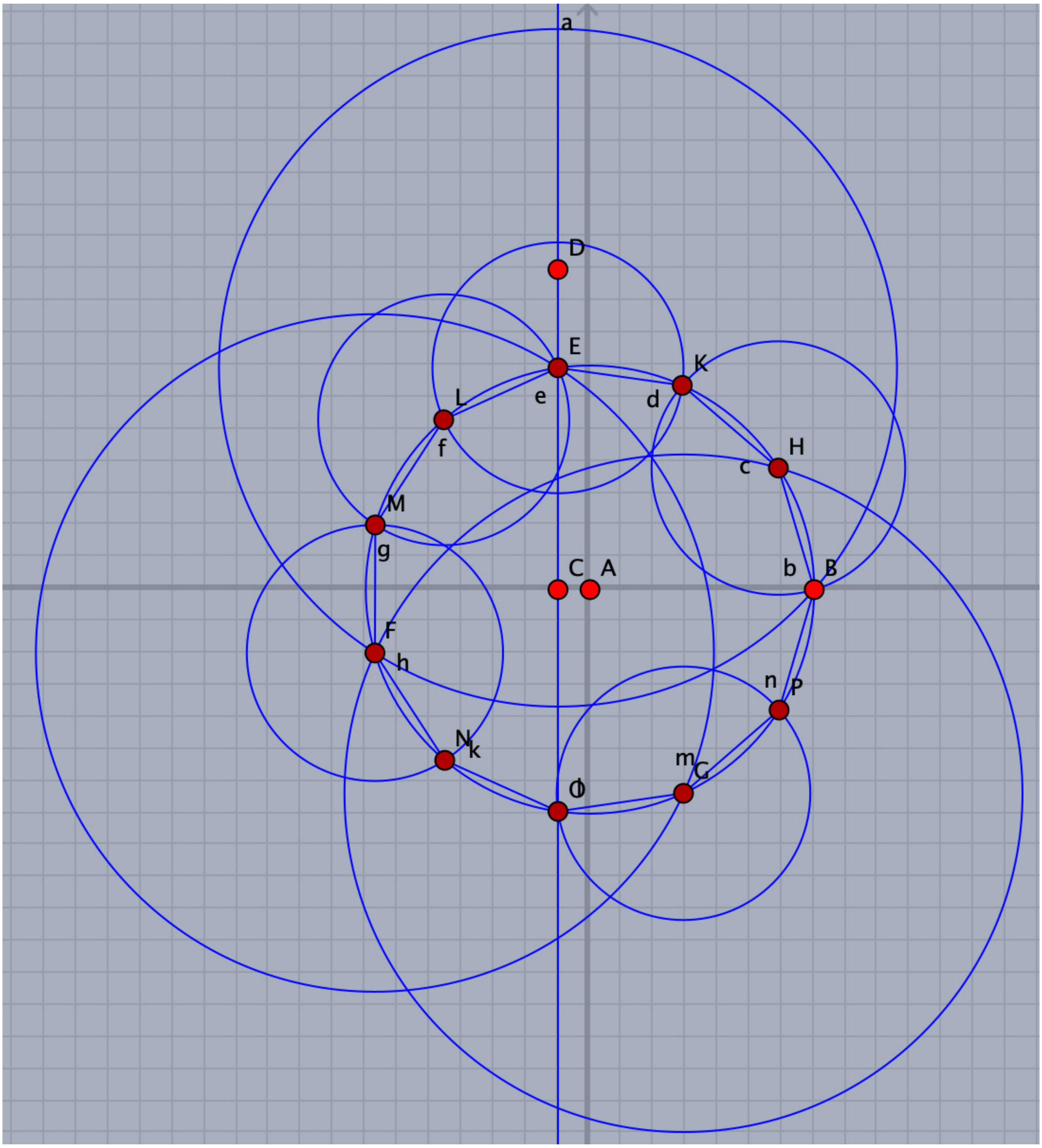
$$=0{,}999981...+0{,}006026...\,i$$

Die geometrische Konstruktion kann wie folgt durchgeführt werden:

1. Errichte im Punkt C mit der Koordinate $-\frac{1}{7}$ eine Senkrechte zur Abszisse. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit dem Einheitskreis um den Nullpunkt A sei mit E bezeichnet. Der Schnittpunkt des Einheitskreises mit der Abszisse sei mit B bezeichnet.
2. Schlage um E einen Kreis mit dem Radius der Streckenlänge zwischen E und B. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Einheitskreis neben B sei mit F bezeichnet.
3. Schlage um F einen Kreis mit dem Radius der Streckenlänge zwischen F und E. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Einheitskreis neben E sei mit G bezeichnet.
4. Schlage um G einen Kreis mit dem Radius der Streckenlänge zwischen G und F. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Einheitskreis neben F sei mit H bezeichnet. Der Punkt H ist der zweite Eckpunkt des approximativen Elfecks gegen den Uhrzeigersinn (nach B).
5. Schlage um H einen Kreis mit dem Radius der Streckenlänge zwischen H und B. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Einheitskreis neben B sei mit K bezeichnet. Der Punkt K ist der dritte Eckpunkt des approximativen Elfecks gegen den Uhrzeigersinn.
6. Schlage um E einen Kreis mit dem Radius der Streckenlänge zwischen E und K. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Einheitskreis neben K sei mit L

bezeichnet. Der Punkt L ist nach E der fünfte Eckpunkt des approximativen Elfecks gegen den Uhrzeigersinn.

7. Fahre analog fort, bis alle 11 Ecken des approximativen Elfecks konstruiert sind.



Die Koordinaten der sukzessiv konstruierten Eckpunkte sind rechnerisch gegeben durch

$E = \left(-\frac{1}{7}, \frac{4}{7}\sqrt{3}\right)$ mit dem Abstand r von E nach B von $r = \frac{4}{7}\sqrt{7}$

$F = \left(-\frac{47}{49,} - \frac{8}{49}\sqrt{3}\right)$ $G = \left(\frac{143}{343}, -\frac{180}{343}\sqrt{3}\right)$ $H = \left(\frac{2017}{2401}, \frac{752}{2401}\sqrt{3}\right)$

Für die sich hieraus ergebende Sehnenlänge $\hat{L}$ für das approximative Elfeck erhält man demnach $\hat{L} = \frac{16}{49}\sqrt{3} = 0{,}565567...$, die exakte Sehnenlänge L beträgt dagegen $L = 2\sin\left(\frac{\pi}{11}\right) = 0{,}563465...$. Der relative Fehler beträgt also $0{,}373137...\%$.

Literatur

D. Pfeifer: Eine elementare Näherungskonstruktion des regelmäßigen Siebenecks mit Zirkel und Lineal. Unveröffentlichtes Manuskript (2022), http://www.staff.uni-oldenburg.de/dietmar.pfeifer/Publ/P123.pdf

C.J.Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. 3. Aufl. 2010, Springer, Heidelberg.