Anmerkungen zu Schurigs „algebraischer Lösung" für den casus irreducibilis einer kubischen Gleichung

Dietmar Pfeifer

Stand: 30.12.2023

Abstract. In seinem 1895 erschienen „Katechismus der Algebra" schreibt Richard Schurig auf S. 235, die Auflösung der Gleichung dritten Grades für den casus irreducibilis könne auch algebraisch durch eine vom Verfasser neuerdings gefundene Formel aufgelöst werden. Diese Formel kann bekanntermassen natürlich nicht exakt sein, sondern nur eine – relativ gute – Näherung des Problems darstellen. In dieser Arbeit soll sein Ansatz diskutiert und verbessert werden.

1. Einleitung

Richard Schurig (1820 – 1896) war ein deutscher, in Leipzig tätiger Mathematiklehrer und populärer Astronom. Er war insbesondere ein starker Schachspieler und Erfinder zahlreicher Schachprobleme.

1895 publizierte er den *Katechismus der Algebra*. Im Vorwort schreibt er: „Noch mag bemerkt sein, daß der Verfasser bei gegenwärtiger Arbeit sich nicht nur von besonderer Rücksichtnahme auf das Selbststudium leiten ließ, sondern dass er auch anderseits eine nutzreiche Grundlage für den mathematischen Unterricht an Gymnasien und verwandten Lehranstalten hat schaffen wollen."

In § 56 seines Buchs bespricht er ausführlich die Gleichung dritten Grades. Im Unterabschnitt VII. behandelt er die Auflösung der reduzierten Gleichung $x^3 - bx \pm c = 0.$ Zum Fall des casus irreducibilis (für $4b^3 > 27c^2$) merkt er unter A. an: „Der casus irreducibilis konnte bisher nicht algebraisch, sondern nur trigonometrisch […] aufgelöst werden." Und unter B: „Dennoch kann die Auflösung der Gleichung dritten Grades für den casus irreducibilis auch algebraisch durch die nachstehende vom Verfasser (R. Sch.) neuerdings gefundene Formel aufgelöst werden:"

$$x = \frac{\pm mc}{b\left[n + p\sqrt{1 - \frac{27c^2}{4b^3} - \frac{c^2}{b^3}}\right]^r}$$

mit $m = 6{,}263305$; $n = 11{,}639016$; $p = 11{,}331288$; $r = 0{,}5853828$.

Schurig gibt als Beispiel für $b = -21$, $c = -35$ die „algebraische Lösung" an:

$x = -2{,}121083$, wohingegen die exakte Lösung –2,121082302… beträgt. Der relative Fehler ist in der Tat sehr klein. Im Fall $b = 21$, $c = 20$ erhält man mit Schurigs Ansatz $x = 1{,}000001644$ bei der exakten Lösung $x = 1$.

Leider gibt der Verfasser nicht an, wie er auf seine Formel gekommen ist. Mit Hilfe statistischer Methoden kann man die Koeffizienten m, n, p, r aber noch graduell verbessern. Versieht man die ursprünglichen Koeffizienten mit dem Index 1 und wählt man etwa

$m_2 = 6{,}254081821$; n_2=11,61021331; p_2=11,30241056; $r_2 = r_1$,

So zeigt die nachfolgende Graphik für den Fall $b = 1$, dass die neue Wahl der Koeffizienten insgesamt etwas bessere Ergebnisse als Schurigs originäre Wahl liefert:

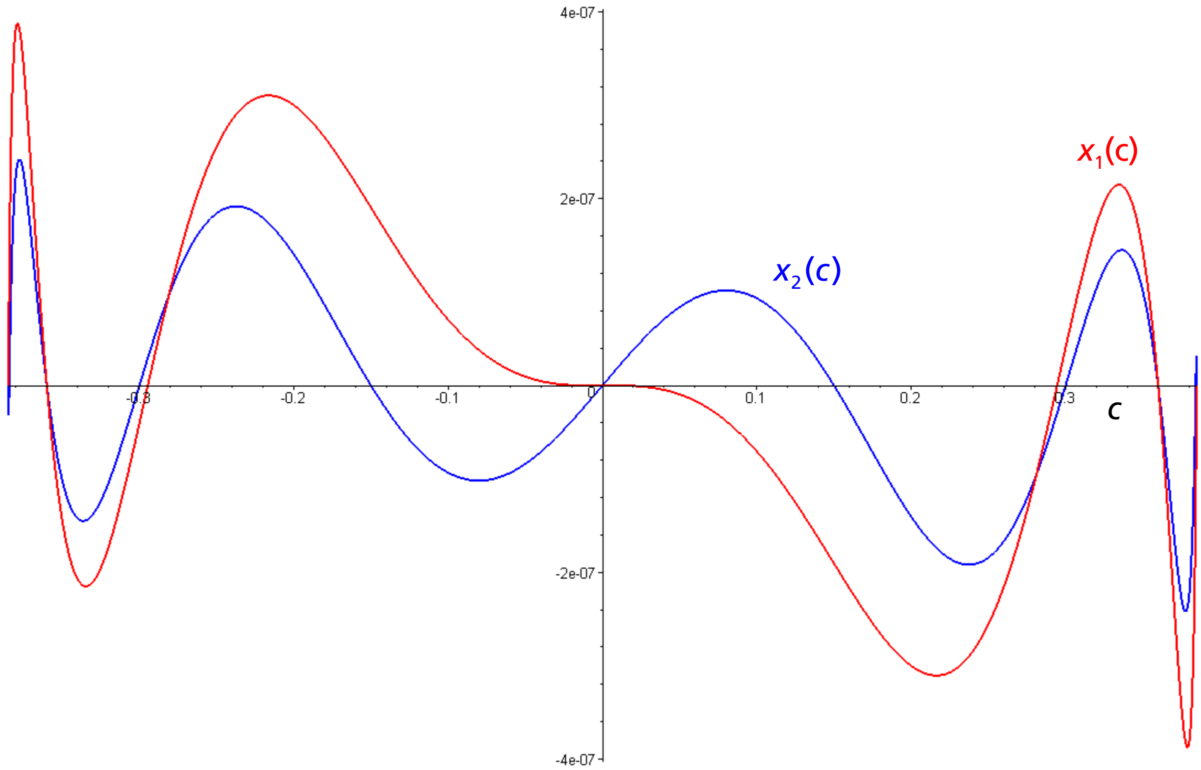

Fig.1

Hierbei ist $x_i(c) = x_i^3 - x_i + c$, wobei x_1 Schurigs und x_2 die alternative Lösung bezeichnet. Der Fall $b = 1$ ist insofern keine Einschränkung der Allgemeinheit, weil die Gleichung $x^3 - bx \pm c = 0$ zur Gleichung $y^3 - y \pm \frac{c}{b\sqrt{b}} = 0$ äquivalent ist mit der Substitution $x = \sqrt{b}y$. Schurigs „algebraische Lösung" ist nur besser in den Bereichen $|c| \le 0{,}1088$ und $0{,}2811 < |c| < 0{,}2969$. Man beachte, dass im Fall $b = 1$ aus Konsistenzgründen $|c| \le c_0 := \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0{,}3849...$ gelten muss.

Eine weitere, sehr gute Näherungslösung für die Gleichung $x^3 - bx - c = 0$, falls $b, c > 0, \left(\frac{c}{2}\right)^2 < \left(\frac{b}{3}\right)^3$ (casus irreducibilis) kann wie folgt erhalten werden.

Setze $x_0 := \frac{R}{81} \cdot \left(56 + K + 8\sqrt{3 + 6K}\right)$ mit $R := \sqrt{\frac{4b}{3}}$, $K := \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$.

Setze $x_1 := \frac{3x_0^2 + b + \sqrt{b^2 + 12cx_0 + 6bx_0^2 - 3x_0^4}}{6x_0}$.

Dann ist x_1 eine sehr gute Näherungslösung der Gleichung.

Beispiel:

$b = 3$, $c = 1$. Die (größte) exakte reelle Lösung ist
$L := R\cos\left(\frac{\arccos(K)}{3}\right) = 1{,}879385241571817$. Es gilt:

$$x_0 = \frac{113 + 16\sqrt{6}}{81} = 1{,}878911554130011 \text{ und}$$

$$x_1 = \frac{31.299 + 5.424\sqrt{6} + \sqrt{487.047.273 + 54.679.440\sqrt{6}}}{243 \cdot \left(113 + 16\sqrt{6}\right)} = 1{,}879385241585809$$

mit einem Fehler von $|L - x_1| < 1{,}4 \cdot 10^{-11}$. Aus Schurigs originärer Lösung $x_S = -0{,}472969254$ ergibt sich durch Lösen der quadratischen Gleichung

$$\frac{x^3 - bx - c}{x - x_S} = x^2 + x_S x + \left(x_S^2 - b)\right) = 0$$

der ungenauere Wert $x = 1{,}879385440$. Mit der zu Schurig alternativen Lösung ergibt sich analog $x = 1{,}879385324$. Die folgende Graphik zeigt zum Vergleich zu Fig. 1 den Verlauf von $f(c) := x_1^3 - x_1 - |c|$ für $-c_0 \le c \le c_0$:

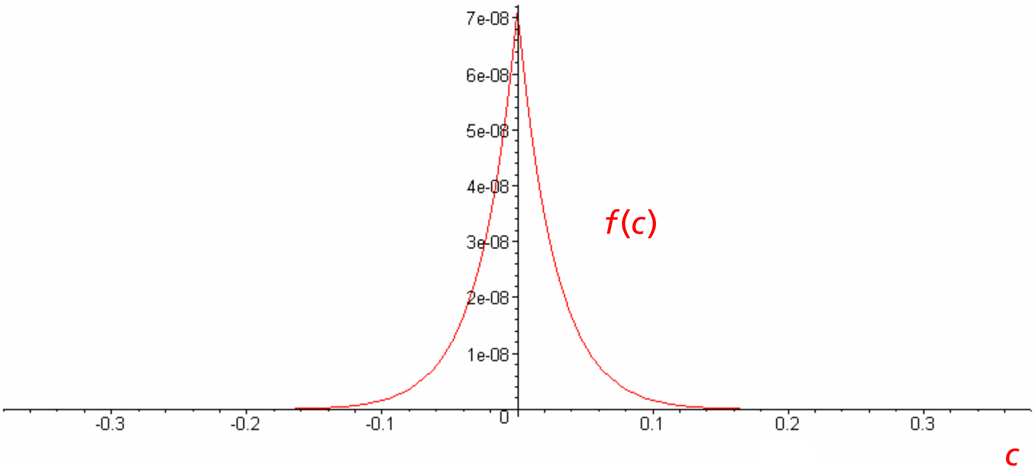

Fig. 2

Herleitung:

1. Approximation von $f(x) = \cos\left(\frac{\arccos(x)}{3}\right)$, $0 \le x \le 1$ über die Näherungen

$\cos(y) \approx 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} = x$ mit $y = \sqrt{6 - 2\sqrt{3+6x}}$, woraus

$\cos\left(\frac{\arccos(x)}{3}\right) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{y}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}\cdot\left(56 + x + 8\sqrt{3+6x}\right) =: g(x)$ folgt.

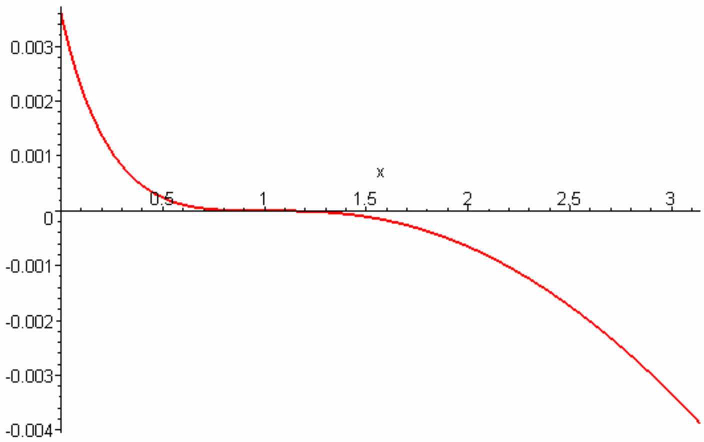

Fig.3: Plot von $f(x) - g(x)$, $0 \le x \le \pi$

2. Approximation von $f(x) = x^3 - bx - c$ in der Nähe von x_0 durch eine Parabel

$g(x) = Ax^2 + Bx + C$ mit den Randbedingungen $y(x_0) = f(x_0)$, $y'(x_0) = f'(x_0)$ und $y''(x_0) = f''(x_0)$ mit der Lösung $A = 3x_0$, $B = -3x_0^2 - b$ und $C = x_0^3 - c$. Hieraus folgt der angegebene Ausdruck für x_1.

Literatur

R. Schurig (1895): Katechismus der Algebra (4. Aufl.). Leipzig, Verlagsbuchhandlung von J.J. Weber.