Eine elementare Näherungskonstruktion des regelmäßigen Neunecks mit Zirkel und Lineal

Dietmar Pfeifer
Institute of Mathematics, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, D-26111 Oldenburg, Germany (2024)

Abstract

In this note we present a simple elementary approximate construction of the regular nonagon with ruler and compass. The underlying idea goes back to my paper „On an elementary approximate construction of the regular heptagon with ruler and compass“.

Keywords: regular nonagon, constructions with ruler and compass

MSC: 01A40

1. Einleitung

Näherungskonstruktionen regelmäßiger Vielecke sind schon seit der Antike bekannt. Exakte Konstruktionen regelmäßiger n-Ecke sind aber nur dann möglich, wenn, wie schon Gauß zeigte, n die Form $n = 2^{m-1} \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ besitzt, wobei $m,k \in \mathbb{N}$ und die p_i paarweise verschiedene Primzahlen der Form $p_i = 2^j + 1$ sind, vgl. Scriba und Schreiber (2010), S. 405. Grundsätzlich sind die „Ecken“ regelmäßiger n-Ecke in der komplexen Ebene Lösungen der so genannten Kreisteilungsgleichung

$$(x-1)\cdot\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1\right) = x^n - 1 = 0.$$

In der Arbeit „On an elementary approximate construction of the regular heptagon with ruler and compass“ (Pfeifer (2024)) wurde gezeigt, dass eine approximativen Lösung dieser Gleichung für $n = 7$ gegeben ist durch

$$x_0 = -\frac{2}{9} + \frac{i}{9}\sqrt{77}$$

mit der Fehlerabschätzung

$$x_0^7 = \left(-\frac{2}{9} + \frac{i}{9}\sqrt{77}\right)^7 = \frac{4.782.958}{4.782.969} - \frac{1.169}{4.782.969}\sqrt{77}i$$

$$= 0{,}999997\ldots - 0{,}002144\ldots i$$

Im Falle $n = 9$ ist eine approximative Lösung gegeben durch

$$x_0 = \frac{36}{47} + \frac{1}{47}\sqrt{913}\,i$$

(erste „Ecke" entgegen dem Uhrzeigersinn) mit der Fehlerabschätzung

$$x_0^9 = \left(\frac{36}{47} + \frac{1}{47}\sqrt{913}\,i\right)^9 = \frac{1.119.129.642.999.108}{1.119.130.473.102.767} + \frac{45.111.373.825}{1.119.130.473.102.767}\sqrt{913}\,i$$

$$= 0{,}999999258\ldots + 0{,}001217981\ldots i$$

Die nachfolgende Grafik zeigt die geometrische Konstruktion:

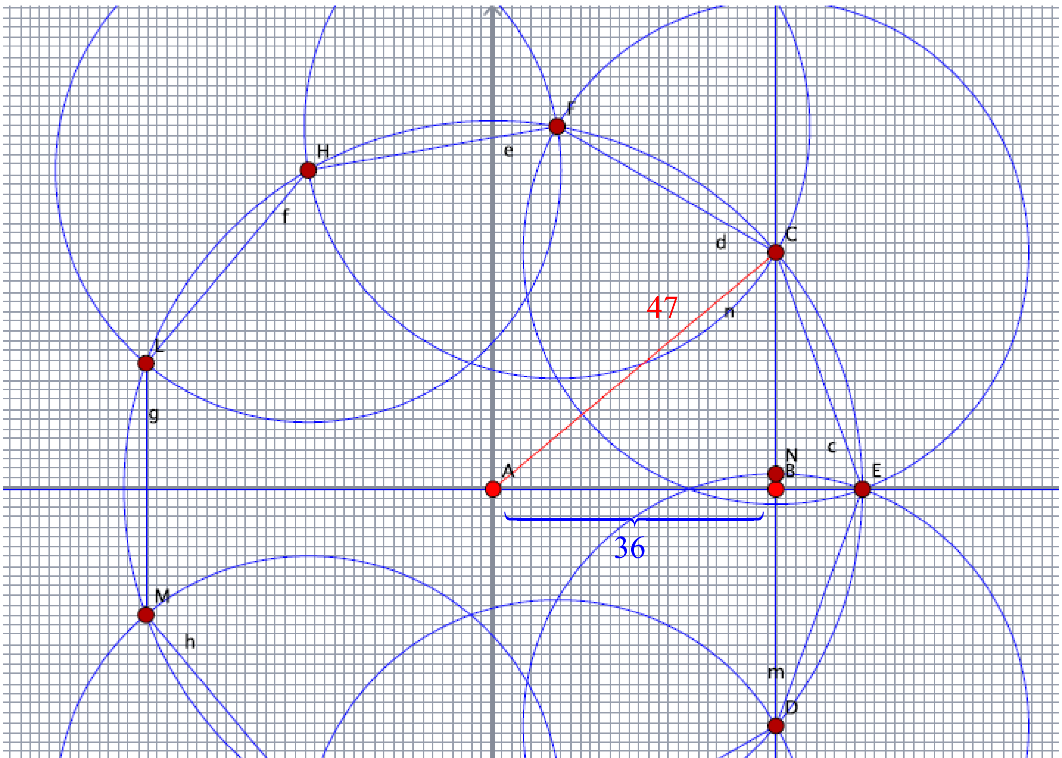

Fig. 1

Für die sich hieraus ergebende Sehnenlänge $\hat{L}$ für das approximative Neuneck erhält man demnach $\hat{L} = \frac{\sqrt{1.034}}{47} = 0{,}684167...$, die exakte Sehnenlänge L beträgt dagegen $L = 2\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = 0{,}684040...$. Der relative Fehler beträgt also $0{,}0859...\%$.

Zur Verdeutlichung der Güte der Approximation: hätte der obige Kreis einen Radius von 47 m, würde sich die approximative von der exakten Sehnenlänge nur um ca. 6 mm unterscheiden!

Eine signifikante Verbesserung der Konstruktion erhält man auf folgende Weise: mit der Substitution $z = x + \frac{1}{x}$ geht der zweite Faktor der obigen Kreisteilungsgleichung über in

$$z^4 + z^3 - 2z^2 - 2z + 1 = (z+1)\cdot\left(z^3 - 3z + 1\right)$$

Man beachte, dass $z_0 := \frac{72}{47}$ eine sehr gute Lösung der Gleichung $f(z) := z^3 - 3z + 1 = 0$ ist mit $z_0^3 - 3z_0 + 1 = -0{,}0007031...$ Sie ist sogar die beste rationale Approximation mit einem Nenner zwischen 1 und 100! Setzt man jetzt $z_1 := z_0 + h$ für z in die letzte Gleichung ein und eliminiert den Term h^3 (vgl. Pfeifer (2024)), so ergibt sich aus der resultierenden quadratischen Gleichung

$$h = -\frac{2.975}{6.768} \pm \frac{\sqrt{8.857.633}}{6.768} \text{ bzw. } z_1 = z_0 - \frac{2975}{6768} \pm \frac{\sqrt{8857633}}{6768}$$

Wählt man nun $z_1 = z_0 - \frac{2.975}{6.768} + \frac{\sqrt{8.857.633}}{6.768}$, so erhält man $f\left(z_1\right) = 0{,}5272 \cdot 10^{-11}$.

Löst man schließlich noch $z_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}$ nach x_1 auf, ergibt sich

$$x_1 = \frac{7.393}{13.536} + \frac{\sqrt{8.857.633}}{13.536} \pm \frac{i}{13.536}\sqrt{119.709.214 - 14.786\sqrt{8.857.633}}$$

$$= 0{,}76604444... - 0{,}64278760...i$$

mit $x_1^9 = 1{,}00000000... \text{-} 0{,}91236215... \cdot 10^{-11}\, i$.

Man beachte, dass die Primfaktorzerlegung von $8.857.633$ gegeben ist durch

$$8.857.633 = 941 \cdot 9.413,$$

wodurch eine alternative, verbesserte Konstruktion mit Zirkel und Lineal unter Verwendung des pythagoräischen Höhensatzes möglich ist. Die folgende Graphik zeigt die entsprechende Konstruktion:

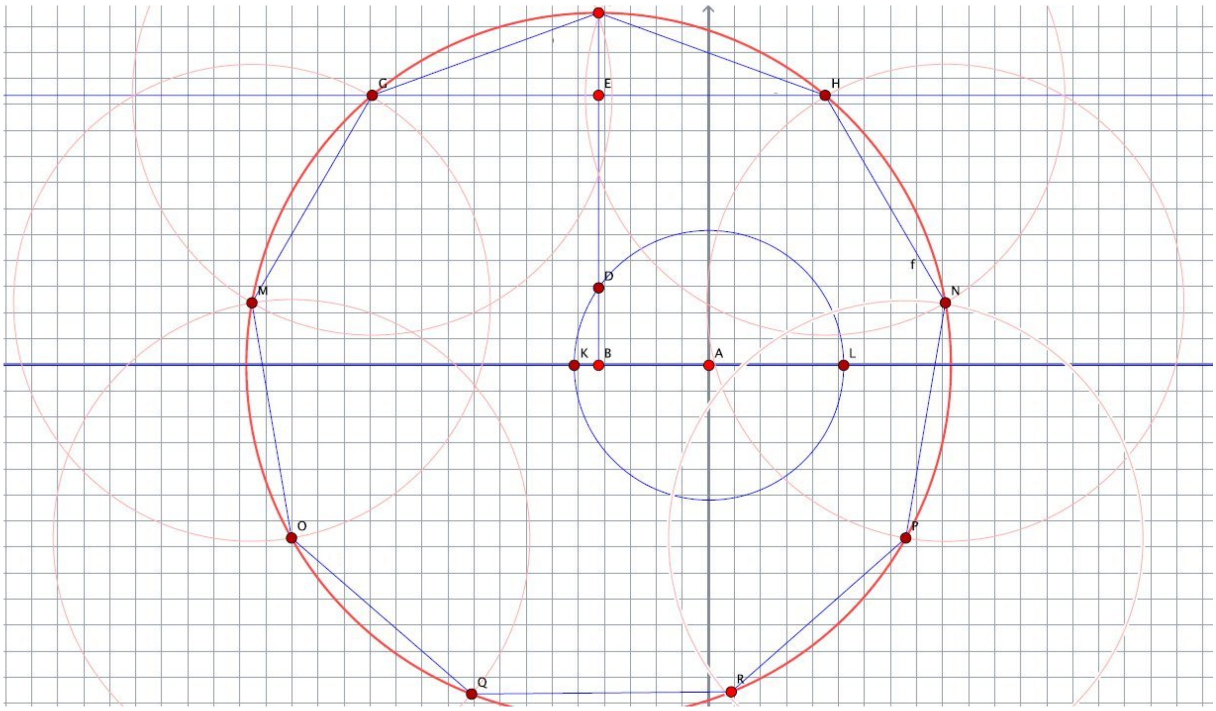

Fig. 2

Hierbei gilt für die einzelnen Streckenlängen:

$$\overline{AL} = 5177 = \frac{941 + 9413}{2},\ \overline{BL} = 9413,\ \overline{KB} = 941,$$
$$\overline{BD} = \sqrt{941 \cdot 9413},\ \overline{BE} = \overline{BD} + 7393$$

Der Radius des Kreises um den Punkt B beträgt hier 13.536 zeichnerische Einheiten. Die Kantenlänge eines der graphischen Kästchen in Fig. 2 entspricht somit 1.000 zeichnerischen Einheiten.

Für die sich hieraus ergebende Sehnenlänge $\hat{L}$ für das approximative Neuneck erhält man demnach mit $a = \frac{7.393}{13.536} + \frac{\sqrt{8.857.633}}{13.536}$ das Ergebnis $\hat{L} = \sqrt{(1-a)^2 + 1 - a^2} = 0{,}684040286650\ldots$, die exakte Sehnenlänge L beträgt dagegen $L = 2\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = 0{,}684040286651\ldots$. Der relative Fehler beträgt also nur noch $0{,}13924 \cdot 10^{-9}\,\%$.
Zur Verdeutlichung der Güte der Approximation: hätte der obige Kreis einen Radius von 13.536 km, würde sich die approximative von der exakten Sehnenlänge um weniger als 0,02 mm unterscheiden!

Literatur

D. Pfeifer: On an elementary approximate construction of the regular heptagon with ruler and compass. Fundamental Journal of Mathematics and Mathematical Sciences (2024), Vol. 18, Issue 2, 87-93.

C.J.Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. 3. Aufl. 2010, Springer, Heidelberg.