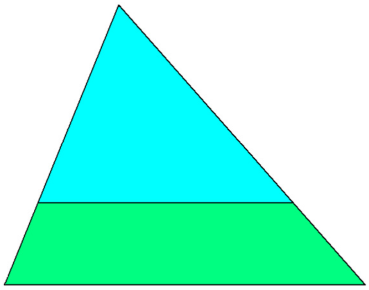
Unterhaltsame alte und neue mathematische Probleme

Dietmar Pfeifer
Institut für Mathematik
Fakultät V
Carl-von-Ossietzky Universität Oldenburg

November 2025

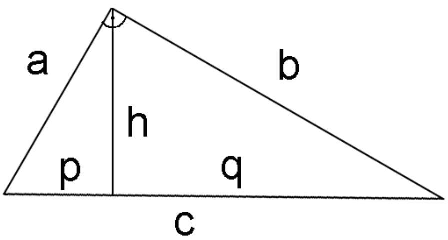
Abstract. In dieser Arbeit stellen wir einige alte und neue mathematische Probleme und ihre Lösungen vor.

1. Problem. Ein Dreieck soll mit einem waagerechten Schnitt in zwei flächengleiche Teile zerlegt werden. Wo muss der Schnitt angesetzt werden?



2. Problem. Ein Zug fährt mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von 72 km/h über eine 400 Meter lange Stahlbrücke. Man hört 25 Sekunden lang ein Fahrgeräusch. Wie lang ist der Zug?

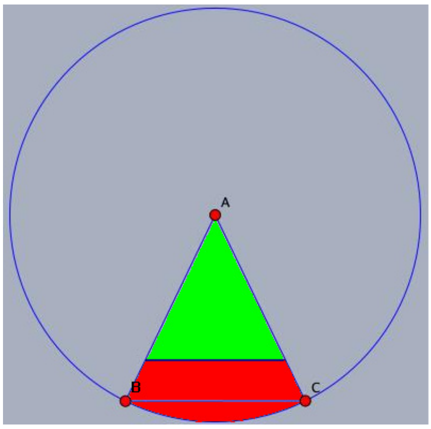
3. Problem. Für ein rechtwinkliges Dreieck seien gegeben: die Größen a und q. Man bestimme hieraus die anderen Größen b,c,p,h.



Konkret: $a = 3,\ q = 3{,}2.$

D. Pfeifer (✉)
Institut für Mathematik, Schwerpunkt Versicherungs- und Finanzmathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Oldenburg, Deutschland
E-Mail: dietmar.pfeifer@uni-oldenburg.de

4. Problem. Für eine Geburtstagsfeier hat die Gastgeberin eine kreisrunde Torte gebacken. Es kommen n Gäste, der Hausherr teilt die Torte mit einem Messer sternförmig in n gleiche Teile. Enkel Luis möchte das halbe Stück von Oma Lisa haben. Wie muss der in der folgende Grafik gezeigte Schnitt angesetzt werden, damit die grüne und rote Fläche gleich groß sind?

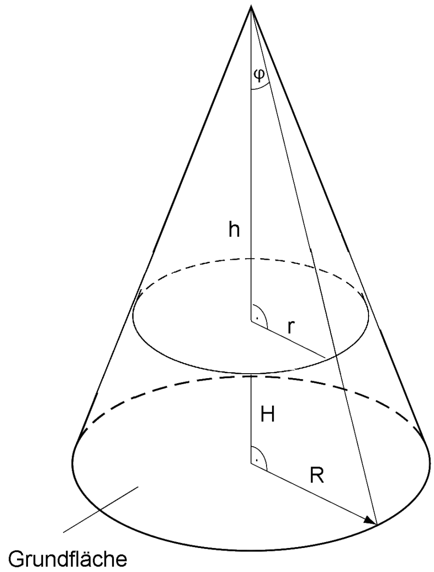


5. Problem. Eine rechteckige Tafel Schokolade vom Format $m \times n$ soll nacheinander entlang der Kanten so zerbrochen werden, dass alle Stücke einzeln übrig bleiben. Wie viele Brechungen sind erforderlich?

Beispielformat 3×10 Stücke

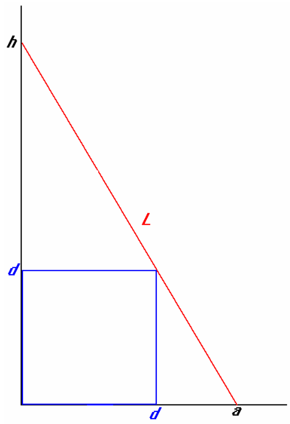
6. Problem. Wo stehen die Zeiger einer Uhr, wenn Minuten- und Stundenzeiger auf einer gedachten durchgehenden Linie liegen?

7. Problem. In dem berühmten Sketch von Loriot streiten zwei Urlaubsbekannte um den „Kosakenzipfel". Dieser soll gerecht zwischen beiden aufgeteilt werden. Zur Vereinfachung stellen wir uns den Kosakenzipfel als einen symmetrischen Kreiskegel vor. Wo muss der waagerechte Schnitt angesetzt werden, damit die beiden entstehenden Volumina gleich groß sind?

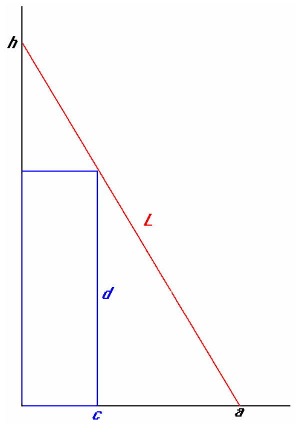


8. Problem. Für welche Zahl t gilt: $2^t = t^{4096}$?

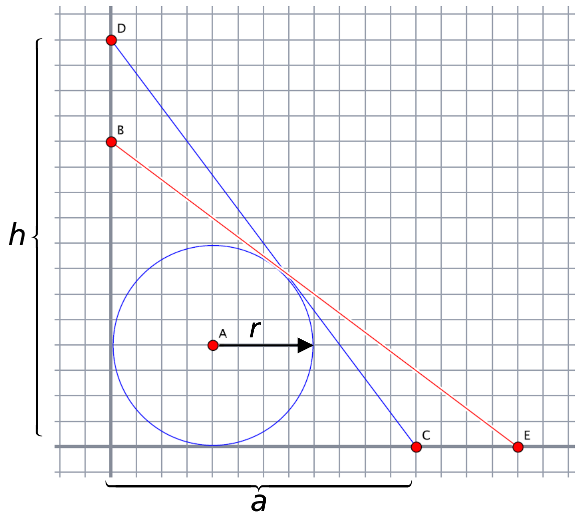
9. Problem. Eine Leiter der Länge L wird im Abstand von a an eine Hauswand angelehnt, und zwar so, dass sie einen Würfel der Kantenlänge d berührt. Wie groß ist h?



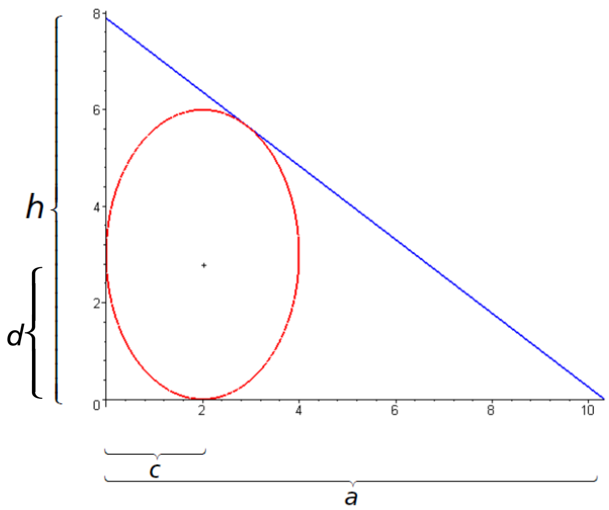
2. Variante: Welche Lösung ergibt sich, wenn der Würfel durch eine Kiste mit der Tiefe c und der Höhe d ersetzt wird?



3. Variante: Welche Lösung ergibt sich, wenn der Würfel durch eine Röhre mit dem Radius r ersetzt wird?

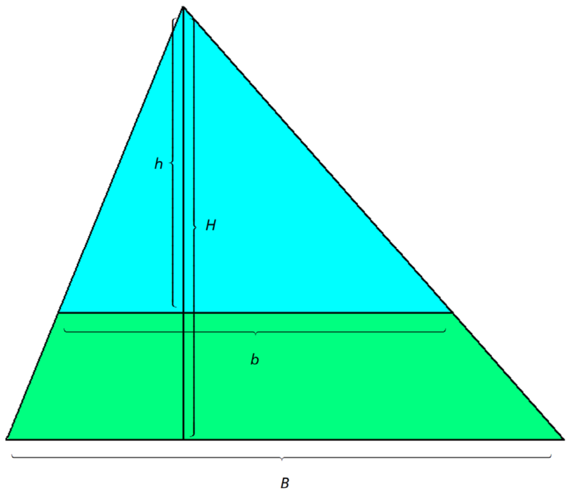


4. Variante: Desgleichen, wenn die Röhre einen elliptischen Querschnitt besitzt?



Lösungen:

1. Problem.



Die gesuchte Höhe bezeichnen wir mit h. Dann ist $h = \alpha H,\ 0 < \alpha < 1$. Nach dem Strahlensatz gilt entsprechend für die Breiten $b = \alpha B$. Für die Fläche F des großen Dreiecks erhalten wir $F = \frac{HB}{2}$, für die Fläche f des kleinen Dreiecks $f = \frac{hb}{2} = \alpha^2 \frac{HB}{2} = \frac{F}{2} = \frac{HB}{4}$, also $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. Problem. Die Geschwindigkeit von 72 km/h entspricht 20 m/sec. Die Spitze des Zuges hat die Brücke also nach 20 sec durchfahren. In den restlichen 5 sec legt der Zug noch 100 m zurück, das entspricht genau der Länge des Zuges.

3. Problem. Zunächst gilt: $p = \frac{a^2}{c},\ q = \frac{b^2}{c}$. Beweis: die Fläche F des Dreiecks ist gegeben durch $F = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$, also $h = \frac{ab}{c}$. Nach dem Satz von Pythagoras ist $p^2 = a^2 - h^2 = a^2 - \frac{a^2b^2}{c^2} = \frac{a^2c^2 - a^2b^2}{c^2} = a^2\frac{c^2 - b^2}{c^2} = \frac{a^4}{c^2}$, also $p = \frac{a^2}{c}$, analog für q.

Ferner gilt: $p = \frac{a^2}{c} = c - q$, also $a^2 = c^2 - qc = \left(c - \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4}$, d.h. $c = \frac{q}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{q^2}{4}}$. Daraus folgt dann $p = c - q,\ b = \sqrt{c^2 - a^2},\ h = \frac{ab}{c}$.

Konkret gilt hier:
$c = 1{,}6 + \sqrt{9 + 1{,}6^2} = 1{,}6 + 3{,}4 = 5,\ p = 1{,}8,\ b = \sqrt{25 - 9} = 4,\ h = \frac{12}{5} = 2{,}4.$

Alternative einfachere Lösung: $h^2 = b^2 - q^2 = c^2 - a^2 - q^2 = a^2 - (c - q)^2$, woraus wieder folgt $a^2 = c^2 - qc = \left(c - \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4}$, wie oben.

4. Problem. Der Radius R der Torte entspricht der Länge der Strecke $\overline{AB}$. Die Fläche G des Tortenstücks ist daher gegeben durch $G = \frac{\pi R^2}{n}$. Der Winkel α ist gegeben durch $\alpha = \frac{\pi}{n}$ im Bogenmaß. Die grün markierte Fläche g lässt sich wie folgt berechnen: $g = r^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{r^2}{2}\sin(2\alpha)$, wobei r die Länge der Strecke $\overline{AD}$ bezeichnet. Aus $G = 2g$ folgt somit $r = R \cdot \sqrt{\frac{\pi}{n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}$ mit

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{\frac{\pi}{n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ wie bei Problem 1, weil der Kreisabschnitt im unteren Teil der Torte mit wachsendem n immer kleiner wird. Für genügend große n kann daher approximativ $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ gewählt werden. Die folgende Tabelle zeigt die Unterschiede für einige Werte von n an:

n	6	12	24	36
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,7071067812	0,7071067812	0,7071067812	0,7071067812
$\sqrt{\frac{\pi}{n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}$	0,7775601509	0,7236012548	0,7111663520	0,7089058676

5. Problem. Bei jeder Brechung entsteht ein weiteres neues rechteckiges Stück (Rest-) Schokolade. Nach der ersten Brechung hat man zwei Reststücke, nach der zweiten Brechung drei Reststücke, ..., nach der $m \times n - 1$ ten Brechung hat man $m \times n$ Stücke. Damit ist die Schokolade komplett zerlegt. Man benötigt also genau $m \times n - 1$ Brechungen, egal, in welcher Reihenfolge man vorgeht.

6. Problem. Der Minutenzeiger bewegt sich innerhalb von x Minuten um einen Winkel von $(6x)^\circ$. Der Stundenzeiger bewegt sich innerhalb von x Minuten um einen Winkel von $\left(\frac{x}{2}\right)^\circ$. Die Zeiger liegen also, ausgehend von 0 Uhr, übereinander oder im 180°-Winkel zueinander, wenn $6x - \frac{x}{2} = \frac{11}{2}x = k \cdot 180$ gilt, für k gerade, wenn die Zeiger übereinander liegen, für k ungerade, wenn sie im 180°-Winkel zueinander liegen. Daraus folgt: $x = \frac{360}{11}k$, und das ist ganzzahlig nur der Fall, wenn k durch 11 teilbar ist. Für $k = 22n$ mit ganzzahligem $n \geq 0$ ergibt sich $x = 720n$ (Minuten ab 0 Uhr) oder umgerechnet als Uhrzeit: $\frac{720}{60}n = 12n$ (Uhr). Dann liegen die Zeiger genau übereinander, also im natürlichen Tagesrhythmus um 0 Uhr, um 12 Uhr und um 24 Uhr. Für $k = 11(2n+1)$ mit ganzzahligem $n \geq 0$ ergibt sich $x = 360(2n+1)$ (Minuten ab 0 Uhr), oder umgerechnet als Uhrzeit: $\frac{360}{60} \cdot (2n+1) = 6 \cdot (2n+1)$ (Uhr). Dann bilden die Zeiger einen 180°-Winkel, also im natürlichen Tagesrhythmus um 6 Uhr und um 18 Uhr. Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse für fortlaufende Werte von k:

k	0	1	2	3	4	5
Position	0°	180°	0°	180°	0°	180°
x (als Uhrzeit)	0:00	0:32…	1:05…	1:38…	2:10…	2:43…

k	6	7	8	9	10	11
Position	0°	180°	0°	180°	0°	180°
x (als Uhrzeit)	3:16…	3:49…	4:21…	4:54…	5:27…	6:00

k	12	13	14	15	16	17
Position	0°	180°	0°	180°	0°	180°
x (als Uhrzeit)	6:32…	7:05…	7:38…	8:10…	8:43…	9:16…

k	18	19	20	21	22
Position	0°	180°	0°	180°	0°
x (als Uhrzeit)	9:49…	10:21…	10:54…	11:27…	12:00 $\triangleq$ 0:00

7. Problem. Das Volumen V des Kosakenzipfels beträgt $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$, das Volumen v des oberen abgetrennten Teils $v = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Wenn wir annehmen, dass $h = \alpha H$ ist mit $0 < \alpha < 1$, so ist gemäß des Strahlensatzes auch $r = \alpha R$. Aus $\frac{\pi R^2 H}{3} = V = 2v = 2\alpha^3 \frac{\pi R^2 H}{3}$ folgt $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0{,}7937$.

8. Problem. Ansatz: t muss notwendigerweise eine Zweierpotenz sein, etwa $t = 2^k$. Dann haben wir: $2^{\left(2^k\right)} = 2^{4096 \cdot k}$, also $2^k = 4096 \cdot k = 2^{12} \cdot k$. Demnach ist auch k eine Zweierpotenz, etwa $k = 2^s$. Dann haben wir: $2^k = 2^{12+s}$ oder $2^s = 12 + s$. Es gilt:

s	1	2	3	4	5
2^s	2	4	8	16	32
$12+s$	13	14	15	16	17

Es folgt: $s = 4$ und damit $k = 2^4 = 16$, also $t = 2^k = 65536$ mit $2^t \approx 2 \cdot 10^{19728}$.

Allgemeiner gilt: für $t = 2^{(2^y)}$ ist $2^t = t^{(2^k)}$ mit $k = 2^y - y$, denn $2^k = 2^{(2^y)-y}$ mit $t^{(2^k)} = 2^{(2^y)\cdot 2^k} = 2^{(2^{y+k})} = 2^{\left(2^{2^y}\right)} = 2^t$.

9. Problem. Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{a-d}{d} = \frac{a}{h}, \text{ also}$$

$$ah - dh = ad \text{ oder } ah = ad + dh = (a+h)d. \qquad (*)$$

Setzen wir $x = a + h$, so ergibt sich weiter mit dem Satz des Pythagoras

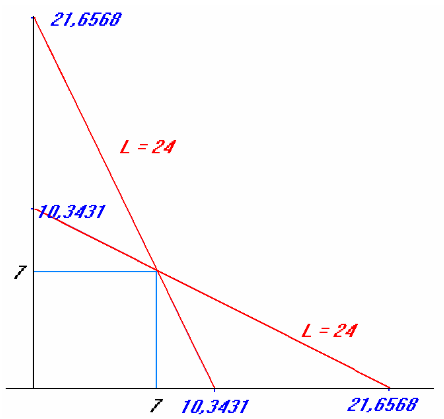
$L^2 = a^2 + h^2 = (a+h)^2 - 2ah = x^2 - 2dx$ und somit $(x-d)^2 = L^2 + d^2$ oder $x = d + \sqrt{L^2 + d^2}$ wegen (siehe Skizze) $x = a + h > d$.

Des Weiteren gilt $a^2 - ax = a^2 - a(a+h) = -ah = -dx$ nach (*), so dass sich hieraus

$\left(a - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - dx$ ergibt bzw. $a = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - dx}$ und somit final $h = x - a = \frac{x}{2} \mp \sqrt{\frac{x^2}{4} - dx}$.

Anmerkung: es existieren immer zwei Lösungen, außer, wenn $x = 4d$ oder $L = 2\sqrt{2}d$ ist. Hier ist dann auch $h = a = 2d$. Keine Lösung existiert demnach, wenn $L < 2\sqrt{2}d$ ist!

Beispiel: $L = 24, d = 7$. Dann ist $x = d + \sqrt{L^2 + d^2} = 32$ und somit $h = 16 \mp \sqrt{256 - 224} = 16 \mp 4\sqrt{2} \in \{10{,}3431...;21{,}6568...\}$



Bemerkung: h bzw. a sind auch Lösung der biquadratischen Gleichung
$z^4 - 2dz^3 + (2d^2 - L^2)z^2 + 2dL^2z - d^2L^2 = 0,$

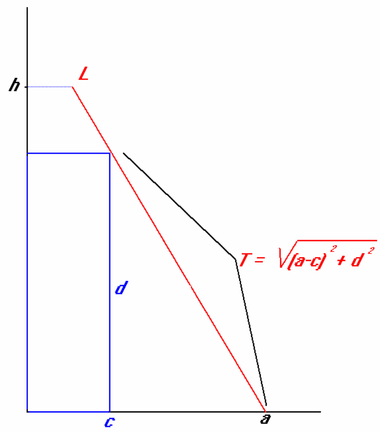
denn aus (*) ergibt sich auch $h = \frac{ad}{a-d}$ und somit $L^2 = a^2 + h^2 = a^2 + \frac{a^2d^2}{(a-d)^2}$ oder $a^2(a-d)^2 + a^2d^2 - L^2(a-d)^2 = 0$, was der obigen Gleichung für $z = a$ entspricht.

2. Variante. Wird der Würfel durch eine Kiste mit der Tiefe c und der Höhe d ersetzt, sind die Lösungen analog gegeben durch die biquadratische Gleichung

$z^4 - 2cz^3 + (c^2 + d^2 - L^2)z^2 + 2cL^2z - c^2L^2 = 0.$
Eine vereinfachte explizite Lösung wie oben ist wohl nicht möglich.

Beispiel: $L = 24, c = 6, \ d = 8.$ Hier ergibt sich zum Ersten die Lösung $a = 9{,}4094...$ und $h = \sqrt{L^2 - a^2} = 22{,}0785...$ sowie zum zweiten die Lösung $a = 21{,}2544...$ und $h = \sqrt{L^2 - a^2} = 11{,}1466...$

Alternativer Lösungsansatz:



Wir betrachten eine Leiter, die zunächst beliebig gegen die Kiste gelehnt ist sowie eine Gerade $\mathbf{p}$ in parametrischer Form durch die Punkte $(a,0)$ und (c,d): $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) + t \cdot \mathbf{q}$ mit $\mathbf{p}(0) = (a,0)$ und $\mathbf{p}(\mathrm{T}) = (c,d)$. Hieraus folgt $\mathbf{q} = \left(\frac{c-a}{T}, \frac{d}{T} \right)$. Der obere Endpunkt der Leiter hat somit die Koordinaten $\mathbf{p}(\mathrm{L}) = \mathbf{p}(0) + L \cdot \mathbf{q} = \left(a - \frac{L}{T}(a-c), \frac{L}{T} d \right)$. Damit die Leiter die Wand berührt, muss also $a - \frac{L}{T}(a-c) = 0$ gelten bzw. $aT = (a-c)L$. Setzen wir $x = a - c$, erhalten wir hieraus nach Quadrierung die Gleichung

$$(x+c)^2 \cdot \left(x^2+d^2\right) = x^2L^2 \text{ bzw. } x^4+2cx^3+\left(c^2+d^2-L^2\right)x^2+2cd^2x+c^2d^2=0.$$

Mit den obigen Wahlen $L=24, c=6, d=8$ ergibt sich zum Ersten numerisch $x=3{,}4094...$ bzw. $a=x+c=9{,}4094...$ und $h=\frac{L}{T}d=22{,}0785...$, zum Zweiten $x=15{,}2544...$ bzw. $a=x+c=21{,}2544...$ und $h=\sqrt{L^2-a^2}=11{,}1466...$

Anmerkung: Für $c \neq d$ ist die allgemeine Lösung offensichtlich nicht symmetrisch in a und h!

Bemerkung: Das oben behandelte, so gennante „Leiterproblem“ ist historisch alt, wie der Artikel THE "LADDER AND BOX" PROBLEM FROM CURVES TO CALCULATORS von Bagget und Ehrenfeucht (2012) zeigt, wo die Lösung des allgemeinen Falls über eine biquadratische Gleichung allerdings nur angedeutet wird.

History and Pedagogy of Mathematics 2012
16 July – 20 July, 2012, DCC, Daejeon, Korea.
Oral Presentation

**THE "LADDER AND BOX" PROBLEM
FROM CURVES TO CALCULATORS**

Patricia BAGGETT*, Andrzej EHRENFEUCHT**

* Dept. of Mathematical Sciences, New Mexico State University, P.O. Box 30001, Las Cruces, NM 88003-8001, USA, baggett@nmsu.edu
** Computer Science Department, University of Colorado, P.O. Box 430, Boulder, CO 80309-0430, USA, andrzej.ehrenfeucht@colorado.edu

3\. Variante. Die Geradengleichung für die Leiter ist $y=h-\frac{hx}{a}$, die Kreisgleichung ist $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$. Setzt man hier für y die obige Gleichung ein, ergeben sich die zwei Lösungen für x zu

$$x=\frac{a}{2\left(a^2+h^2\right)}\left(2h^2+2ra-2rh\pm 2\sqrt{2rah^2-2ahr^2+2hra^2-a^2h^2}\right).$$

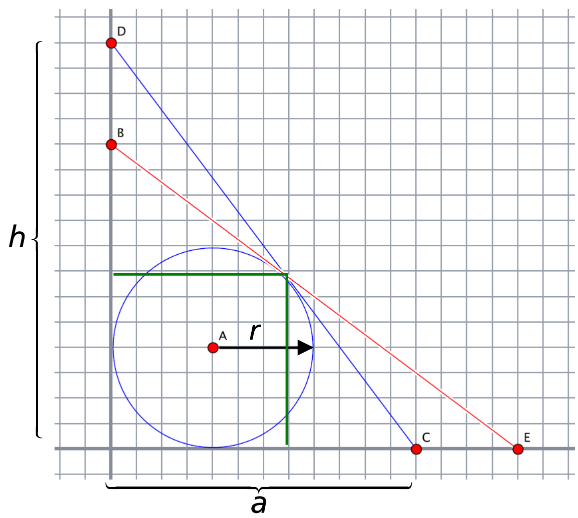
Eine eindeutige Lösung (Tangente) ergibt sich also nur für

$2rah^2-2ahr^2+2hra^2-a^2h^2=0$ mit der nicht-trivialen Lösung $h=2r\frac{a-r}{a-2r}$. Aus der weiteren Bedingung $a^2=L^2-h^2$ ergeben sich vier Lösungen, von denen aber nur die folgenden beiden sinnvoll sind:

$a_{1,2} = r + \frac{L}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - 4rL - 4r^2}$. Für die Höhe h ergibt sich der jeweilige komplementäre Wert: $h_{1,2} = a_{2,1}$.

Beispiel: $r = 2,\ L = 10$. Es folgt $a_{1,2} = 7 \pm 1$, wie in der obigen Grafik dargestellt. Eine eindeutige Lösung ergibt sich für den Fall $L^2 - 4rL - 4r^2 = 0$, d.h. $L = 2\sqrt{2}r$. Für $L < 2\sqrt{2}r$ ist keine Lösung möglich, d.h. die Leiter kann die Wand nicht berühren, für $L > 2\sqrt{2}r$ ergeben sich zwei (symmetrische) Lösungen.

Beziehung zur Ausgangsvariante: Ersetzt man die Röhre durch einen maximal einbeschriebenen Würfel,



So hat dieser die Kantenlänge $d = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)r$ bzw. es ist $r = \left(2 - \sqrt{2}\right)d$. Nach Variante 3 erhalten wir mit $L = 24$ die Näherungslösung:

$a_{1,2} = r + \frac{L}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - 4rL - 4r^2} \in \{10{,}736...,\ 21{,}464...\}$ im Vergleich zur exakten Lösung $a = 16 \mp \sqrt{256 - 224} = 16 \mp 4\sqrt{2} \in \{10{,}3431...; 21{,}6568...\}$.

4. Variante. Die Geradengleichung für die Leiter ist wieder $y = h - \frac{hx}{a}$, die Ellipsengleichung ist $\frac{(x-c)^2}{c^2} + \frac{(y-d)^2}{d^2} = 1$. Setzt man hier für y die obige Gleichung ein, ergeben sich die zwei Lösungen für x zu

$$x = \frac{ac}{2\left(a^2d^2 + c^2h^2\right)}\left(2ch^2 + 2ad^2 - 2cdh \pm 2\sqrt{2acd^2h^2 - 2acd^3h + 2a^2d^3h - a^2d^2h^2}\right).$$

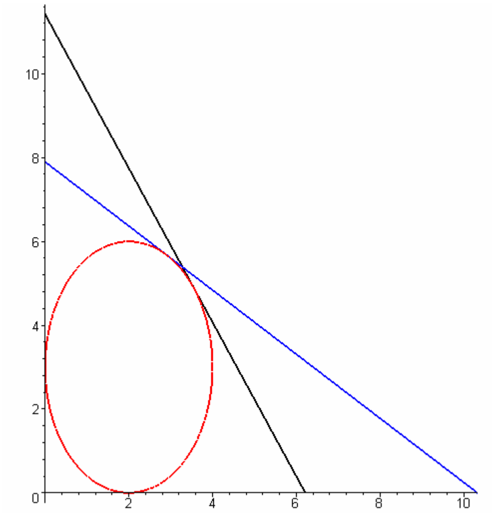
Eine eindeutige Lösung (Tangente) ergibt sich also nur für

$2acd^2h^2 - 2acd^3h + 2a^2d^3h - a^2d^2h^2 = 0$ mit der nicht-trivialen Lösung

$h = 2d\dfrac{a-c}{a-2c}$. Aus der weiteren Bedingung $a^2 = L^2 - h^2$ ergibt sich folgende biquadratische Gleichung (mit z für a):

$$z^4 - 4cz^3 + \left(4c^2 + 4d^2 - L^2\right)z^2 + 4c\left(L^2 - 2d^2\right)z - 4c^2\left(L^2 - d^2\right),$$

die wie in Variante 2 nicht elementar lösbar ist. In dem obigen Beispiel ist $c = 2$, $d = 3$ und $L = 13$ mit den Lösungen der biquadratischen Gleichung $z \in \{-11{,}8949\ldots, 3{,}3534\ldots, 6{,}2147\ldots, 10{,}3267\ldots\}$. Die oben grafisch dargestellte Lösung entspricht also $a = 10{,}3267\ldots$ mit $h = \sqrt{L^2 - a^2} = 7{,}8967\ldots$, eine weitere Lösung wäre $a = 6{,}2147\ldots$ mit $h = \sqrt{L^2 - a^2} = 11{,}4182\ldots$ (unten dargestellt in schwarz).



Danksagung. Ein besonderer Dank für konstruktive Anregungen und Hinweise gehen an Klaus Depping, Jever und Roland Voggenauer, Zürich.