

Anmerkungen zur stochastischen (Un)abhängigkeit von Ereignissen

Dietmar Pfeifer
Institut für Mathematik
Fakultät V
Carl-von-Ossietzky Universität Oldenburg

August 2026

Der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit ist zentral in Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (Gesetze großer Zahlen, Zentraler Grenzwertsatz, Maximum-Likelihood-Verfahren u.a.). Er wird auch schon in der gymnasialen Oberstufe besprochen (vgl. [1], Kapitel 10. oder [4], Kapitel H 3.4). Leider wird hier oft stochastische Abhängigkeit mit Kausalität bzw. stochastische Unabhängigkeit mit dem Fehlen derselben („ohne gegenseitige Beeinflussung“) in Verbindung gebracht, obwohl es sich hier lediglich um eine *Informationsunabhängigkeit* handelt.

Formal betrachten wir im Folgenden einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit einer nicht-leeren Grundmenge Ω , einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ über Ω und einem Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathcal{A}$ (vgl. [2], Kapitel 2.1 oder [3], Kapitel 10). Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen auch Ereignisse (über Ω). Die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$ mit einer nicht-leeren Indexmenge I kann auf verschiedene Weisen äquivalent charakterisiert werden, wir bevorzugen die folgende

Definition: Eine Familie $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$ von Ereignissen heißt stochastisch unabhängig (unter P), wenn gilt: $P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$ für alle endlichen Teilmengen $J \subseteq I$ (vgl. [2], Definition 2.2.11, [3], Satz 11.1.10 oder in einfacherer Form auch [1], Aufgabe 45, S. 163 und [4], Bemerkung (4), S.397).

Mit anderen Worten: Eine Familie $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$ von Ereignissen ist stochastisch unabhängig (unter P) genau dann, wenn jede endliche Teilfamilie dieser Ereignisse stochastisch unabhängig (unter P) ist.

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob nicht eventuell schon eine weniger starke Forderung äquivalent zur stochastischen Unabhängigkeit ist (jedenfalls für endliche Indexmengen I), z.B. paarweise stochastische Unabhängigkeit. Dies wurde jedoch schon von S. N. Bernstein durch ein schönes Gegenbeispiel widerlegt (ohne Quellenangabe zu finden in [1], Aufgabe 35, S. 162): Von den vier Flächen eines Tetraeders ist eine rot, die zweite grün und die dritte blau bemalt. Die vierte Fläche zeigt alle drei Farben. Das Tetraeder wird nun zufällig geworfen. R bedeute »Das Tetraeder fällt auf eine Fläche, die rote Farbe trägt«. Analog sind die Ereignisse B und G definiert. Die Ereignisse R , G und B sind (paarweise) stochastisch unabhängig, aber nicht insgesamt, wie man folgendermaßen sieht: aus der diskreten Gleichverteilungseigenschaft des Wurfexperiments folgt $P(R) = P(G) = P(B) = \frac{1}{2}$ (weil eine bestimmte Farbe sowohl bei einer Einzelfläche als auch bei der dreifach gefärbten

D. Pfeifer (✉)
Institut für Mathematik, Schwerpunkt Versicherungs- und Finanzmathematik, Carl von Ossietzky Universität
Oldenburg, Oldenburg, Deutschland
E-Mail: dietmar.pfeifer@uni-oldenburg.de

Fläche erscheinen kann, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$, also insgesamt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$) und somit $P(R \cap G) = P(R \cap B) = P(G \cap B) = \frac{1}{4}$ (die Schnittereignisse sind identisch mit dem Ereignis, dass das Tetraeder auf die dreifach gefärbte Fläche fällt). Sie sind aber nicht vollständig unabhängig, da aus dem gleichen Grund $P(R \cap G \cap B) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(R) \cdot P(G) \cdot P(B)$ gilt.

Etwas formeller kann dieser Effekt auch wie folgt eingesehen werden: es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$, P die diskrete Gleichverteilung über Ω sowie $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ und $C = \{1, 4\}$ (alternativ: $C = \{2, 3\}$). Dann sind A, B, C paarweise stochastisch unabhängig wegen $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,
 $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(C) = P(B) \cdot P(C)$, aber
 $\frac{1}{8} \neq P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$ bzw. $= 0$ (vgl. [3], Beispiel 11.1.9).

Etwas aufwändiger ist ein Beispiel für vier Ereignisse, die paarweise und als Tripel stochastisch unabhängig sind, aber nicht gemeinsam. Sei dazu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$, P die diskrete Gleichverteilung über Ω sowie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$, $C = \{1, 4, 5, 8\}$ und $D = \{1, 3, 6, 8\}$. Diese vier Ereignisse haben jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Ferner gilt $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \cap C = \{1, 4\}$, $A \cap D = \{1, 3\}$, $B \cap C = \{1, 5\}$, $B \cap D = \{1, 6\}$ und $C \cap D = \{1, 8\}$. Diese sechs Schnittmengen haben jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, d.h. die vier Ereignisse sind paarweise unabhängig. Des Weiteren ist $A \cap B \cap C = \{1\}$, $A \cap B \cap D = \{1\}$, $B \cap C \cap D = \{1\}$ und $A \cap C \cap D = \{1\}$. Diese Dreierschnitte haben jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$, das entspricht dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten der beteiligten Ereignisse. Es gilt hier lediglich $P(A \cap B \cap C \cap D) = P(\{1\}) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{16} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$, was die obige Behauptung bestätigt.

Literatur

- [1] F. Barth, R. Haller (1998): Stochastik Leistungskurs, 12. Auflage, Oldenbourg Verlag, München.
- [2] L. Rüschendorf (2016): Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer, Berlin.
- [3] K.D. Schmidt (2011): Maß und Wahrscheinlichkeit. 2. Auflage, Springer, Berlin.
- [4] K. Weber, W. Zillmer (Hrsg.) (2002): Mathematik Leistungskurs. Lehrbuch. PAETEC Verlag, Berlin.