STOCHASTISCHE METHODEN IN DER THEORIE DER HALBGRUPPEN LINEARER OPERATOREN

Dr. rer. nat. Dietmar Pfeifer

Stochastische Methoden in der Theorie der Halbgruppen linearer Operatoren

Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
genehmigte Habilitationsschrift zur Erlangung der venia legendi

vorgelegt von

Dr. rer. nat. Dietmar Pfeifer

aus Wuppertal

Referenten: Prof. Dr. P. L. Butzer
Prof. Dr. B. Rauhut

Tag der Habilitation: 9. Mai 1984

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Anwendung stochastischer Methoden in "klassischen" Teilgebieten der Mathematik wie auch der Physik ist nicht neu; dies zeigt beispielsweise die Entwicklung der Theorie der Brown'schen Bewegung durch Einstein, Wiener u. a. zu Beginn dieses Jahrhunderts (vgl. hierzu den Übersichtsartikel von Csörgö (1979)). Auch die u. a. von Heisenberg mitbegründete moderne Physik ist ohne den Wahrscheinlichkeitsbegriff undenkbar.

Während diese Theorien noch mehr oder weniger versuchten, mit stochastischen Hilfsmitteln konkrete physikalische Phänomene zu beschreiben oder zu erklären, benutzte erstmals der russische Mathematiker Sergej Bernstein (1912) einen stochastischen Kalkül - nämlich eine ursprünglich bis auf Bernoulli (1713) zurückgehende Version des Gesetzes der grossen Zahlen - zum Beweis des berühmten Weierstraß'schen Approximationssatzes (1885), der neben seiner Einfachheit zugleich ein konstruktives Verfahren mit Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit lieferte (Voronovskaja (1932), Bernstein (1932)). Anfang der fünfziger Jahre wurde Bernsteins Beweisidee durch Marcel Riesz in der Theorie der Halbgruppen linearer Operatoren wiederentdeckt (siehe dazu den in der Monographie von Hille und Phillips (1957) erwähnten Schriftwechsel), und zwar zunächst im Rahmen eines Alternativbeweises für einen der ersten fundamentalen Darstellungssätze dieser Theorie, Hilles "first exponential formula" (vgl. auch Hille (1948)). In direkter Analogie zu Bernstein veröffentlichte kurz darauf Kendall (1954) einen entsprechenden Darstellungssatz für stark stetige Operatorhalbgruppen. Die allgemeine Bedeutung der Stochastik für die Darstellungstheorie von Operatorhalbgruppen wurde zwar bereits von Hille und Phillips (1957) erkannt, die erste grundlegende Arbeit in dieser Richtung stammt jedoch von Chung (1962), wenn hier auch die erzielten Resultate nicht in der wünschenswerten größtmöglichen Allgemeinheit formuliert sind. Der von Chung eingeschlagene Weg wurde längere Zeit nicht weiterverfolgt; erst 1980 zeigten Butzer und Hahn, daß mit Hilfe stochastischer Methoden prinzipiell auch bereits früher aufgeworfene Fragen nach der Konvergenzgeschwindigkeit in den Darstellungssätzen behandelt werden können (vgl. etwa Butzer (1957), Hsu (1960), Ditzian (1969, 1970, 1971)). Die hier gewonnenen Ergebnisse sind jedoch aufgrund des speziellen stochastischen Kalküls nur auf Kontraktionshalbgruppen anwendbar und liefern auch nicht die bestmöglichen Konvergenzabschätzungen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun, einen einheitlichen, umfassenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Zugang zu den oben angesprochenen Themenkreisen zu schaffen, welcher insbesondere auf die bisher fast stets getroffene Unterscheidung in absolut-stetige und diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen zugunsten allgemeiner Wahrscheinlichkeitsmaße verzichtet (Pfeifer (1982)). Die ebenfalls sonst übliche Unterscheidung der Darstellungssätze in sogenannte Hauptsätze erster und zweiter Art (wobei letztere die Resolvente der Halbgruppe verwenden) erweist sich hier wiederum insofern als künstlich, als prinzipiell alle bisher in der Literatur angegebenen Darstellungssätze dieser Art aus einer einzigen, allgemeinen, auf einer Version des Gesetzes der großen Zahlen beruhenden Darstellung als Spezialfälle hervorgehen (vgl. dazu auch Pfeifer (1982, 1983 b)). Die Tatsache, daß bislang ausschließlich Darstellungssätze mit stochastischem Charakter gefunden wurden (davon einige mit rein analytischen Methoden), ist dabei insofern nicht verwunderlich, als unter bestimmten einfachen Bedingungen überhaupt nur solche stochastischen Darstellungen möglich sind (Pfeifer (1983 c)). Demgemäß erweist sich auch der stochastische Zugang in Fragen der Konvergenzgeschwindigkeit als der angemessenere, zumal hierbei keine der sonst manchmal gestellten Zusatzbedingungen wie z. B. gleichmäßige Normbeschränktheit der Halbgruppe, Lipschitz-Bedingungen o. ä. erforderlich sind. Die hier erstmals vorgestellten Methoden erübrigen nicht nur individuelle Abschätzungen in einzelnen Darstellungssätzen, sondern liefern darüberhinaus auch für den allgemeinen Fall scharfe Schranken.

Ebenfalls neu ist die Übertragung der von Bernstein (1932) entwickelten Methode zur Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit auf die Halbgruppentheorie, welche hier wiederum in der größtmöglichen Allgemeinheit erfolgt.

Die Arbeit gliedert sich inhaltlich in fünf Abschnitte. Im ersten Abschnitt werden die für das Verständnis der folgenden Abschnitte notwendigen stochastischen (I. 1) sowie funktionalanalytischen Grundlagen (I. 2) geschaffen. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit Abschätzungen von Momenten und momenterzeugenden Funktionen spezifischer, in den Darstellungssätzen verwendeter Typen von Zufallsvariablen; die hier gewonnenen Resultate erweisen sich als fundamental für die späteren Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit. Im dritten Abschnitt werden nach Diskussion verschiedener Meßbarkeits- und Existenzprobleme (III. 1) einige Versionen des allgemeinen wahrscheinlichkeitstheoretischen Darstellungssatzes vorgestellt (III. 2) sowie mögliche Erweiterungen auf den Fall nicht-identischer Verteilungen, welche u. a. zu gewissen Produktdarstellungen der Halbgruppe mit ungleichen Faktoren führen. Die umgekehrte Fragestellung, unter welchen Bedingungen allein stochastische Darstellungen von Operatorhalbgruppen möglich sind, wird in Kapitel III. 3 behandelt. Der vierte Abschnitt ist der Untersuchung der Konvergenzgeschwindigkeit in den Darstellungssätzen gewidmet. Neben allgemeinen, scharfen Abschätzungen mittels der Momente und momenterzeugenden Funktionen der zugrundeliegenden Zufallsvariablen werden exemplarisch auch entsprechende Abschätzungen für die wichtigsten bekannten Darstellungssätze angegeben. Dabei lassen sich zwei wesentliche Typen von Abschätzungen unterscheiden: Abschätzungen unter geeigneten Glattheitsbedingungen (IV. 1) sowie Abschätzungen mit Hilfe verschiedener Stetigkeitsmoduli (IV. 2). Die Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit im Sinne von Bernstein ist Thema des Kapitels IV. 3. Im letzten Abschnitt werden schließlich einige wichtige Anwendungen der vorher erzielten Ergebnisse beispielhaft diskutiert, darunter die polynomiale Approximation genügend glatter Funktionen (V. 1) sowie die Konvergenzordnung im Poisson'schen Grenzwertsatz (V. 2).

Symbolliste

P^X	Verteilung der Zufallsvariablen X
$E(X)$	Erwartungswert von X
$V(X)$	Varianz von X
ψ_X	wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von X
ψ_X^*	momenterzeugende Funktion von X
φ_X	charakteristische Funktion von X
$\xrightarrow{P}$	stochastische Konvergenz
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	Verteilungskonvergenz (schwache Konvergenz)
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
$B(n,p)$	Binomialverteilung mit Parametern n und p
$\overline{B}(n,p)$	negative Binomialverteilung (Pascal-Verteilung) mit Parametern n und p
$Po(\xi)$	Poisson-Verteilung mit Parameter ξ
$Ex(\beta)$	Exponentialverteilung mit Parameter β
$\Gamma(\beta,\gamma)$	Gammaverteilung mit Parametern β und γ
ε_k	Einpunktverteilung im Punkt k
$*$	Faltungsoperation
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$	Menge der (nicht-negativen) reellen Zahlen
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$	Menge der (nicht-negativen) ganzen Zahlen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
exp	Exponentialfunktion
log	natürlicher Logarithmus
Γ	Eulersche Gammafunktion
I	Identitätsabbildung
$\circ$	Komposition von Abbildungen
$f^{(k)}$	k-te Ableitung der Funktion f
$\lVert\cdot\rVert$	Norm
$\mathcal{X}^*$	Dualraum des Banachraumes $\mathcal{X}$
$\mathcal{B}(\mathcal{X})$	Borelsche σ-Algebra über dem topologischen Raum $\mathcal{X}$
$C[0,1]$	Banachraum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$
$CB(\mathcal{X})$	Banachraum der stetigen, beschränkten Funktionen auf $\mathcal{X}$
$UCB(\mathcal{X})$	Banachraum der gleichmäßig stetigen, beschränkten Funktionen auf $\mathcal{X}$
ℓ^∞	Banachraum der beschränkten Zahlenfolgen
$\omega_1(\xi,f), \omega_2(\xi,f), \omega_1^*(\delta,t,f)$	Stetigkeitsmodule
$\omega_1^b(\delta,f)$	rektifizierter Stetigkeitsmodul
O, o	Landau-Symbole
1_C	Indikatorfunktion des Ereignisses C
$\lVert x\rVert$	größte ganze Zahl kleiner gleich x

I. Grundlagen

In diesem Abschnitt sollen einige für die Formulierung und Beweise der wesentlichen Ergebnisse benötigten Hilfsmittel aus Stochastik und Funktionalanalysis bereitgestellt werden. Für einen größeren Überblick vgl. etwa die einführenden Kapitel der Monographien von Bauer (1974), Gänssler-Stute (1977) oder Billingsley (1979) sowie den sehr ausführlichen Anhang in Butzer-Berens (1967).

I. 1 Stochastische Grundlagen

Vereinbarungsgemäß wollen (und können) wir annehmen, daß alle im Text auftretenden Zufallsvariablen auf ein und demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{A},P)$ definiert sind und Werte in einem (je nach Abbildung evtl. verschiedenen, nicht notwendig separablen) Banachraum $\mathcal{Y}$ mit Norm $\|.\|$ und zugehöriger Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{Y})$ annehmen (wobei unter letzterer die durch die Normtopologie über $\mathcal{Y}$ erzeugte σ-Algebra zu verstehen ist).

Wir betrachten nun zunächst den Fall $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ (wie üblich versehen mit der Euklidischen Topologie). Existiert für eine reelle Zufallsvariable X der Ausdruck

$$E(|X|^{\alpha}) = \int |X|^{\alpha}dP \tag{1.1}$$

für ein $\alpha > 0$, so heißt $E(|X|^{\alpha})$ absolutes Moment der Ordnung α von X. Ist X integrierbar (d. h. existiert der Erwartungswert $E(X) = \xi$), so heißt im Falle der Existenz

$$E(|X-\xi|^{\alpha}) = \int |X-\xi|^{\alpha}dP \tag{1.2}$$

absolutes zentrales Moment der Ordnung α von X. Im Fall $\alpha = 2$ spricht man auch von der Varianz von X, in Zeichen: $E((X-\xi)^2) = V(X)$.

Eine wichtige Rolle in der Stochastik spielen die sogenannten momenterzeugenden und wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen reeller Zufallsvariablen, insbesondere im Hinblick auf die Charakterisierung deren Verteilungen. Die momenterzeugende Funktion ψ_X^* einer reellen Zufallsvariablen X ist im Falle der Existenz definiert durch

$$\psi_X^*(t) := E(e^{tX}), \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Sie existiert z. B. für $t \leq 0$, falls $X \geq 0$. Ist ψ_X^* analytisch in einer Umgebung der Null, so existieren sämtliche absoluten Momente von X, es gilt

$$E(X^k) = \psi_X^{*(k)}(0), \ k \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

und die Verteilung von X ist durch ψ_X^* eindeutig bestimmt (vgl. Billingsley (1979)). Dies ist auch äquivalent damit, daß die (formal) durch

$$\varphi_X(t) := E(e^{itX}) = \psi_X^*(it), \ t \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

definierte charakteristische Funktion von X eine analytische Fortsetzung in eine komplexe Umgebung der Null gestattet (vgl. Lukacs (1960)).

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion ψ_X einer rellen Zufallsvariablen X ist im Falle der Existenz definiert durch

$$\psi_X^*(t) := E(t^X), \ t \geq 0. \tag{1.6}$$

Sie existiert für $0 \leq t \leq 1$, falls $X \geq 0$, und es gilt ggf.

$$\psi_X^*(t) = \psi_X(e^t), \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Nimmt X nur nicht-negative, ganzzahlige Werte an, so gilt im Falle der Konvergenz der Reihe auch

$$\psi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)t^k, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Wir wollen nun einige Versionen wichtiger Grenzwertsätze der Stochastik angeben, nämlich Versionen des Gesetzes der grossen Zahlen und des zentralen Grenzwertsatzes. Dazu benötigen wir zunächst verschiedene Konvergenzbegriffe für Folgen $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ reeller Zufallsvariablen.

Definition. Es sei $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge reeller Zufallsvariablen. Die Folge konvergiert P-fast sicher (f.s.) gegen die reelle Zufallsvariable X, wenn eine P-Nullmenge $N \in \mathscr{A}$ existiert derart, daß

$$X_n(\omega) \to X(\omega) \quad (n \to \infty) \quad \text{für } \omega \in \Omega \backslash N \tag{1.9}$$

im Sinne der punktweisen Konvergenz.

Die Folge konvergiert stochastisch gegen X (in Zeichen: $X_n \xrightarrow{P} X$), wenn

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{1.10}$$

für alle $\varepsilon > 0$.

Die Folge konvergiert nach Verteilung (oder schwach) gegen X (in Zeichen: $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$), wenn

$$E(g(X_n)) = \int g\,dP^{X_n} \to \int g\,dP^X = E(g(X)) \quad (n \to \infty) \tag{1.11}$$

für alle $g \in CB(\mathbb{R})$.

Die Verteilungskonvergenz besagt also aus funktionalanalytischer Sicht, daß die Folge der Wahrscheinlichkeitsmaße

$\{P^{X_n};\ n \in \mathbb{N}\}$ schwach-*-konvergent gegen die Verteilung P^X ist, da bekanntlich der Dualraum $CB(\mathbb{R})^*$ isometrisch isomorph zu dem Banchraum der regulären singnierten Inhalte auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit endlicher Totalvariation ist (vgl. Dunford-Schwartz (1958)).

Die fast sichere Konvergenz impliziert stets die stochastische Konvergenz, welche ihrerseits die Verteilungskonvergenz impliziert. Ist die Grenzvariable X konstant, gilt von letzterem auch die Umkehrung.

<u>Satz 1.1</u> (Version des starken Gesetzes der großen Zahlen).
Sei $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge reeller, unabhängiger, integrierbarer, identisch (wie X) verteilter Zufallsvariablen mit $E(X) = \xi$. Dann gilt

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to \xi \text{ P-f.s.} \quad (n \to \infty) \tag{1.12}$$

<u>Satz 1.2</u> (Version des schwachen Gesetzes der großen Zahlen).
Sei $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge reeller, paarweise unkorrelierter, quadratisch integrierbarer Zufallsvariablen mit $E(X_n) = \xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Genügt die Folge der Beziehung

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_n) \to 0 \ (n \to \infty), \tag{1.13}$$

dann gilt

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \xi \ (n \to \infty). \tag{1.14}$$

Bezüglich allgemeinerer, jedoch hier nicht benötigter Versionen des Gesetzes der großen Zahlen siehe Bauer (1974).

<u>Satz 1.3</u> (Version des zentralen Grenzwertsatzes).
Sei $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge reeller, unabhängiger, identisch

(wie X) verteilter, quadratisch integrierbarer Zufallsvariablen mit $E(X) = \xi$, $V(X) = \sigma^2 > 0$. Dann gilt

$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} Y \quad (n \to \infty), \tag{1.15}$$

wobei $P^Y = \mathcal{N}(\xi, \sigma^2)$.

Existiert zusätzlich die momenterzeugende Funktion ψ_X^* in einer Umgebung der Null, so ist die Folge $\{|\sqrt{n}\,\overline{X}_n|^\alpha;\ n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar für jedes $\alpha > 0$; es gilt dann auch

$$\sqrt{n}^{\,\alpha}\, E(|\overline{X}_n|^\alpha) \to E(|Y|^\alpha) \quad (n \to \infty). \tag{1.16}$$

Der erste Teil des obigen Satzes ist ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes von Lindeberg-Feller (Bauer (1974), Satz 51.3); bezgl. des zweiten Teils siehe auch Satz 2.2, Kapitel II und Billingsley (1979), Seite 292.

Für die spätere Abschätzung der momenterzeugenden Funktion von $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ wird noch folgende Ungleichung benötigt.

<u>Satz 1.4</u> (Jensen-Ungleichung).
Ist X eine reelle, integrierbare Zufallsvariable mit Werten in einem Intervall $K \subseteq \mathbb{R}$, dann liegt $E(X)$ in K, und für jede auf K stetige, konvexe Funktion g gilt

$$E(g(X)) \geq g(E(X)), \tag{1.17}$$

sofern $g(X)$ integrierbar ist.

Die bisher betrachteten Zufallsvariablen waren sämtlich als reellwertig vorausgesetzt. Um den allgemeineren Fall Banachraumwertiger Zufallsvariablen behandeln zu können, benötigen wir zunächst einen entsprechenden Integralbegriff.

Definition. Sei $\mathcal{Y}$ ein Banachraum mit Norm $\|.\|$. Eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$-meßbare Abbildung X (Zufallsvariable) mit Werten in $\mathcal{Y}$ heißt integrierbar, wenn ein Element $J \in \mathcal{Y}$ existiert derart, daß

$$f^*(J) = \int f^*(X)dP = E(f^*(X)) \tag{1.18}$$

gilt für alle Elemente f^* des Dualraumes $\mathcal{Y}^*$ von $\mathcal{Y}$. J heißt dann auch Pettis-Erwartung von X, in Zeichen: $J = E(X)$.

Nach einem Korollar zum Satz von Hahn-Banach ist damit $E(X)$ im Falle der Existenz eindeutig bestimmt. Die Existenz von $E(X)$ ist dabei z. B. gewährleistet, wenn X separabelwertig und $\|X\|$ integrierbar ist; es gilt dann

$$\|E(X)\| \leq E(\|X\|) \tag{1.19}$$

(vgl. Pettis (1938), Mourier (1953), Gänssler-Stute (1977), Kapitel VIII). Im letzteren Fall fällt dann $E(X)$ mit dem entsprechenden Bochner-Integral zusammen.

Bezgl. einer Version des Gesetzes großer Zahlen für $\mathcal{Y}$-wertige Zufallsvariablen siehe Mourier (1953).

Abschließend wollen wir noch ein für die Darstellung von Operatorhalbgruppen wichtiges Resultat formulieren.

Satz 1.5 (Chung 1962).
Es sei $\{X_\tau \mid \tau \geq 0\}$ eine Familie reeller, nicht-negativer Zufallsvariablen derart, daß

$$X_\tau \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi \quad (\tau \to \infty) \tag{1.20}$$

für ein $\xi \in \mathbb{R}^+$. Ist ferner $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{Y}$ eine separabelwertige, meßbare und in ξ(stark) stetige Abbildung derart, daß

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\tau \geq n} E\{\|S(X_\tau)\|^r\} < \infty \tag{1.21}$$

für ein $r > 1$, dann gilt

$$S(\xi) = \lim_{\tau\to\infty} E[S(X_\tau)] \quad . \tag{1.22}$$

im Sinne der Normtopologie über $\mathcal{Y}$.

(Man beachte, daß die Beziehung (1.21) im wesentlichen eine gleichgradige Integrierbarkeitsbedingung für die Familie $\{S(X_\tau) \mid \tau \geq 0\}$ $\mathcal{Y}$-wertiger Zufallsvariablen darstellt.)

I. 2 Funktionalanalytische Grundlagen

In diesem Teil wollen wir noch einige zentrale Punkte aus der Theorie der Halbgruppen linearer Operatoren hervorheben (vgl. dazu Butzer-Berens (1967)).

Wir betrachten dazu einen Banachraum $\mathcal{X}$ mit Norm $\|.\|$; $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ bezeichne dabei die Banach-Algebra der stetigen Endomorphismen von $\mathcal{X}$. Die Operatornorm in $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ werde ebenfalls mit $\|.\|$ bezeichnet.

<u>Definition.</u> Eine Teilmenge $\{T(t) \mid t \geq 0\} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{X})$ stetiger Endomorphismen heißt (einparametrige) Halbgruppe, wenn die folgenden beiden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} T(s+t) &= T(s) \circ T(t), \; s,t, \geq 0 \\ T(0) &= I \quad (\text{Identität}). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Gilt darüberhinaus noch

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t)f-f\| = 0, \quad f \in \mathcal{X}, \tag{1.24}$$

so heißt die Halbgruppe auch von der Klasse $\mathcal{C}_0$ oder kurz $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe.

Eine $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe besitzt die beiden folgenden, wesentlichen Eigenschaften:

die Abbildung $T(.)f$ ist stark stetig für jedes $f \in \mathcal{X}$ (1.25)

es existieren universelle Konstanten $M \geq 1$ und $\omega \geq 0$ mit

$$\|T(t)\| \leq M\, e^{\omega t}, \quad t \geq 0. \tag{1.26}$$

Der infinitesimale Erzeuger A einer $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe ist definiert durch

$$Af := \lim_{t \downarrow 0} A_t f, \quad f \in \mathcal{X} \text{ mit} \tag{1.27}$$

$$A_t = \frac{1}{t}(T(t)-I), \quad t > 0 \tag{1.28}$$

(sofern der im Sinne der starken Topologie zu verstehende Grenzwert existiert); diejenige Teilmenge von $\mathcal{X}$, für die (1.27) gilt, wird auch mit $D(A)$ bezeichnet. Für ganzzahlige $r \geq 2$ ist die r-te Potenz A^r von A sowie $D(A^r)$ rekursiv definiert durch

$$D(A^r) := \{f \in \mathcal{X} \mid f \in D(A^{r-1}) \text{ und } A^{r-1}f \in D(A)\}$$

$$A^r f := A(A^{r-1}f) \text{ für } f \in D(A^r), \tag{1.29}$$

wobei $A^1 := A$. Für $r \geq 1$ ist $D(A^r)$ ein abgeschlossener, dichter Teilraum von $\mathcal{X}$, und A^r ist ein abgeschlossener (i. a. unbeschränkter) linearer Operator auf $D(A^r)$ mit Werten in $\mathcal{X}$. Für $r \geq 1$ und $f \in D(A^r)$ bestehen die Beziehungen

$$T(t)f \in D(A^r) \quad \text{sowie}$$

$$A^r T(t)f = T(t)A^r f, \quad t \geq 0 \tag{1.30}$$

$$T(t)f = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!} A^k f + \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} T(s)A^r f \, ds \text{ für } t \geq 0 \tag{1.31}$$

(hierbei ist $A^0 := I$). Beziehung (1.31) wird auch als Taylor-entwicklung der Halbgruppe bezeichnet.

Ist die Abbildung $t \to T(t)$ stetig bezüglich der gleichmäßigen Operatortopologie, dann ist $D(A) = \mathfrak{X}$, A ist beschränkt (also $\in \mathscr{B}(\mathfrak{X})$), und es gilt

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad t \geq 0 \tag{1.32}$$

im Sinne der gleichmäßigen Operatortopologie. Ist umgekehrt $B \in \mathscr{B}(\mathfrak{X})$, dann wird durch $T(t) := e^{tB}$ eine gleichmäßig stetige $\mathscr{C}_0$-Halbgruppe definiert mit infinitesimalem Erzeuger $A = B$.

Die Resolvente $R(\lambda)$ einer $\mathscr{C}_0$-Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger A ist (im Falle der Existenz) definiert durch die Umkehrabbildung

$$R(\lambda) := (\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda \geq 0. \tag{1.33}$$

$R(\lambda)$ existiert für $\lambda > \omega$; in diesem Fall ist $R(\lambda) \in \mathscr{B}(\mathfrak{X})$, und es gilt

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)(.) dt, \tag{1.34}$$

d. h. $R(\lambda)$ ist die Laplace-Transformierte der Halbgruppe. Für $\lambda > \omega$ gilt schließlich

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda) = (-1)^n n! R(\lambda)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.35}$$

II. Momente und momenterzeugende Funktionen

Die in Kapitel III untersuchten Fragestellungen nach Darstellungen einer $\mathscr{C}_0$-Halbgruppe $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ auf der Basis des Gesetzes der großen Zahlen beinhalten insbesondere die Betrachtung von Zufallsvariablen der Art $T(X)f$ bzw. $T(\overline{X}_n)f$ sowie deren Erwartungswerten, wobei $X \geq 0$ eine geeignete Zufallsvariable ist. Die durch (1.26) gegebene exponentielle Beschränktheit der Normen $\|T(t)\|$ sowie die Forderung der Existenz der Pettis-Erwartung $E[T(X)f]$ legen daher wegen

$$E(\|T(X)f\|) \leq ME(e^{\omega X})\|f\| = M\|f\|\psi_X^*(\omega)$$

die Betrachtung momenterzeugender Funktionen nahe. In der für Konvergenzgeschwindigkeitsaussagen benötigten stochastischen Taylorentwicklung treten darüberhinaus auch die (zentralen) Momente von X bzw. $\overline{X}_n$ auf (was aufgrund von (1.31) einsichtig ist), für die geeignete Abschätzungen erforderlich sind. Das letztere Problem ist allgemein in der Stochastik von großer Bedeutung, wie die zahlreichen dazu erschienenen Arbeiten verdeutlichen (etwa Whittle (1960), Brillinger (1962), von Bahr (1965), Dharmadhikari-Jogdeo (1969), Sazanov (1974), Hall (1978)). Man kann hierbei im wesentlichen zwei verschiedene Typen von Abschätzungen unterscheiden: globale Abschätzungen, welche relativ geringe Voraussetzungen an die zugrundeliegenden Zufallsvariablen $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ stellen und daher in der Regel (und für unsere Zwecke) zu grob sind, andererseits auf dem zentralen Grenzwertsatz beruhende, qualitativ recht genaue Abschätzungen, welche jedoch in der Regel kaum explizit quantifizierbar und damit für numerische Zwecke ungeeignet sind. Die im vorliegenden Fall gegebenen Integrabilitätsbedingungen in Form der Existenz der momenterzeugenden Funktion lassen nun aber Abschätzungen zu, die die Vorteile beider Typen von Abschätzungen in quantitativer wie qualitativer Hinsicht vereinen. Damit werden einerseits globale, explizite, scharfe Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit in den allgemeinen wahrscheinlichkeitstheoretischen Darstellungssätzen möglich, andererseits lassen sich die in einigen

Spezialfällen auf analytischem Wege gefundenen Abschätzungen auf einfache Weise wiedergewinnen bzw. in der Regel sogar verbessern.

Die erste wichtige Abschätzung der momenterzeugenden Funktion einer geeigneten Zufallsvariablen macht

Lemma 2.1. Es sei X eine nicht-negative Zufallsvariable, und ψ_X^* existiere für ein $\delta > 0$ (und damit auch im Intervall $(-\infty,\delta]$)). Dann existieren sämtliche positiven Momente von X mit

$$E(X^\alpha) \leq (\tfrac{\alpha}{\delta})^\alpha e^{-\alpha}\psi_X^*(\delta),\quad \alpha > 0. \tag{2.1}$$

Bezeichnet $\xi = E(X)$, so gilt darüberhinaus die Darstellung

$$\psi_X^*(t) = 1 + \xi t + R^*(t),\quad t \leq \delta, \tag{2.2}$$

wobei

$$0 \leq R^*(t) \leq \frac{2t^2}{e^2(\eta-|t|)^2}\,\psi_X^*(\eta)$$

$$\text{für } |t| < \eta \text{ und jedes } 0 < \eta \leq \delta. \tag{2.3}$$

Beweis. Für alle $\alpha,\beta > 0$, $x \geq 0$ gilt

$$x^\alpha \leq (\tfrac{\alpha}{\beta})^\alpha e^{-\alpha} e^{\beta x}, \tag{2.4}$$

wobei Gleichheit für $x = \frac{\alpha}{\beta}$ erreicht wird (ersichtlich z. B. durch Differenzieren der Funktion $f(x) = x^\alpha e^{-\beta x}$). Mit $\beta = \delta$ ergibt sich hieraus sofort (2.1). Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt ferner bekanntlich

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x^k|}{(k+2)!} \leq \frac{x^2}{2}\, e^{|x|}, \tag{2.5}$$

so daß

$$0 \leq R^{*}(t) := \psi_X^{*}(t) - 1 - \xi t \leq \frac{t^2}{2} E(X^2 e^{|t|X}). \tag{2.6}$$

Setzt man in (2.4) speziell $\alpha = 2$, $\beta = \eta - |t|$, so ergibt sich

$$E(X^2 e^{|t|X}) \leq \left(\frac{2}{\eta - |t|}\right)^2 e^{-2} E(e^{(\eta-|t|)X} e^{|t|X})$$

$$= \frac{4}{e^2(\eta - |t|)^2} \psi_X^{*}(\eta), \tag{2.7}$$

womit alles bewiesen ist.

In der Abschätzung (2.7) kann die mögliche Potenz $(\delta - |t|)^{-2}$ i. a. nicht durch eine Potenz $(\delta - |t|)^{-2+\varepsilon}$ für ein $\varepsilon > 0$ verbessert werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

<u>Beispiel 2.1.</u> X besitze die Lebesgue-Dichte $f(x) = c(\gamma)x^{-\gamma}e^{-x}$ für $x \geq 1$ und $= 0$ sonst (mit $\gamma > 1$). Hierbei bezeichne $c(\gamma) = \{\int_1^\infty x^{-\gamma}e^{-x}dx\}^{-1}$. Dann ist

$$\psi_X^{*}(1) = c(\gamma)\int_1^\infty x^{-\gamma}dx = \frac{c(\gamma)}{\gamma - 1} < \infty, \tag{2.8}$$

aber

$$E(e^{tX}) = c(\gamma)\int_1^\infty x^{-\gamma}e^{(t-1)x}dx = \infty \tag{2.9}$$

für $t > 1$ (d. h. als maximaler Wert kann für δ höchstens 1 gewählt werden). Sei nun $0 < \varepsilon \leq 1$, $\gamma = 1 + \varepsilon$, $|t| < 1$. Dann gilt

$$\frac{1}{2}(1-|t|)^{\varepsilon-2} \leq E(X^2 e^{|t|X}) \leq 9(1-|t|)^{\varepsilon-2}. \tag{2.10}$$

Da $0 < \varepsilon \leq 1$ beliebig war, folgt damit die obige Behauptung. Zum Nachweis von (2.10) wird die Stirlingsche Formel zur Abschätzung der Gammafunktion Γ benötigt:

$$\Gamma(x) \geq \sqrt{2\pi}\, x^{x-1/2} e^{-x}, \quad x > 0. \tag{2.11}$$

Durch Differenzieren der rechten Seite erhält man hieraus sofort eine untere Schranke für die Gammafunktion

$$\Gamma(x) \geq 0{,}8365\ldots, \quad x > 0. \tag{2.12}$$

Andererseits ist die Gammafunktion für $x > 0$ konvex mit $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, so daß $\Gamma(x) \leq 1$ für $1 \leq x \leq 2$. Unter Verwendung von (2.4) mit $\alpha = 1+\varepsilon$, $\beta = \alpha$ läßt sich ferner auch sofort die Ungleichung

$$e \leq c(1+\varepsilon) \leq e(2+\varepsilon) \tag{2.13}$$

gewinnen. Damit folgt aber

$$\begin{aligned}
E(X^2 e^{|t|X}) &= c(1+\varepsilon)\int_1^\infty x^{1-\varepsilon} e^{-(1-|t|)x}dx \\
&= c(1+\varepsilon)(1-|t|)^{\varepsilon-2}\int_{1-|t|}^\infty y^{1-\varepsilon}e^{-y}dy \\
&= c(1+\varepsilon)(1-|t|)^{\varepsilon-2}\{\Gamma(2-\varepsilon) - \int_0^{1-|t|} y^{1-\varepsilon}e^{-y}dy\} \\
&\geq e(1-|t|)^{\varepsilon-2}\{0{,}8365 - \int_0^1 e^{-y}dy\} \\
&\geq e(1-|t|)^{\varepsilon-2}\{0{,}8365 - (1-\tfrac{1}{e})\} \geq \tfrac{1}{2}(1-|t|)^{\varepsilon-2},
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
E(X^2 e^{|t|X}) &\leq c(1+\varepsilon)(1-|t|)^{\varepsilon-2}\Gamma(2-\varepsilon) \\
&\leq 3e(1-|t|)^{\varepsilon-2} \leq 9(1-|t|)^{\varepsilon-2}.
\end{aligned}$$

Damit ist (2.10) bewiesen.

Die variable Form der Abschätzung (2.3) gestattet eine im Intervall $|t| < \delta$ verbesserte Abschätzung gegenüber dem Spezialfall $\eta = \delta$. Für festes $|t| < \delta$ besitzt nämlich die stetige Funktion $g(\eta) = \psi_X^*(\eta)/(\eta-|t|)^2$ im Intervall $|t| < \eta \leq \delta$ ein Minimum an einer Stelle $\eta = \eta^*(t)$, so daß (2.3) verbessert werden kann zu

$$0 \leq R^*(t) \leq \frac{2t^2}{e^2(\eta^*(t)-|t|)^2}\,\psi^*(\eta^*(t)), \quad |t| < \delta. \tag{2.14}$$

<u>Beispiel 2.2.</u> Es sei $P^X = \Gamma(\beta,\gamma)$, d. h. X sei Gamma-verteilt mit der Lebesgue-Dichte

$$f(x) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\,x^{\gamma-1}\,e^{-\beta x}, \quad x > 0 \quad (\beta,\gamma > 0). \tag{2.15}$$

Dann ist $\psi_X^*(t) = \beta^\gamma/(\beta-t)^\gamma$, $t < \beta$; δ kann hier $< \beta$, aber beliebig nahe an β gewählt werden. Es ist $g(\eta) = \beta^\gamma/(\beta-\eta)^\gamma(\eta-|t|)^2$ minimal für $\eta = \eta^*(t) = (2\beta+\gamma|t|)/(\gamma+2)$, also

$$0 \leq R^*(t) \leq \frac{(\gamma+2)^{\gamma+2}\beta^\gamma}{2e^2\gamma^\gamma}\;\frac{t^2}{(\beta-|t|)^{\gamma+2}}, \quad |t| < \beta. \tag{2.16}$$

Entsprechend den eingangs gemachten Anmerkungen ist nun speziell die momenterzeugende Funktion $\psi_{\overline{X}_n}^*$ des arithmetischen Mittels geeigneter Zufallsvariablen von Interesse. Mit Hilfe von Lemma 2.1 lassen sich hierfür aber wie folgt geeignete Abschätzungen finden.

<u>Satz 2.1.</u> Sind $X_1,\ldots,X_n$ nicht-negative, unabhängige, identisch (wie X) verteilte Zufallsvariablen, deren momenterzeugende Funktion ψ_X^* für ein $\delta > 0$ existiert, so gilt, wenn $\xi = E(X)$ bezeichnet,

$$e^{t\xi} \le \psi^*_{\overline{X}_n}(t) \le e^{t\xi} \exp\left\{\frac{2t^2\psi^*_X(\eta)}{e^2 n(\eta - \frac{|t|}{n})^2}\right\}$$

$$\text{für } 0 < \eta \le \delta \quad \text{und} \quad |t| < n\eta. \tag{2.17}$$

Insbesondere existiert $\psi^*_{\overline{X}_n}$ im Intervall $(-\infty, n\delta]$.

Beweis. Für $t \le n\delta$ gilt wegen der Unabhängigkeit und identischen Verteilung von $X_1,\ldots,X_n$

$$\psi^*_{\overline{X}_n}(t) = E(e^{\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k}) = \prod_{k=1}^{n} E(e^{\frac{t}{n}X_k})$$

$$= \psi_X^{*n}(\tfrac{t}{n}) = \{1 + \tfrac{t}{n}\xi + R^*(\tfrac{t}{n})\}^n$$

$$\le \exp\{t\xi + nR^*(\tfrac{t}{n})\}. \tag{2.18}$$

Hieraus folgt die Existenz von $\psi^*_{\overline{X}_n}(n\delta)$ sowie unter Verwendung von (2.3) die rechte Seite der Beziehung (2.17). Die linke Seite dieser Beziehung ist eine Konsequenz der Jensenschen Ungleichung (Satz 1.4).

Ist $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge unabhängiger, identisch (wie $X \ge 0$) verteilter Zufallsvariablen, deren momenterzeugende Funktion ψ^*_X für ein $\delta > 0$ existiert, so besagt Satz 2.1 in etwas anderer Formulierung, daß für festes $t \in \mathbb{R}$ und genügend große n (nämlich $n > \frac{|t|}{\eta}$) $\psi^*_{\overline{X}_n}(t)$ existiert und wegen $e^{\frac{x}{n}} = 1 + O(\frac{1}{n})$, $x \in \mathbb{R}$ mit der Ordnung $O(\frac{1}{n})$ gegen $e^{t\xi}$ für $n \to \infty$ konvergiert. Umgekehrt gilt bei festem n und $t \to 0$ auch

$$\psi^*_{\overline{X}_n}(t) = e^{t\xi} + O(t^2). \tag{2.19}$$

Beide Konvergenzordnungen können i. a. nicht verbessert werden, wie man am Beispiel der Exponentialverteilung Ex(β) (Beispiel 2.2 mit $\gamma = 1$) sehen kann: dort ist $\psi^*_{\bar{X}_n}(t) = (1-t/n\beta)^{-n}$ für $|t| < n\beta$ mit $\xi = 1/\beta$, also

$$n\{\psi^*_{\bar{X}_n}(t) - e^{t\xi}\} \to \frac{t^2\xi^2}{2} e^{t\xi}, \quad n \to \infty \tag{2.20}$$

und

$$\frac{1}{t^2}\{\psi^*_{\bar{X}_n}(t) - e^{t\xi}\} \to \frac{\xi^2}{2n}, \qquad t \to 0. \tag{2.21}$$

Mit Hilfe von Satz 2.1 läßt sich auch sofort eine Abschätzung für die absoluten zentralen Momente von $\bar{X}_n$ angeben:

Satz 2.2. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 gilt für alle $\alpha,\beta > 0$, $n > (\frac{\beta}{\eta})^2$:

$$E(|\bar{X}_n-\xi|^\alpha) \le \frac{2}{\sqrt{n}^\alpha}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha e^{-\alpha}\exp\left\{\frac{2\beta^2\psi^*_X(\eta)}{e^2(\eta-\frac{\beta}{\sqrt{n}})^2}\right\} \tag{2.22}$$

Beweis. Wegen $e^{|x|} \le e^x + e^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt mit (2.4) und Satz 2.1 für $n > \frac{\beta\sqrt{n}}{\eta}$ bzw. $n > (\frac{\beta}{\eta})^2$:

$$E(\sqrt{n}^\alpha|\bar{X}_n-\xi|^\alpha) \le \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha e^{-\alpha}E(\exp\{\beta\sqrt{n}|\bar{X}_n-\xi|\})$$

$$\le \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha e^{-\alpha}\{E(\exp\{\beta\sqrt{n}(\bar{X}_n-\xi)\})+E(\exp\{-\beta\sqrt{n}(\bar{X}_n-\xi)\})\}$$

$$\le \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha e^{-\alpha}\{e^{-\beta\sqrt{n}\xi}\psi^*_{\bar{X}_n}(\beta\sqrt{n})+e^{\beta\sqrt{n}\xi}\psi^*_{\bar{X}_n}(-\beta\sqrt{n})\}$$

$$\le 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha e^{-\alpha}\exp\left\{\frac{2\beta^2\psi_X(\eta)}{e^2(\eta-\frac{\beta}{\sqrt{n}})^2}\right\}. \tag{2.23}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

(Man beachte, daß aus (2.22) auch $\sup_n E(|\sqrt{n}\,\overline{X}_n|^\alpha) < \infty$ für jedes $\alpha > 0$ folgt, woraus sich die gleichgradige Integrierbarkeit dieser Folge ergibt; vgl. dazu auch Satz 1.3).

Die Konvergenzordnung $O(\frac{1}{\sqrt{n}^\alpha})$ in (2.22) kann (außer im trivialen Fall $X \equiv \xi$) nicht verbessert werden, da unter den genannten Voraussetzungen aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes (Satz 1.3) $\sqrt{n}^\alpha\, E(|\overline{X}_n-\xi|^\alpha)$ gegen das (strikt positive) absolute Moment der Ordnung α der Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz $V(X)$ konvergiert.

Die Konstante β in Satz 2.2 ist jedoch frei wählbar und beeinflußt neben der quantitativen Approximationsgüte auch den kleinsten Wert für n, ab dem die Beziehung (2.22) gültig ist. Wählt man etwa n so groß, daß $(\eta - \frac{\beta}{\sqrt{n}})^2 \geq \frac{4\eta^2}{e^2}$, also $n \geq (1 - \frac{2}{e})^{-2}(\frac{\beta}{\eta})^2$ bzw. gerundet $n \geq 15(\frac{\beta}{\eta})^2$ gilt, so liefert (2.22) die Beziehung

$$E(|\overline{X}_n-\xi|^\alpha) \leq \frac{2}{\sqrt{n}^\alpha}(\frac{\alpha}{\beta})^\alpha e^{-\alpha} \exp\{\frac{\beta^2\psi_X^*(\eta)}{2\eta^2}\}. \qquad (2.24)$$

Die Funktion $g(\beta) = \beta^{-\alpha}e^{c\beta^2}$ mit einer positiven Konstanten c ist aber minimal für $\beta = \beta^* = \sqrt{\alpha/2c}$ mit $g(\beta^*) = (\sqrt{2c/\alpha})^\alpha e^{\alpha/2}$. Mit der Wahl $c = \psi_X^*(\eta)/2\eta^2$ erhält man somit

<u>Satz 2.3.</u> Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 gilt

$$E(|\overline{X}_n-\xi|^\alpha) \leq \frac{2}{\sqrt{n}^\alpha}\,(\frac{\alpha\psi_X^*(\eta)}{e\eta^2})^{\alpha/2} \qquad (2.25)$$

für $n \geq \frac{15\alpha}{\psi_X^*(\eta)}$.

Beweis. Zu zeigen bleibt nur noch die untere Schranke für n. Gemäß den obigen Ausführungen kann dafür aber $15(\frac{\beta^*}{\eta})^2 = \frac{15\alpha}{\psi_X^*(\eta)}$ gewählt werden.

Beispiel 2.3. Im Falle der Gamma-Verteilung aus Beispiel 2.2 ergibt sich etwa

$$E(|\overline{X}_n-\xi|^\alpha) \leq \frac{2}{\sqrt{n}^\alpha}\left(\frac{\alpha(\gamma+2)^{\gamma+2}}{4e\gamma^\gamma\beta^2}\right)^{\alpha/2} \tag{2.26}$$

für $n \geq \frac{15\alpha\gamma^\gamma}{(\gamma+2)^\gamma}$ (man beachte, daß die Funktion $g(\eta) = \frac{\psi_X^*(\eta)}{\eta^2}$ minimal ist für $\eta = \eta^* = \frac{2\beta}{\gamma+2}$!)

Für den allgemeinen wahrscheinlichkeitstheoretischen Darstellungssatz sind nun insbesondere Zufallsvariable X der Form $X = \sum_{k=1}^{N} Y_k$ von Interesse (Chung (1962), Butzer-Hahn (1980), Pfeifer (1982)), wobei N eine nicht-negative, ganzzahlige Zufallsvariable und $\{Y_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ eine Folge unabhängiger, identisch (wie $Y \geq 0$) verteilter (auch von N unabhängiger) Zufallsvariablen bezeichnen (wobei für $N = 0$ die Summe ebenfalls als 0 erklärt sei). Wir wollen uns daher abschließend mit der Frage beschäftigen, unter welchen Bedingungen etwa an die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion ψ_N und die momenterzeugende Funktion ψ_Y^* auch die momenterzeugende Funktion ψ_X^* existiert, um auch für diesen allgemeineren Fall Abschätzungen der Art der Sätze 2.1, 2.2 und 2.3 zur Verfügung zu haben.

Lemma 2.2. Unter den obigen Voraussetzungen gilt: Existiert ψ_N für ein $\delta_N > 1$ und ψ_Y^* für ein $\delta_Y > 0$, so existiert ψ_X^* z. B. für $\delta_X > 0$ mit

$$\delta_X = \min\left\{\frac{\delta_Y}{2}, \frac{(\delta_N-1)\delta_Y}{\psi_Y^*(\delta_Y)}\right\}, \tag{2.27}$$

und für $t \leq \delta_X$ gilt

$$\psi_X^*(t) = \psi_N(\psi_Y^*(t)). \tag{2.28}$$

Beweis. Analog dem Beweis zu Lemma 2.1 erhält man bei Entwicklung nach nur einem Glied

$$0 \leq \psi_Y^*(t) \leq 1 + \frac{t}{e(\delta_Y - |t|)} \psi_Y^*(\delta_Y)$$

$$\leq 1 + \frac{t}{\delta_Y} \psi_Y^*(\delta_Y) \text{ für } |t| \leq \frac{\delta_Y}{2}. \tag{2.29}$$

Für $t = \delta_X$ aus (2.27) ergibt sich dann

$$0 \leq \psi_N^*(t) \leq 1 + (\delta_N - 1) = \delta_N,$$

so daß ψ_N an der Stelle $\psi_Y^*(\delta_X)$ existiert und damit auch $\psi_N(\psi_Y^*(t))$ für $t \leq \delta_X$. Für diese t gilt aber

$$\psi_N(\psi_Y^*(t)) = E(\psi_Y^*(t)^N) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_Y^*(t)^n P(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{tY})^n P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{t\sum_{k=1}^{n} Y_k}) P(N=n)$$

$$= E(e^{t\sum_{k=1}^{N} Y_k}) = \psi_X^*(t).$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.2 existieren gemäß Lemma 2.1 natürlich sämtliche positiven Momente von N und Y (und damit auch von X); es gilt dann etwa

$$E(X) = E(N)E(Y) \tag{2.30}$$

und

$$V(X) = E(N)V(Y) + V(N)\{E(Y)\}^2 \tag{2.31}$$

(vgl. Chung (1962), Lemma 3).

III. Wahrscheinlichkeitstheoretische Darstellungssätze für stark stetige Halbgruppen linearer Operatoren

Wir betrachten im folgenden stets $\mathscr{C}_o$-Halbgruppen $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ von Endomorphismen eines Banachraumes $\mathfrak{X}$ mit den durch (1.26) gegebenen charakteristischen Konstanten $M \geq 1$ und $\omega \geq 0$.

Zunächst wollen wir anschaulich erläutern, in welchem Zusammenhang das in Kapitel I. 1 vorgestellte Gesetz der großen Zahlen (Satz 1.1, Satz 1.2) mit den sogenannten Darstellungssätzen für Halbgruppenoperatoren steht. Sei dazu $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge reeller, unabhängiger, identisch (wie X) verteilter Zufallsvariablen mit $E(X) = \xi$; dann gilt insbesondere

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \xi,$$

oder gemäß der Definition der Verteilungskonvergenz:

$$E[g(\overline{X}_n)] = \int g dP^{\overline{X}_n} \to \int g dP^{\xi} = g(\xi) \qquad (3.1)$$

für alle Funktionen $g \in CB(\mathbb{R})$.

Der von Bernstein 1912 gefundene Satz ist somit (in einer abgeschwächten Version) ein Spezialfall von (3.1), denn wählt man für P^X eine Binomialverteilung $B(1,\xi)$ $(0 \leq \xi \leq 1)$, so ergibt sich:

$$E[g(\overline{X}_n)] = \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\xi^k(1-\xi)^{n-k} \to g(\xi) \quad (n \to \infty)$$

$$\text{(punktweise) für alle } g \in C[0,1]. \qquad (3.2)$$

(Der ursprüngliche Satz von Bernstein garantiert sogar gleichmäßige Konvergenz.)

In diesem Abschnitt soll nun u. a. gezeigt werden, daß gewisse Darstellungssätze für Halbgruppenoperatoren genau von der Form (3.1) sind, wobei man die Funktionen $g \in CB(\mathbb{R})$ durch die $\mathfrak{X}$-wertigen Abbildungen $T(.)f$ mit $f \in \mathfrak{X}$ ersetzt, und die Erwartungswerte als Pettis-Erwartungen auffaßt. Man gelangt dann zu einem schwachen Gesetz großer Zahlen für Halbgruppenoperatoren:

$$E[T(\overline{X}_n)f] = \int T(.)f dP^{\overline{X}_n} \to T(\xi)f \quad (n \to \infty) \tag{3.3}$$

(im Sinne der Norm-Topologie) für alle $f \in \mathfrak{X}$ und geeignete Zufallsvariable X_n, $X \geq 0$. Heuristisch gesehen kann die linke Seite von (3.3) dabei wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen noch gemäß

$$E[T(\overline{X}_n)] = E[\prod_{k=1}^{n} T(\frac{X_k}{n})] = \prod_{k=1}^{n} E[T(\frac{X_k}{n})] = \{E[T(\frac{X}{n})]\}^n \tag{3.4}$$

umgeformt werden, sofern die Operatoren $E[T(\overline{X}_n)]$ bzw. $E[T(\frac{X}{n})]$ geeignet definierbar sind. Dies läßt sich jedoch nicht im Sinne des in Kapitel I. 1 vorgestellten Pettis-Integrals bewerkstelligen, da bei nicht gleichmäßig stetigen $\mathscr{C}_0$-Halbgruppen i. a. die $\mathscr{E}(\mathfrak{X})$-wertige Abbildung $t \to T(t)$ nicht einmal (Borel-) meßbar ist (im Gegensatz zum gleichmäßig stetigen Fall, wo $t \to T(t)$ stetig und damit auch meßbar und separabelwertig ist; vgl. auch Theorem 10.2.1 bis 10.2.3 in Hille-Phillips (1957)).

Der hier angesprochene Problemkreis ist zunächst Gegenstand des folgenden Kapitels.

III. 1 Meßbarkeits- und Existenzprobleme

<u>Satz 3.1.</u> Es gelte $\liminf_{t \downarrow t_0} \|T(t) - T(t_0)\| > 0$ für ein $t_0 > 0$. Dann ist die Abbildung $T(.)$ weder (Borel-) meßbar noch separabelwertig.

Beweis. Zunächst ist die Abbildung $T(.)$ injektiv in einer Umgebung der Null, da es anderenfalls Folgen $\{s_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ und $\{t_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ gäbe mit $0 \leq s_n < t_n$, $t_n \downarrow 0$ und $T(s_n) = T(t_n)$. Es bezeichne $h_n = t_n - s_n$; ferner sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für genügend große $n \geq n(\varepsilon)$ (so daß $s_n \leq \varepsilon$)

$$T(\varepsilon) = T(s_n) \circ T(\varepsilon - s_n) = T(t_n) \circ T(\varepsilon - s_n) = T(\varepsilon + h_n) \qquad (3.5)$$

und damit auch

$$T(\varepsilon) = T(\varepsilon + k\, h_n) \text{ für alle } k \in \mathbb{N},\ n \geq n(\varepsilon). \qquad (3.6)$$

Sei nun $t > \varepsilon$, dann gibt es Folgen $\{k_m;\ m \in \mathbb{N}\}$ und $\{n_m;\ m \in \mathbb{N}\}$ natürlicher Zahlen mit

$$k_m \cdot h_{n_m} \to t - \varepsilon,\ m \to \infty. \qquad (3.7)$$

Wegen der Stetigkeit von $T(.)f$ für alle $f \in \mathfrak{X}$ folgt somit aufgrund von (3.6)

$$T(t)f = \lim_{m \to \infty} T(\varepsilon + k_m h_{n_m})f = T(\varepsilon)f,\ f \in \mathfrak{X} \qquad (3.8)$$

und damit $T(t) = T(\varepsilon)$ für alle $t > \varepsilon$.
Insbesondere folgt hieraus $T(\frac{\varepsilon}{n}) = T(\varepsilon)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn jeweils ε durch $\frac{\varepsilon}{n}$ und t durch ε ersetzt wird. Damit ist aber

$$f = \lim_{n \to \infty} T(\tfrac{\varepsilon}{n})f = T(\varepsilon)f,\ f \in \mathfrak{X}. \qquad (3.9)$$

Da ε beliebig war, ergibt sich somit $T(.) = I$ im Widerspruch zur Bedingung $\liminf_{t \downarrow t_0} \|T(t) - T(t_0)\| > 0$. Letzteres impliziert, daß (von t_0 abhängige) $\delta,\ c > 0$ existieren derart, daß $\inf_{t_0 < t \leq t_0 + \delta} \|T(t) - T(t_0)\| \geq c$. Dann gilt aber auch für jedes $s \in [0, t_0]$ mit $h = t_0 - s$

$$\inf_{s < t \leq s+\delta} \|T(t) - T(s)\| = \frac{1}{\|T(h)\|} \inf_{s < t \leq s+\delta} \|T(t) - T(s)\|\ \|T(h)\|$$

$$\geq \frac{1}{M} e^{-\omega h} \inf_{s<t\leq s+\delta} \|T(t+h)-T(s+h)\|$$

$$\geq \frac{1}{M} e^{-\omega t_o} \inf_{t_o<t\leq t_o+\delta} \|T(t)-T(t_o)\| =: c^* > 0. \qquad (3.10)$$

O. B. d. A. kann δ so klein angenommen werden, daß $\delta \leq t_o$ und $T(.)$ injektiv in $[0,\delta]$ ist. Dann impliziert (3.10) sofort $\|T(t)-T(s)\| \geq c^*$ für $s,t \in [0,\delta]$ mit $s \neq t$. Sei nun $N \subset [0,\delta]$ eine nicht-borelsche Menge (eine solche existiert stets). Dann besteht wegen der Injektivität $T(N)$ aus überabzählbar vielen isolierten Punkten mit paarweisem Mindestabstand $c^* > 0$, d. h. insbesondere ist $T(N)$ abgeschlossen (und damit borelsch), aber nicht separabel. Wegen der Injektivität ist nun $N = [0,\delta] \cap T^{-1}(T(N))$, d. h. es existiert eine Borel-Menge aus $\mathscr{B}(\mathscr{E}(\mathfrak{X}))$, deren Urbild keine Borel-Menge aus $\mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$ ist. Damit ist $T(.)$ nicht meßbar.

Man beachte, daß die in Satz 3.1 angegebene Bedingung eine etwas stärkere Form der Unstetigkeit der Halbgruppe (bezüglich der gleichmäßigen Operatortopologie) bedeutet.

Beispiel 3.1. (Halbgruppe der Linkstranslationen)
Es bezeichne $UCB(\mathbb{R})$ den Raum der gleichmäßig stetigen, reellen, beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}$. Die Halbgruppe der Linkstranslationen $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ ist definiert durch

$$T(t)f = f(.+t), \quad f \in UCB(\mathbb{R}), \quad t \geq 0. \qquad (3.11)$$

Wie man sofort sieht, ist $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ eine Kontraktionshalbgruppe (d. h. es gilt $\|T(t)\| = 1$ für alle $t \geq 0$); darüberhinaus gilt

$$\|T(t)-T(s)\| = \begin{cases} 2, & t \neq s \\ 0, & t = s \end{cases} \quad \text{für } s,t \geq 0. \qquad (3.12)$$

Man braucht dazu für o. B. d. A. $0 \leq s < t$ nur die Funktion $f \in UCB(\mathbb{R})$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x \leq s \\ +1 & , x \geq t \\ \text{linear}, & \text{sonst} \end{cases}$$

zu betrachten; es gilt dann $\|f\| = 1$, also

$$2 = \|T(t)f-T(s)f\| \leq \|T(t)-T(s)\| \leq 2 \qquad (3.13)$$

(letzteres aufgrund der Dreiecksungleichung). Hier ist also insbesondere die Voraussetzung des Satzes 3.1 erfüllt, so daß $T(.)$ weder meßbar noch separabelwertig ist.

Man beachte jedoch, daß sogar im Falle des Satzes 3.1 die (zufällige) Operatorabbildung $T(X) : \Omega \to \mathscr{E}(\mathscr{X})$ stets (Borel-) meßbar und separabelwertig ist, wenn $X \geq 0$ diskret ist, da dann $T(X)$ nur abzählbar viele Werte annimmt und jede abzählbare Teilmenge eines Banachraumes borelsch ist. In diesem Fall sind die in (3.4) auftretenden Erwartungswerte Pettis-Integrale im Sinne von Kapitel I. 1. Um den allgemeinen Fall behandeln zu können sowie die Existenz der in (3.3) auftretenden Integrale zu sichern, benötigen wir folgendes

<u>Lemma 3.1.</u> Ist X eine nicht-negative Zufallsvariable, deren momenterzeugende Funktion ψ_X^* an der Stelle der charakteristischen Konstanten ω existiert, so existiert auch $E[T(X)f]$ für jedes $f \in \mathscr{X}$, und es gilt

$$\|E[T(X)f]\| \leq E\Big[\|T(X)f\|\Big] \leq M\|f\|\,\psi_X^*(\omega). \qquad (3.14)$$

<u>Beweis.</u> Da wegen (1.25) die Abbildung $T(.)f$ für jedes $f \in \mathscr{X}$ stetig ist, ist $T(.)f$ auch (Borel-) meßbar und separabelwertig, entsprechend für $T(X)f$. Gemäß den Ausführungen in Kapitel I. 1 existiert $E[T(X)f]$ also z. B., wenn $\|T(X)f\|$ integrierbar ist; wegen (1.19) ist aber dafür die Existenz von $\psi_X^*(\omega)$ hinreichend, denn

$$E\left[\|T(X)f\|\right] \leq M\ E(e^{\omega X})\|f\| = M\|f\|\psi_X^*(\omega).$$

Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.1 läßt sich damit allgemein ein Operator $E[T(X)]$ wie folgt festlegen:

<u>Definition.</u> Der durch

$$E[T(X)]f := E[T(X)f],\quad f \in \mathscr{X} \tag{3.15}$$

eindeutig bestimmte Operator $E[T(X)]$ heißt (ebenfalls) Erwartungswert von $T(X)$ (auch wenn die Abbildung $T(X)$ gegebenenfalls nicht meßbar ist!).

Aus (3.15) ist sofort ersichtlich, daß $E[T(X)]$ linear ist; wegen (3.14) ist $E[T(X)]$ sogar beschränkt (also $\in \mathscr{E}(\mathscr{X})$) mit

$$\|E[T(X)]\| \leq M\psi_X^*(\omega). \tag{3.16}$$

Ist X diskret, existiert also nach der obigen Bemerkung $E[T(X)]$ als Pettis-Integral J, so fällt der durch (3.15) gegebene Erwartungswertbegriff hiermit zusammen: Wegen $J \in \mathscr{E}(\mathscr{X})$ ist J ein beschränkter linearer Operator auf $\mathscr{X}$; andererseits wird für jedes $f \in \mathscr{X}$ und $f^* \in \mathscr{X}^*$ durch $F(S) := f^*(S(f))$, $S \in \mathscr{E}(\mathscr{X})$ ein beschränktes lineares Funktional $F \in \mathscr{E}(\mathscr{X})^*$ definiert mit $\|F\| \leq \|f^*\|\|f\|$, so daß

$$f^*(J(f)) = F(J) = E[F(T(X))]$$

$$= E[f^*(T(X)f)] = f^*(E[T(X)f]) \qquad (3.17)$$

gilt, also nach einer Folgerung zum Satz von Hahn-Banach $J(f) = E[T(X)f] = E[T(X)]f$, also $J = E[T(X)]$ im Sinne von (3.15) gilt. (3.15) ist somit also eine echte Erweiterung des Pettis-Integrals.

Der folgende Satz untersucht nun die für (3.4) wesentliche Vertauschbarkeit von Erwartungswert- und Produktoperation im Falle unabhängiger Zufallsvariablen.

<u>Satz 3.2.</u> X und Y seien nicht-negative, unabhängige Zufallsvariablen, für die ψ_X^* und ψ_Y^* an der Stelle ω existieren mögen. Dann existieren $E[T(X)]$, $E[T(Y)]$ und $E[T(X)\circ T(Y)]$, und es gilt die Beziehung

$$E[T(X)\circ T(Y)] = E[T(X)]\circ E[T(Y)]. \qquad (3.18)$$

<u>Beweis.</u> Wegen $\psi_{X+Y}^*(\omega) = \psi_X^*(\omega)\psi_Y^*(\omega)$ existiert nach obigem neben $E[T(X)]$ und $E[T(Y)]$ auch $E[T(X)\circ T(Y)] = E[T(X+Y)]$. Zu zeigen bleibt die Gleichheit in (3.18). Diese ist bewiesen, wenn

$$f^*((E[T(X)]\circ E[T(Y)])f) = f^*(E[T(X+Y)]f) \qquad (3.19)$$

für alle $f \in \mathscr{X}$ und $f^* \in \mathscr{X}^*$ nachgewiesen ist. Seien also $f \in \mathscr{X}$ und $f^* \in \mathscr{X}^*$. Dann wird aber durch

$$g^*(g) := f^*(E[T(X)]g) = f^*(E[T(X)g]),\ g \in \mathscr{X} \qquad (3.20)$$

ein beschränktes lineares Funktional $g^* \in \mathscr{X}^*$ definiert mit

$$\|g^*\| \leq \|f^*\|\|E[T(X)]\| \leq \|f^*\|M\psi_X^*(\omega). \tag{3.21}$$

Definitionsgemäß gilt nun

$$f^*((E[T(X)] \circ E[T(Y)])f) = g^*(E[T(Y)]f)$$

$$= g^*(E[T(Y)f]) = E[g^*(T(Y)f)]$$

$$= \int g^*(T(y)f)P^Y(dy) = \int f^*(E[T(X)T(y)f])P^Y(dy)$$

$$= \int E[f^*(T(X)T(y)f)]P^Y(dy)$$

$$= \int\int f^*(T(x)T(y)f)P^X(dx)P^Y(dy)$$

$$= \int\int f^*(T(x+y)f)P^{(X,Y)}(dx,dy)$$

$$= \int f^*(T(X+Y)f)dP = f^*(E[T(X+Y)f])$$

$$= f^*(E[T(X+Y)]f). \tag{3.22}$$

Somit ist (3.19) und damit der Satz bewiesen.

Eine Verallgemeinerung der Beziehung (3.18) auf den am Ende von Kapitel II angesprochenen Fall liefert das folgende

<u>Korollar 3.1.</u> Sei N eine nicht-negative ganzzahlige Zufallsvariable und $\{Y_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ eine Folge unabhängiger, identisch (wie $Y \geq 0$) verteilter (auch von N unabhängiger) Zufallsvariablen; ferner sei $X = \sum_{k=1}^{N} Y_k$. Existieren dann $\psi_Y^*(\omega)$ sowie $\psi_N(\psi_Y^*(\omega))$, dann existieren auch $E[T(Y)]$, $\psi_N(E[T(Y)])$ sowie $E[T(X)]$, und es gilt die Beziehung

$$E[T(X)] = \psi_N(E[T(Y)]) = \sum_{m=0}^{\infty} \{E[T(Y)]\}^m P(N=m), \qquad (3.23)$$

wobei $\{E[T(Y)]\}^0 = I$ zu setzen ist.

Beweis. Zunächst soll gezeigt werden, daß die rechte Seite von (3.23) wohldefiniert ist, d. h. die dort auftretende Reihe absolut konvergiert. Gemäß Satz 3.2 ist aber für $m \geq 1$

$$\|\{E[T(Y)]\}^m\| = \|E[T(\sum_{k=1}^{m} Y_k)]\| \leq M\psi^*_{\sum_{k=1}^{m} Y_k}(\omega) = M\psi^*_Y(\omega)^m; \qquad (3.24)$$

wegen $M \geq 1$ gilt diese Beziehung damit auch für $m = 0$. Damit ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|\{E[T(Y)]\}^m\| P(N=m) \leq M \sum_{m=0}^{\infty} \psi^*_Y(\omega)^m P(N=m)$$

$$= M\psi_N(\psi^*_Y(\omega)) < \infty, \qquad (3.25)$$

also die Reihe absolut und damit auch im gewöhnlichen Sinne (stark) konvergent, so daß der Ausdruck $\psi_N(E[T(Y)])$ (formal) sinnvoll ist und durch die Reihe dargestellt wird.

Zu zeigen bleibt also noch die linke Gleichheit in (3.23). Sei dazu wieder $f \in \mathcal{X}$ und $f^* \in \mathcal{X}^*$. Dann gilt wegen der Konvergenz der Reihe

$$f^*(E[T(X)]f) = E[f^*(T(X)f)]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} E[f^*(T(\sum_{k=1}^{m} Y_k)f)] P(N=m)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f^*(E[T(\sum_{k=1}^{m} Y_k)]f) P(N=m)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f^*(\{E[T(Y)]\}^m f\ P(N=m))$$

$$= f^*([\sum_{m=0}^{\infty} \{E[T(Y)]\}^m P(N=m)]f), \tag{3.26}$$

also $E[T(X)] = \sum_{m=0}^{\infty} \{E[T(Y)]\}^m \; P(N=m)$.

III. 2 Darstellungssätze

Nunmehr können wir den fundamentalen wahrscheinlichkeitstheoretischen Darstellungssatz formulieren, welcher als Spezialfall u. a. das obige schwache Gesetz großer Zahlen für Halbgruppenoperatoren umfaßt.

Satz 3.3. Es sei $\{N(\tau) \mid \tau > 0\}$ ein stochastischer Prozeß mit den nicht-negativen ganzen Zahlen als Zustandsraum derart, daß die erzeugende Funktion $\psi_{N(\tau)}$ des Prozesses für alle $\tau > 0$ an einer Stelle $\delta_N > 1$ existiert und $\frac{1}{\tau} N(\tau)$ für $\tau \to \infty$ stochastisch gegen eine reelle Konstante $\zeta > 0$ konvergiert. Ist ferner $Y \geq 0$ eine Zufallsvariable, deren momenterzeugende Funktion ψ_Y^* an einer Stelle $\delta_Y > 0$ existiert derart, daß für ein $r > 1$ und $\tau \to \infty$ $\psi_{N(\tau)}(\psi_Y^*(\frac{r\omega}{\tau}))$ beschränkt bleibt, dann ist für $\tau \geq \frac{\omega}{\delta_X}$ mit δ_X aus (2.27) $\psi_{N(\tau)}(E[T(\frac{Y}{\tau})])$ ein beschränkter linearer Operator aus $\mathscr{E}(\mathfrak{X})$ mit

$$\| \psi_{N(\tau)}(E[T(\tfrac{Y}{\tau})]) \| \leq M\psi_{N(\tau)}(\psi_Y^*(\tfrac{\omega}{\tau})), \tag{3.27}$$

und es gilt die Darstellung

$$T(\xi) = \lim_{\tau \to \infty} \psi_{N(\tau)}(E[T(\tfrac{Y}{\tau})]) \tag{3.28}$$

im Sinne der starken Operatortopologie mit $\xi = \zeta \cdot E(Y)$.

Beweis. Es sei $\{Y_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ eine Folge (auch von $\{N(\tau) \mid \tau > 0\}$) unabhängiger, wie Y verteilter Zufallsvariablen (eine solche existiert stets). Dann wird durch

$$X(\tau) := \sum_{k=1}^{N(\tau)} Y_k, \quad \tau > 0 \tag{3.29}$$

ein (zusammengesetzter) stochastischer Prozeß definiert, für den wir zunächst - unter den angegebenen Bedingungen - die Gültigkeit einer Version des schwachen Gesetzes der großen Zahlen, nämlich

$$\frac{X(\tau)}{\tau} \xrightarrow{P} \xi, \quad \tau \to \infty, \tag{3.30}$$

zeigen wollen.

Wir zerlegen dazu $\frac{X(\tau)}{\tau}$ geeignet in Summanden

$$\frac{X(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{1 \leq k \leq \zeta\tau} Y_k + 1_{\{\zeta\tau < N(\tau)\}} \frac{1}{\tau} \sum_{\zeta\tau < k \leq N(\tau)} Y_k$$

$$- 1_{\{\zeta\tau > N(\tau)\}} \frac{1}{\tau} \sum_{N(\tau) < k \leq \zeta\tau} Y_k, \tag{3.31}$$

wobei für Ereignisse $C \in \mathscr{A}$ 1_C die Indikatorfunktion von C bezeichne. Aufgrund von Satz 1.1 folgt zunächst

$$\frac{1}{\tau} \sum_{1 \leq k \leq \zeta\tau} Y_k = \frac{[\![\zeta\tau]\!]}{\zeta\tau} \frac{1}{[\![\zeta\tau]\!]} \sum_{k=1}^{[\![\zeta\tau]\!]} Y_k \to \zeta \cdot E(Y) = \xi, \quad \tau \to \infty \tag{3.32}$$

im Sinne der fast sicheren Konvergenz (und damit auch stochastisch); dabei bezeichne für reelle x $[\![x]\!]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. Zu zeigen bleibt also noch die stochastische Konvergenz der restlichen beiden Summanden gegen Null. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{E(Y)}$. Dann gilt zunächst analog (3.32)

$$\frac{1}{\tau} \sum_{\zeta\tau < k \leq (\zeta+\delta)\tau} Y_k = \delta \cdot \frac{1}{\delta\tau} \sum_{\zeta\tau < k \leq \zeta\tau + \delta\tau} Y_k \to \delta \cdot E(Y), \quad \tau \to \infty \tag{3.33}$$

fast sicher (und damit auch stochastisch), so daß

$$P(1_{\{\zeta\tau<N(\tau)\}}\frac{1}{\tau}\sum_{\zeta\tau<k\leq N(\tau)} Y_k \geq \varepsilon)$$

$$\leq P(\{\zeta\tau<N(\tau)\}\cap\{\frac{1}{\tau}\sum_{\zeta\tau<k\leq N(\tau)} Y_k \geq \varepsilon\})$$

$$\leq P(\{\zeta\tau<N(\tau)\leq(\zeta+\delta)\tau\}\cap\{\frac{1}{\tau}\sum_{\zeta\tau<k\leq N(\tau)} Y_k \geq \varepsilon\}) + \dots$$

$$\dots + P(N(\tau) > (\zeta+\delta)\tau)$$

$$\leq P(\frac{1}{\tau}\sum_{\zeta\tau<k\leq(\zeta+\delta)\tau} Y_k \geq \varepsilon) + P(\frac{N(\tau)}{\tau} > \zeta+\delta) \to 0, \quad \tau \to \infty \tag{3.34}$$

wegen (3.33) und der stochastischen Konvergenz von $\frac{N(\tau)}{\tau}$ gegen ζ für $\tau \to \infty$. Die stochastische Konvergenz des zweiten Summanden gegen Null folgt analog. Damit ist aber (3.30) bewiesen. Für $\tau \geq \frac{\omega}{\delta_X}$, also $\frac{\omega}{\tau} \leq \delta_X \leq \delta_Y$, existieren nun $\psi_Y^*(\frac{\omega}{\tau}) = \psi_{\frac{Y}{\tau}}^*(\omega)$ sowie gemäß (2.28) $\psi_{N(\tau)}(\psi_Y^*(\frac{\omega}{\tau})) = \psi_{N(\tau)}(\psi_{\frac{Y}{\tau}}^*(\omega))$, so daß wegen Korollar 3.1 bzw. (3.25) für diese τ $\psi_{N(\tau)}(E[T(\frac{Y}{\tau})])$ als beschränkte Operatoren aus $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ existieren mit

$$\|\psi_{N(\tau)}(E[T(\frac{Y}{\tau})])\| \leq M\ \psi_{N(\tau)}(\psi_{\frac{Y}{\tau}}^*(\omega)); \tag{3.35}$$

dies ist aber gerade (3.27). Zu zeigen bleibt also noch die Darstellung (3.28). Nun gilt aber für jedes $f \in \mathcal{X}$ und $\tau \geq \frac{\omega}{\delta_X}$

$$E(\|T(\frac{X(\tau)}{\tau})f\|^r) \leq M^r\|f\|^r\ \psi_{X(\tau)}^*(\frac{r\omega}{\tau})$$

$$= M^r\|f\|^r\ \psi_{N(\tau)}(\psi_Y^*(\frac{r\omega}{\tau})); \tag{3.36}$$

letzterer Audruck bleibt voraussetzungsgemäß für $\tau \to \infty$ aber beschränkt, so daß wegen Satz 1.5

$$T(\xi) = \lim_{\tau\to\infty} E\left[T(\frac{X(\tau)}{\tau})\right] \tag{3.37}$$

im Sinne der starken Operatortopologie folgt. Mit Korollar 3.1 ergibt sich also wegen $E\left[T(\frac{X(\tau)}{\tau})\right] = \psi_{N(\tau)}(E\left[T(\frac{Y}{\tau})\right])$ gerade (3.28).

Das folgende Korollar zeigt nun, wie aus Satz 3.3 Darstellungssätze der Art (3.3) in der durch (3.4) gegebenen Form gewonnen werden können.

Korollar 3.2. (Schwaches Gesetz großer Zahlen für Halbgruppenoperatoren (Pfeifer (1982)). Es sei N eine nicht-negative ganzzahlige Zufallsvariable und $Y \geq 0$ eine Zufallsvariable derart, daß ψ_N an einer Stelle $\delta_N > 1$ und ψ_Y^* an einer Stelle $\delta_Y > 0$ existieren. Dann ist für $n \geq \frac{\omega}{\delta_X}$ mit δ_X aus (2.27) $\psi_N(E\left[T(\frac{Y}{n})\right])$ ein beschränkter linearer Operator aus $\mathscr{E}(\mathscr{X})$ mit

$$\|\psi_N(E\left[T(\tfrac{Y}{n})\right])\| \leq M\ \psi_N(\psi_Y^*(\tfrac{\omega}{n})), \tag{3.38}$$

und es gilt die Darstellung

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \{\psi_N(E\left[T(\tfrac{Y}{n})\right])\}^n \tag{3.39}$$

im Sinne der starken Operatortopologie, wobei $\xi = E(N)E(Y)$.

Beweis. Sei $\{N_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ eine Folge unabhängiger, wie N verteilter Zufallsvariablen; setze

$$N(\tau) := \sum_{k=1}^{[\![\tau]\!]} N_k,\ \tau > 0. \tag{3.40}$$

Dann gilt aufgrund des starken Gesetzes der großen Zahlen (Satz 1.1)

$$\frac{1}{\tau}\,N(\tau) = \frac{[\![\tau]\!]}{\tau}\;\frac{1}{[\![\tau]\!]}\sum_{k=1}^{[\![\tau]\!]} N_k \to \zeta := E(N) \tag{3.41}$$

fast sicher, und es gilt $\psi_{N(\tau)} = \psi_N^{[\![\tau]\!]}$ so daß $\psi_{N(\tau)}$ an der Stelle $\delta_N > 1$ für alle $\tau > 0$ existiert. Ferner gilt aufgrund der Abschätzungen aus Lemma 2.1 für jedes $r \geq 1$ und genügend große τ

$$\begin{aligned}
\psi_{N(\tau)}\left(\psi_Y^*\left(\tfrac{r\omega}{\tau}\right)\right) &\leq \psi_N^{[\![\tau]\!]}\left(1 + E(Y)\,\tfrac{r\omega}{\tau} + O\left(\tfrac{1}{\tau^2}\right)\right) \\
&= \psi_N^{*[\![\tau]\!]}\left(\log\left(1+E(Y)\,\tfrac{r\omega}{\tau} + O\left(\tfrac{1}{\tau^2}\right)\right)\right) \\
&\leq \psi_N^{*[\![\tau]\!]}\left(E(Y)\,\tfrac{r\omega}{\tau} + O\left(\tfrac{1}{\tau^2}\right)\right) \\
&= \left(1+\zeta\cdot E(Y)\,\tfrac{r\omega}{\tau} + O\left(\tfrac{1}{\tau^2}\right)\right)^{[\![\tau]\!]} \to e^{r\omega\zeta E(Y)},\quad \tau\to\infty,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

so daß $\psi_{N(\tau)}(\psi_Y^*(\frac{r\omega}{\tau}))$ beschränkt bleibt für $\tau \to \infty$. Damit sind aber die Voraussetzungen von Satz 3.3 erfüllt, so daß gemäß Korollar 3.1 bzw. (3.25) für $\tau \geq \frac{\omega}{\delta_X}$ $\psi_N(E[T(\frac{Y}{\tau})]) \in \mathcal{S}(\mathfrak{X})$ ist mit $\|\psi_N(E[T(\frac{Y}{\tau})])\| \leq M\,\psi_N(\psi_Y^*(\frac{\omega}{\tau}))$, und nach (3.28) folgt

$$T(\xi) = \lim_{\tau\to\infty} \psi_{N(\tau)}(E[T(\tfrac{Y}{\tau})]) = \lim_{\tau\to\infty} \{\psi_N(E[T(\tfrac{Y}{\tau})])\}^{[\![\tau]\!]}. \tag{3.43}$$

Für die ganzzahlige Teilfolge erhält man somit die Beziehungen (3.38) und (3.39).

Wählt man in Korollar 3.2 $N \equiv 1$ und $Y \equiv X$, so erhält man unmittelbar das schwache Gesetz großer Zahlen für Halbgruppenoperatoren (3.3) in der durch (3.4) gegebenen Form zurück. Andererseits ergibt sich die Beziehung (3.39) auch aus (3.3) bzw. (3.4), wenn dort $X = \sum_{k=1}^{N} Y_k$ gesetzt wird (vgl. Korollar 3.1). Beziehung (3.39) ist also eine andere, äquivalente Darstellung der Beziehung (3.3), wodurch die Namensgebung "Schwaches Gesetz großer Zahlen für Halbgruppenoperatoren" auch für Korollar 3.2 gerechtfertigt ist.

Wir wollen nun eine Verallgemeinerung von Korollar 3.2 auf den Fall nicht-identischer Verteilungen angeben:

Satz 3.4. Seien $\{N_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ nicht-negative ganzzahlige Zufallsvariable und $\{Y_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ nicht-negative reelle Zufallsvariable derart, daß die erzeugenden Funktionen ψ_{N_k}, $k \in \mathbb{N}$ an einer Stelle $\delta_N > 1$ und die momenterzeugenden Funktionen $\psi^*_{Y_k}$, $k \in \mathbb{N}$ an einer Stelle $\delta_Y > 0$ existieren; ferner gelte für ein $\xi > 0$ $E(N_k)\cdot E(Y_k) = \xi$, $k \in \mathbb{N}$, und $\prod_{k=1}^{n} \psi_{N_k}(\psi^*_{Y_k}(\frac{r\omega}{n}))$ bleibe beschränkt für ein $r > 1$ bei $n \to \infty$. Ferner gelte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{V(N_k)}{\{E(N_k)\}^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{V(Y_k)}{E(Y_k)} = 0. \tag{3.44}$$

Dann sind für $n \geq \frac{\omega}{\delta_X}$ mit δ_X aus (2.27) $\psi_{N_k}(E[T(\frac{Y_k}{n})])$ Operatoren aus $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ mit

$$\| \psi_{N_k}(E[T(\tfrac{Y_k}{n})])\| \leq M\ \psi_{N_k}(\psi^*_{Y_k}(\tfrac{\omega}{n})),\ k \in \mathbb{N}, \tag{3.45}$$

und es gilt die Darstellung

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \psi_{N_k}(E[T(\tfrac{Y_k}{n})]) \tag{3.46}$$

im Sinne der starken Operatortopologie.

Beweis. O. B. d. A. können die $\{N_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ als unabhängig angenommen werden, da lediglich die Verteilungen dieser Zufallsvariablen sowie deren erzeugende Funktionen eine Rolle spielen. Ferner seien für $k \in \mathbb{N}$ $\{Y_{kj};\ j \in \mathbb{N}\}$ identisch wie Y_k verteilte Zufallsvariablen, die in ihrer Gesamtheit (auch von den N_k, $k \in \mathbb{N}$) unabhängig seien. Definiere (unabhängige) Zufallsvariable $\{Z_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ durch

$$Z_k := \sum_{j=1}^{N_k} Y_{kj}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.47}$$

Dann existieren gemäß Korollar 3.1 bzw. (3.25) die Operatoren $E(T(\frac{Z_k}{n})) = \psi_{N_k}(E[(T(\frac{Y_k}{n})])$ in $\mathcal{E}(\mathfrak{X})$ für $n \geq \frac{\omega}{\delta_X}$ mit

$$\|\psi_{N_k}(E[T(\frac{Y_k}{n})])\| \leq M\ \psi_{N_k}(\psi^*_{Y_k}(\frac{\omega}{n})), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wegen $E(Z_k) = E(N_k)E(Y_k) = \xi$ und

$$V(Z_k) = E(N_k)V(Y_k) + V(N_k)\ \{E(Y_k)\}^2, \quad k \in \mathbb{N}$$

gemäß (2.30) und (2.31) besagt (3.44) also in äquivalenter Form

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} V(Z_k) = 0. \tag{3.48}$$

Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen konvergiert damit $\overline{Z}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k$ stochastisch gegen ξ; ferner gilt wie im Beweis zu Satz 3.3 für jedes $f \in \mathfrak{X}$

$$E(\|T(\overline{Z}_n)f\|^r) \leq M^r\|f\|^r \psi^*_{\overline{Z}_n}(\omega r)$$

$$= M^r\|f\|^r \prod_{k=1}^{n} \psi_{N_k}(\psi^*_{Y_k}(\frac{\omega r}{n})), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.49}$$

was nach Voraussetzung bei $n \to \infty$ beschränkt bleibt. Mit Satz 1.5 und wegen

$$E[T(\overline{Z}_n)] = \prod_{k=1}^{n} E[T(\frac{Y_k}{n})] \tag{3.50}$$

gemäß Satz 3.2 folgt nun die Behauptung.

Man beachte, daß im Fall $Y_k \equiv Y$, $k \in \mathbb{N}$ die entsprechende Version von Satz 3.4 auch aus dem Satz 3.3 (etwa wie beim Beweis von Korollar 3.2) gefolgert werden kann.

Wir wollen nun zeigen, wie durch Spezialisierung von Satz 3.3 und Korollar 3.2 die bisher in der Literatur angegebenen Darstellungssätze wiedergewonnen werden können. Von besonderem Interesse sind dabei die Fälle $Y \equiv \xi$ bzw. $Y \equiv 1$ (was zu den sogenannten Hauptsätzen erster Art führt) sowie der Fall einer Exponentialverteilung $Ex(\frac{1}{\xi})$ bzw. $Ex(1)$ mit Erwartungswert ξ bzw. 1 für Y (was zu den sogenannten Hauptsätzen zweiter Art führt). Im letzteren Fall ist nämlich für $\tau > \omega\xi$ bzw. $\tau > \omega$

$$E\left[T\left(\frac{Y}{\tau}\right)\right] = \frac{\tau}{\xi} \int_0^\infty e^{-\tau t/\xi} T(t)(.)dt = \frac{\tau}{\xi} R\left(\frac{\tau}{\xi}\right)$$

bzw. (3.51)

$$E\left[T\left(\frac{Y}{\tau}\right)\right] = \tau R(\tau)$$

(man beachte, daß gemäß Beispiel 2.2 $\psi_Y^*(t) = 1/(1-\xi t)$, $t < 1/\xi$ bzw. $\psi_Y^*(t) = 1/(1-t)$, $t < 1$ gilt). Wir formulieren daher für diese wichtigen Spezialfälle noch einmal

<u>Korollar 3.3.</u> Es sei $\{N(\tau) \mid \tau > 0\}$ ein stochastischer Prozeß mit den nicht-negativen ganzen Zahlen als Zustandsraum derart, daß die erzeugende Funktion $\psi_{N(\tau)}$ des Prozesses für alle $\tau > 0$ an einer Stelle $\delta > 1$ existiert und $\frac{1}{\tau} N(\tau)$ für $\tau \to \infty$ stochastisch gegen eine reelle Konstante $\xi > 0$ bzw. gegen die Zahl 1 konvergiert. Bleibt dann für ein $r > 1$ und $\tau \to \infty$ der Ausdruck $\psi_{N(\tau)}(e^{r\omega/\tau})$ bzw. $\psi_{N(\tau)}(e^{r\omega\xi/\tau})$ beschränkt, so gilt

$$T(\xi) = \lim_{\tau\to\infty} \psi_{N(\tau)}\left(T\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)$$

bzw. (3.52)

$$T(\xi) = \lim_{\tau\to\infty} \psi_{N(\tau)}(T(\tfrac{\xi}{\tau})).$$

Bleibt dagegen für ein $r > 1$ und $\tau \to \infty$ der Ausdruck $\psi_{N(\tau)}(\frac{\tau}{\tau - r\omega})$ bzw. $\psi_{N(\tau)}(\frac{\tau}{\tau - r\omega\xi})$ beschränkt, so gilt

$$T(\xi) = \lim_{\tau\to\infty} \psi_{N(\tau)}(\tau R(\tau))$$

bzw. (3.53)

$$T(\xi) = \lim_{\tau\to\infty} \psi_{N(\tau)}(\tfrac{\tau}{\xi}\, R(\tfrac{\tau}{\xi}))$$

im Sinne der starken Operatortopologie.

(Man beachte, daß aus Monotoniegründen unter den für (3.53) gemachten Voraussetzungen auch (3.52) gilt.)

<u>Korollar 3.4.</u> Es sei N eine nicht-negative ganzzahlige Zufallsvariable derart, daß die erzeugende Funktion ψ_N an einer Stelle $\delta > 1$ existiert und $E(N) = \xi > 0$ bzw. $E(N) = 1$ gilt. Dann gelten die Darstellungen

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} (\psi_N(T(\tfrac{1}{n})))^n = \lim_{n\to\infty} (\psi_N(n\ R(n))^n \tag{3.54}$$

beziehungsweise

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} (\psi_N(T(\tfrac{\xi}{n})))^n = \lim_{n\to\infty} (\psi_N(\tfrac{n}{\xi}\ R(\tfrac{n}{\xi})))^n \tag{3.55}$$

im Sinne der starken Operatortopologie.

<u>Beispiel 3.2.</u> Es sei $\{N(\tau)\ |\ \tau > 0\}$ ein Poisson-Prozeß mit Parameter $\xi > 0$ bzw. mit Paramter 1. Dann gilt bekanntlich $\frac{1}{\tau}N(\tau) \to \xi$ bzw. 1 fast sicher (und damit auch stochastisch) für $\tau \to \infty$. Ferner existiert $\psi_{N(\tau)}(t) = e^{\tau\xi(t-1)}$ bzw. $e^{\tau(t-1)}$ für jedes $t \geq 0$, und es gilt für jedes $u,v > 0$

$$\lim_{\tau\to\infty} \exp(u\tau(\frac{\tau}{\tau-v} - 1)) = \lim_{\tau\to\infty} \exp(\frac{uv\tau}{\tau-v}) = e^{uv}. \tag{3.56}$$

Damit sind die Voraussetzungen von Korollar 3.3 erfüllt, so daß (Hille)

$$T(\xi) = \lim_{\tau\to\infty} \exp\{\xi\tau[T(\tfrac{1}{\tau})-I]\} = \lim_{\tau\to\infty} e^{\xi A_{1/\tau}}$$

$$T(\xi) = \lim_{\tau\to\infty} \exp\{\tau[T(\tfrac{\xi}{\tau}) - I]\} = \lim_{\tau\to\infty} e^{\xi A_{\xi/\tau}} \tag{3.57}$$

bzw. (Phillips)

$$T(\xi) = \lim_{\tau\to\infty} \exp\{\xi\tau^2 R(\tau) - \xi\tau I\}$$

$$T(\xi) = \lim_{\tau\to\infty} \exp\{\frac{\tau^2}{\xi} R(\tfrac{\tau}{\xi}) - \tau I\}. \tag{3.58}$$

Die folgenden Beispiele sind nun sämtlich von der Form (3.3) des schwachen Gesetzes der großen Zahlen für Halbgruppenoperatoren mit der durch (3.4) gegebenen Darstellung.

Beispiel 3.3.

1) Ist N binomialverteilt über $\{0,1\}$ mit Erwartungswert $\xi \in (0,1)$, dann existiert $\psi_N(t) = 1 - \xi + \xi t$ für jedes $t \geq 0$, also gilt (Kendall)

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} ((1-\xi)I+\xi T(\tfrac{1}{n}))^n = \lim_{n\to\infty} (I + \tfrac{\xi}{n} A_{1/n})^n \tag{3.59}$$

bzw. (Chung)

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} ((1-\xi)I + \xi n\, R(n))^n. \tag{3.60}$$

2) Ist N binomialverteilt über $\{0,1\}$ mit Erwartungswert $\frac{1}{2}$ und $Y \equiv 2\xi$ bzw. exponentialverteilt mit Erwartungswert 2ξ, dann existiert $\psi_N(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t$ für alle $t \geq 0$ sowie $\psi_Y^*(t) = e^{2\xi t}$

für alle $t \geq 0$ bzw. $\psi_Y^*(t) = (1-2\xi t)^{-1}$ für $t \leq \delta_Y$ mit $\delta_Y < \frac{1}{2\xi}$, also gilt

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2} I + \tfrac{1}{2} T(\tfrac{2\xi}{n}))^n = \lim_{n\to\infty} (I + \tfrac{1}{2n} A_{2\xi/n})^n \tag{3.61}$$

bzw.

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2} I + \tfrac{n}{4\xi} R(\tfrac{n}{2\xi}))^n. \tag{3.62}$$

3) Ist N binomialverteilt über $\{0,2\}$ mit Erwartungswert 1, dann existiert $\psi_N(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t^2$ für alle $t \geq 0$, also gilt

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2} I + \tfrac{1}{2} T(\tfrac{2\xi}{n}))^n = \lim_{n\to\infty} (I + \tfrac{1}{2n} A_{2\xi/n})^n \tag{3.63}$$

bzw.

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2} I + \tfrac{1}{2} (\tfrac{n}{\xi} R(\tfrac{n}{\xi}))^2)^n. \tag{3.64}$$

4) Ist N geometrisch verteilt mit Erwartungswert $\xi > 0$, dann existiert $\psi_N(t) = (1+\xi-\xi t)^{-1}$ für $t \leq \delta_N$ mit $\delta_N < 1 + \frac{1}{\xi}$, also gilt (Shaw)

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} ((1+\xi) I - \xi T(\tfrac{1}{n}))^{-n} = \lim_{n\to\infty} (I - \tfrac{\xi}{n} A_{1/n})^{-n} \tag{3.65}$$

bzw. (Chung)

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} ((1+\xi) I - \xi n\, R(n))^{-n}. \tag{3.66}$$

5) Ist N geometrisch verteilt mit Erwartungswert 1, dann existiert $\psi_N(t) = (2-t)^{-1}$ für $t \leq \delta_N$ mit $\delta_N < 2$, also gilt (Shaw)

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} (2I - T(\tfrac{\xi}{n}))^{-n} = \lim_{n\to\infty} (I - \tfrac{1}{n} A_{\xi/n})^{-n} \tag{3.67}$$

bzw.

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} (2I - \frac{n}{\xi} R(\frac{n}{\xi}))^{-n}. \tag{3.68}$$

6) Ist $N \equiv 1$, dann existiert $\psi_N(t) = t$ für alle $t \geq 0$, also gilt (Post-Widder)

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{\xi} R(\frac{n}{\xi}))^{n}. \tag{3.69}$$

7) Ist $N \equiv \xi$ ganzzahlig, dann existiert $\psi_N(t) = t^\xi$ für alle $t \geq 0$, also gilt

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} (n\, R(n))^{n\xi}. \tag{3.70}$$

8) Ist $N \equiv 1$ und Y Gamma-verteilt mit Parametern $\beta = 1$ und $\gamma = \xi$ (vgl. 2.15), dann existiert $\psi_Y^*(t) = (1-t)^{-\xi}$ für $t \leq \delta_Y < 1$, also gilt

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \{\frac{n^\xi}{\Gamma(\xi)} \int_0^\infty t^{\xi-1} e^{-nt} T(t)(.)dt\}^n. \tag{3.71}$$

Dies ist eine andere Form von Satz 4 b in Butzer-Hahn (1980), welche wegen (1.35) für ganzzahlige ξ auch mit (3.70) zusammenfällt.

Die Darstellungsformeln (3.61), (3.62), (3.64), (3.68) und (3.70) wurden bisher - trotz ihrer großen Artverwandtheit mit den übrigen Beziehungen des Beispiels 3.2 - nicht in der Literatur erwähnt.

Man beachte, daß sich in den Fällen 2) und 3) dieses Beispiels unter verschiedenen Voraussetzungen dieselben Hauptsätze erster Art (3.61) und (3.63), jedoch unterschiedliche Hauptsätze zweiter Art (3.62) und (3.64) ergeben.

In den obigen Darstellungssätzen trat bisher der infinitesimale Erzeuger A der Halbgruppe nur in Form der Resolvente $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda > \omega$ auf, da A in der Regel unbeschränkt ist und daher z. B. die Betrachtung naheliegender Grenzwerte wie etwa $\lim_{n\to\infty} (I + \frac{\xi A}{n})^n$ (motiviert durch die durch (3.57) beschriebene exponentielle Struktur der Halbgruppe oder auch die Beziehung (3.59)) i. a. nicht sinnvoll ist (vgl. hierzu auch eine entsprechende Bemerkung in Hille-Phillips (1957), Seite 352). Für die Existenz solcher Grenzwerte wird man also in der Regel die Beschränktheit von A (bzw. äquivalent die Stetigkeit der Halbgruppe bezüglich der gleichmäßigen Operatortopologie) voraussetzen müssen. In diesem Fall kann die in den bisherigen Darstellungssätzen zugrundeliegende starke Konvergenz durch Konvergenz im Sinne der gleichmäßigen Operatortopologie ersetzt werden, und es läßt sich ein dem Korollar 3.4 entsprechender Darstellungssatz formulieren, indem die dort auftretenden Halbgruppenoperatoren durch abgebrochene Taylorentwicklungen ersetzt werden. Zum Beweis des entsprechenden Satzes benötigen wir

Lemma 3.2. Sei $\mathcal{S}$ eine Banach-Algebra mit Produkt $\circ$ und Einselement I, und U und $V \in \mathcal{S}$ seien kommutierbar (d. h. es gilt $U \circ V = V \circ U$) mit $\|V\| > 0$. Dann gilt für $K := \max(1, \|U\|)$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|U^n - (\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} V^k)^n\| \leq \|U - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} V^k\| K^{n-1} \frac{e^{n\|V\|} - 1}{\|V\|}. \tag{3.72}$$

Dabei sei vereinbarungsgemäß $V^0 := I$.

Beweis. Sei $V_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} V^k$ und $v_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \|V\|^k$, $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\|U^n - (\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} V^k)^n\| = \|U^n - V_m^n\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|U^{n-k-1} (U - V_m) V_m^k\|$$

$$\leq \|U - V_m\| \sum_{k=0}^{n-1} \|U\|^{n-k-1} v_m^k \leq \|U - V_m\| K^{n-1} \frac{v_m^n - 1}{v_m - 1}$$

$$\leq \|U - V_m\| K^{n-1} \frac{e^{n\|V\|} - 1}{\|V\|}.$$

Im Falle $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ läßt sich damit folgender Darstellungssatz formulieren:

Satz 3.5. Ist der infinitesimale Erzeuger A der Halbgruppe beschränkt und N eine nicht-negative ganzzahlige Zufallsvariable derart, daß die erzeugende Funktion ψ_N an einer Stelle $\delta > 1$ existiert, so gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$:
$\psi_N(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\frac{t}{n} A)^k)$ ist für jedes $t > 0$ und $n \geq \frac{t\|A\|}{\log \delta}$ ein beschränkter linearer Operator aus $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ mit

$$\|\psi_N(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\frac{t}{n} A)^k)\| \leq \psi_N(e^{t/n \|A\|}), \tag{3.73}$$

und es gelten die Beziehungen

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \{\psi_N(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\frac{A}{n})^k)\}^n, \text{ falls } E(N) = \xi > 0 \tag{3.74}$$

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \{\psi_N(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\frac{\xi}{n} A)^k)\}^n, \text{ falls } E(N) = 1 \tag{3.75}$$

im Sinne der gleichmäßigen Operatortopologie.

Beweis. Für $m \in \mathbb{N}$ und $t > 0$ ist

$$\|\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\frac{t}{n} A)^k\| \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\frac{t}{n} \|A\|)^k \leq e^{\frac{t}{n}\|A\|}, \quad n \in \mathbb{N},$$

so daß für $n \geq \frac{t\|A\|}{\log \delta}$ gilt: $\|\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\frac{t}{n} A)^k\| \leq \delta$, also
$\psi_N(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\frac{t}{n} A)^k)$ in $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ existiert mit

$$\|\psi_N(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\frac{t}{n} A)^k)\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} e^{tj/n\|A\|} P(N=j)$$

$$= E(e^{t/n\|A\| N}) = \psi_N(e^{t/n\|A\|}).$$

Sei nun $\{N_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ eine Folge unabhängiger, identisch wie N verteilter Zufallsvariablen; ferner bezeichne $\bar{N}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} N_k$. Gemäß (1.31) sowie der gleichmäßigen Stetigkeit der Halbgruppe folgt nun zunächst im Fall $E(N) = 1$ mit Lemma 3.2

$$\| \{\psi_N(T(\tfrac{\xi}{n}))\}^n - \{\psi_N(\sum_{k=0}^{m} \tfrac{1}{k!}(\tfrac{\xi}{n} A)^k)\}^n \|$$

$$\leq E(\| \{T(\tfrac{\xi}{n})\}^{n\bar{N}_n} - \{\sum_{k=0}^{m} \tfrac{1}{k!}(\tfrac{\xi}{n}A)^k\}^{n\bar{N}_n} \|)$$

$$\leq \| T(\tfrac{\xi}{n}) - \sum_{k=0}^{m} \tfrac{1}{k!}(\tfrac{\xi}{n}A)^k \| \; E(e^{\xi\|A\|\bar{N}_n} \frac{e^{\xi\|A\|\bar{N}_n} - 1}{\frac{\xi}{n}\|A\|})$$

$$\leq \frac{\|A\|^{m+1}}{m!} \int_0^{\xi/n} (\tfrac{\xi}{n} - u)^m \|T(u)\| du \; \frac{n}{\xi\|A\|} \; E(e^{2\xi\|A\|\bar{N}_n})$$

$$\leq \frac{\|A\|^m}{(m+1)!}(\tfrac{\xi}{n})^m \; e^{\xi/n\|A\|} \; \psi^*_{\bar{N}_n}(2\xi\|A\|)$$

$$\leq \frac{\|A\|^m}{(m+1)!}(\tfrac{\xi}{n})^m \; e^{\xi/n\|A\|} \; e^{2\xi\|A\|} \; \exp\{\frac{8\xi^2\|A\|^2\psi_N(\delta)}{n\, e^2(\log\delta - \frac{2\xi\|A\|}{n})^2}\} \tag{3.76}$$

für $n > \frac{2\xi\|A\|}{\log\delta}$ gemäß Satz 2.1. Es ist also

$$\| \{\psi_N(T(\tfrac{\xi}{n}))\}^n - \{\psi_N(\sum_{k=0}^{m} \tfrac{1}{k!}(\tfrac{\xi}{n}A)^k)\}^n \| = O(\frac{1}{n^m})$$

für $n \to \infty$, so daß wegen der linken Gleichheit in (3.55) nun die Beziehung (3.75) folgt. Der Beweis für den Fall $E(N) = \xi$ verläuft analog, in dem in (3.76) $\xi = 1$ gesetzt wird.

Satz 3.5 ist eine Verallgemeinerung eines entsprechenden Satzes für $m = 1$ in Pfeifer (1983 b).

In dem nachfolgenden Beispiel wollen wir zeigen, wie durch Wahl spezifischer Verteilungen bekannte Halbgruppendarstellungen bei beschränktem A wiedergewonnen werden können (Pfeifer (1983 b)).

Beispiel 3.4.

1) Ist N binomialverteilt über $\{0,1\}$ mit Erwartungswert $\xi \in (0,1)$, also $\psi_N(t) = 1 - \xi + \xi t$, $t \geq 0$, so gilt

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} ((1-\xi)I+\xi(I+\frac{A}{n}))^n = \lim_{n\to\infty} (I+\frac{\xi}{n}A)^n. \tag{3.77}$$

2) Ist N geometrisch verteilt mit Erwartungswert $\xi > 0$, also $\psi_N(t) = (1+\xi-\xi t)^{-1}$ für $t < 1+\frac{1}{\xi}$, so gilt

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} ((1+\xi)I - \xi(I+\frac{A}{n}))^{-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (I-\frac{\xi}{n}A)^{-n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{\xi}R(\frac{n}{\xi}))^n. \tag{3.78}$$

3) Ist N Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\xi > 0$, also $\psi_N(t) = e^{\xi(t-1)}$, $t \geq 0$, so gilt

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \exp\{n\xi(I+\frac{A}{n}-I)\} = e^{\xi A}. \tag{3.79}$$

Man beachte, daß durch die letzte Beziehung auch ein wahrscheinlichkeitstheoretischer Beweis für die bekannte Beziehung (1.32) gegeben wird, da die in dem Beweis von Satz 3.5 in der Beziehung (3.76) verwendete Ungleichung $\|T(t)\| \leq e^{t\|A\|}$, $t \geq 0$ o. B. d. A. auch durch die stets gültige Abschätzung (1.26) ersetzt werden kann.

Die Beziehung (3.77) für beliebige $\xi > 0$ ergibt sich natürlich auch sofort aus (3.75) mit $N \equiv 1$.

Offensichtlich ergeben sich die Beziehungen (3.77), (3.78) und (3.79) formal auch dadurch, daß in den Darstellungssätzen von Kendall (3.59), Shaw (3.65) und Hille (3.57) die Operatoren $A_{1/n}$ bzw. $A_{1/\tau}$ durch ihren Grenzwert A ersetzt werden.

III. 3 Umkehrsätze

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen allgemein Darstellungssätze von Halbgruppenoperatoren typischerweise stochastischen Charakter haben. Wir formulieren dazu

Satz 3.6. Es sei für ein $\xi > 0$ ψ_ξ eine in einem Intervall $[0,\delta]$ mit $\delta > 1$ analytische Funktion mit nicht-negativen Koeffizienten und $Y \geq 0$ eine Zufallsvariable mit $E(Y) = 1$, deren momenterzeugende Funktion ψ_Y^* an einer Stelle $\delta_Y > 0$ existieren möge. Gilt dann für eine beliebige stark stetige nicht-periodische Halbgruppe $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ mit $\|T(t)\| > 0$, $t > 0$, die Beziehung

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \psi_\xi^n(E[T(\tfrac{Y}{n})]) \tag{3.80}$$

- also insbesondere etwa

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \psi_\xi^n(T(\tfrac{1}{n})) \qquad \text{oder} \tag{3.81}$$

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \psi_\xi^n(n\, R(n)) \quad - \tag{3.82}$$

so ist ψ_ξ notwendig die erzeugende Funktion einer nicht-negativen, ganzzahligen Zufallsvariablen N mit $E(N) = \xi$, d. h. in diesem Falle gilt (3.80) bzw. (3.81) bzw. (3.82) für jede stark stetige Halbgruppe und alle Zufallsvariablen Y mit den obigen Eigenschaften.

<u>Beweis.</u> Sei etwa $\psi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi)t^k$ für $0 \leq t \leq \delta$ mit $a_k(\xi) \geq 0$, $k \geq 0$. Dann ist $\psi_\xi(1) > 0$, da sonst $\psi_\xi \equiv 0$, also insbesondere $\|T(\xi)\| = 0$ wäre im Widerspruch zur Voraussetzung. In diesem Fall wird aber durch die Folge $\{\frac{a_k(\xi)}{\psi_\xi(1)}, k \geq 0\}$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer nicht-negativen ganzzahligen Zufallsvariablen N gegeben vermöge

$$P(N=k) = \frac{a_k(\xi)}{\psi_\xi(1)}, \quad k \geq 0. \tag{3.83}$$

Damit existiert aber die erzeugende Funktion $\psi_N = \frac{\psi_\xi}{\psi_\xi(1)}$ von N etwa an der Stelle $\delta > 1$, und bezeichnet $\zeta = E(N)$, so gilt gemäß Korollar 3.2

$$T(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \psi_N^n(E[T(\tfrac{Y}{n})]). \tag{3.84}$$

Für $f \in \mathcal{X}$ mit $\|T(\xi)f\| > 0$ (ein solches existiert nach Voraussetzung) ist nun aber

$$\begin{aligned} 0 < \|T(\xi)f\| &= \lim_{n\to\infty} \|\psi_\xi^n(E[T(\tfrac{Y}{n})])f\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \{\psi_\xi(1)\}^n \|\psi_N^n(E[T(\tfrac{Y}{n})])f\|, \end{aligned} \tag{3.85}$$

wobei

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_N^n(E[T(\tfrac{Y}{n})])f\| = \|T(\zeta)f\| < \infty \tag{3.86}$$

wegen (3.84). Dies bedeutet aber $\psi_\xi(1) \geq 1$. Andererseits ist für $g \in \mathcal{X}$ mit $\|T(\zeta)g\| > 0$ auch

$$\infty > \|T(\xi)g\| = \lim_{n\to\infty} \{\psi_\xi(1)\}^n \|\psi_N^n(E[T(\tfrac{Y}{n})])f\| \tag{3.87}$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_N^n(E[T(\tfrac{Y}{n})])f\| = \|T(\zeta)g\| > 0, \tag{3.88}$$

d. h. es gilt auch $\psi_\xi(1) \leq 1$ und damit $\psi_\xi(1) = 1$, so daß

$\psi_\xi \equiv \psi_N$. Zu zeigen bleibt noch die Gleichheit $\zeta = \xi$. Sei etwa $\zeta \neq \xi$, o. B. d. A. $\zeta < \xi$. Dann gilt mit $\varepsilon = \xi - \zeta$

$$T(\xi+\varepsilon) = T(\xi)T(\zeta) = T(\zeta)T(\varepsilon) = T(\zeta+\varepsilon) = T(\xi), \tag{3.89}$$

woraus folgt, daß die Halbgruppe die Periode ε besitzen müßte im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 3.7. Es sei ψ eine in einem Intervall $[0,\delta]$ mit $\delta > 1$ analytische Funktion mit nicht-negativen Koeffizienten und $Y \geq 0$ eine Zufallsvariable mit $E(Y) = \xi > 0$, deren momenterzeugende Funktion ψ_Y^* an einer Stelle $\delta_Y > 0$ existieren möge. Gilt dann für eine beliebige stark stetige nicht-periodische Halbgruppe $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ mit $\|T(t)\| > 0$, $t > 0$, die Beziehung

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \psi^n(E[T(\tfrac{Y}{n})]) \tag{3.90}$$

- also insbesondere etwa

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \psi^n(T(\tfrac{\xi}{n})) \qquad \text{oder} \tag{3.91}$$

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \psi^n(\tfrac{n}{\xi} R(\tfrac{n}{\xi})) \quad - \tag{3.92}$$

so ist ψ notwendig die erzeugende Funktion einer nicht-negativen ganzzahligen Zufallsvariablen N mit $E(N) = 1$, d. h. in diesem Falle gilt (3.90) bzw. (3.91) bzw. (3.92) für jede stark stetige Halbgruppe und alle Zufallsvariablen Y mit den obigen Eigenschaften.

Beweis. Analog dem Beweis von Satz 3.6, indem ψ_ξ durch ψ und in den Beziehungen (3.84) bis (3.89) ζ durch $\zeta \cdot \xi$ ersetzt wird.

Satz 3.8. Es sei für ein $\xi > 0$ ψ_ξ eine in einem Intervall $[0,\delta]$ mit $\delta > 1$ analytische Funktion mit nicht-negativen Koeffizienten. Gilt dann für eine beliebige nicht-periodische gleichmäßig stetige Halbgruppe $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ mit beschränktem Erzeuger A und $\|T(t)\| > 0$, $t > 0$, die Beziehung

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \psi_\xi^n\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(\frac{A}{n}\right)^k\right) \qquad (3.93)$$

für ein $\xi > 0$ und ein $m \in \mathbb{N}$, so ist ψ_ξ notwendig die erzeugende Funktion einer nicht-negativen ganzzahligen Zufallsvariablen N mit $E(N) = \xi$, d. h. in diesem Falle gilt (3.93) für jede gleichmäßig stetige Halbgruppe.

Beweis. Analog dem Beweis zu Satz 3.6, indem $E\left[T\left(\frac{Y}{n}\right)\right]$ durch $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(\frac{A}{n}\right)^k$ ersetzt wird.

Die Sätze (3.6) bis (3.8) sind eine Verallgemeinerung von Theorem 1 in Pfeifer (1983 b).

Wie man sieht, lassen sich unter der Nichtnegativitätsbedingung an die Darstellungsfunktionen ψ_ξ bzw. ψ der Sätze 3.6 bis 3.8 keine anderen als wahrscheinlichkeitstheoretische Darstellungen der Form (3.80), (3.90) bzw. (3.93) finden; dies ist auch der Grund dafür, warum in der Literatur bisher nur solche Darstellungen zu finden sind.

Die Sätze 3.6 bis 3.8 sind im wesentlichen Sätze vom Bohman-Typ (Bohman (1952), vgl. auch Kapitel 1.2.2 in Butzer-Berens (1967)), d. h. aus der Konvergenz für bestimmte "Test"-Operatoren wird auf die Konvergenz für eine ganze Klasse von Operatoren geschlossen. Wegen der speziellen Struktur der Darstellungssätze genügt hier dabei eine (im wesentlichen) beliebige Test-Halbgruppe (im Gegensatz etwa zu Theorem 1.2.6 in Butzer-Berens (1967), wo drei spezielle Test-Operatoren benötigt werden).

Abschließend wollen wir noch zeigen, daß ohne die in den Sätzen 3.6 bis 3.8 gemachten Nichtnegativitätsbedingungen auch nicht-stochastische Halbgruppendarstellungen möglich sind, also diese Bedingungen für den stochastischen Charakter solcher Darstellungen wesentlich sind.

Satz 3.9. Es sei $\psi_\xi(t) = 1-\xi+\xi t$ für $\xi > 1$. Dann gilt für jede gleichmäßig stetige Halbgruppe $\{T(t) \mid t \geq 0\}$

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \psi_\xi^n(E[T(\tfrac{Y}{n})]) \quad \text{bzw.} \tag{3.94}$$

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} \psi_\xi^n\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(\frac{A}{n}\right)^k\right) \tag{3.95}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$, wenn $Y \geq 0$ eine Zufallsvariable mit $E(Y) = 1$ bezeichnet, deren momenterzeugende Funktion ψ_Y^* an einer Stelle $\delta_Y > 0$ existiert.

Beweis. Es bezeichne $S_n = E[T(\frac{Y}{n})]$ bzw. $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(\frac{A}{n}\right)^k$. Wegen $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$ und $\psi_Y^*(t) = 1+t+O(t^2)$, $t \downarrow 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n\{E[T(\tfrac{Y}{n})]-I\} = \lim_{n\to\infty} n\{\psi_Y^*(\tfrac{A}{n})-I\} = A \tag{3.96}$$

und damit allgemein

$$A = \lim_{n\to\infty} n(S_n - I). \tag{3.97}$$

Sei nun $V_n = n(S_n-I)$. Dann gilt

$$\|\psi_\xi^n(S_n)-e^{\xi V_n}\| = \|(I+\tfrac{\xi}{n}V_n)^n - (e^{\xi/n\, V_n})^n\|$$

$$\leq \|I+\tfrac{\xi}{n}V_n - e^{\xi/n\, V_n}\| \sum_{k=0}^{n-1} \|I+\tfrac{\xi}{n}V_n\|^k \|e^{\xi/n\, V_n}\|^{n-k-1}$$

$$\leq \left(\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\xi}{n}\right)^k \frac{\|V_n\|^k}{k!} \right) n\left(1 + \frac{\xi}{n} \|V_n\|\right)^n e^{\xi\|V_n\|}$$

$$\leq \frac{1}{n} e^{3\xi\|V_n\|} \leq \frac{1}{n} e^{4\xi\|A\|} \text{ für genügend große n.} \qquad (3.98)$$

Wegen $A = \lim_{n\to\infty} V_n$ ist aber auch

$$T(\xi) = e^{\xi A} = \lim_{n\to\infty} e^{\xi V_n}, \qquad (3.99)$$

so daß

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} (e^{\xi V_n} + (\psi_\xi^n(S_n) - e^{\xi V_n})) = \lim_{n\to\infty} \psi_\xi^n(S_n). \qquad (3.100)$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Man beachte, daß für $\xi > 1$ die Funktion ψ_ξ aus Satz 3.9 keine erzeugende Funktion darstellt! Als Erweiterung der Formeln von Kendall (3.59) und Chung (3.60) erhält man aus Satz 3.9 sofort das

Korollar 3.5. Für jede gleichmäßig stetige Halbgruppe $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ gilt für alle $\xi > 0$:

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} ((1-\xi)I + \xi T(\tfrac{1}{n}))^n \qquad (3.101)$$

$$T(\xi) = \lim_{n\to\infty} ((1-\xi)I + \xi n\, R(n))^n \qquad (3.102)$$

im Sinne der gleichmäßigen Operatortopologie.

IV. Wahrscheinlichkeitstheoretische Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit

In diesem Kapitel wollen wir mit Hilfe der in Abschnitt II bereitgestellten Abschätzungen für Momente bzw. momenterzeugende Funktionen geeigneter Zufallsvariablen die Konvergenzgeschwindigkeit der in Kapitel III vorgestellten allgemeinen wie auch speziellen Darstellungssätze untersuchen. Der hier gewählte Zugang basiert dabei auf einer durch (1.31) implizierten allgemeinen (stochastischen) Taylorentwicklung der Halbgruppe (bzw. der approximierenden Operatoren) und unterscheidet sich damit wesentlich von der in Butzer-Hahn (1980) gewählten Methode, welche nur für Kontraktionshalbgruppen anwendbar ist und auch nicht die bestmöglichen Resultate liefert.

IV. 1 Abschätzungen unter Glattheitsbedingungen

Die hier u. a. vorgestellten Abschätzungen für $E[T(\overline{X}_n)]f - T(\xi)f$ bzw. $\|E[T(\overline{X}_n)]f - T(\xi)f\|$ - also die Approximationsgüte im schwachen Gesetz großer Zahlen für Halbgruppenoperatoren, welches ja auch die allgemeine Darstellung des Korollar 3.2 umfaßt - benutzen neben Momentabschätzungen wesentlich den infinitesimalen Erzeuger A der Halbgruppe und führen je nachdem, ob $f \in D(A)$, $D(A^2)$ oder $D(A^3)$ vorausgesetzt wird, zu unterschiedlichen Ergebnissen. In den letzten beiden Fällen wird dabei die bestmögliche Konvergenzordnung $O(\frac{1}{n})$ erreicht, wobei die auftretenden Konstanten konkret durch geeignete Momente der zugrundeliegenden Verteilungen bzw. Abschätzungen hierfür gegeben sind. Im letzteren Fall lassen sich sogar die bestmöglichen Konstanten für den die (exakte) Konvergenzordnung bestimmenden Term angeben, wobei die Varianz der zugrundeliegenden Verteilung eine zentrale Rolle spielt. Da die verschiedenen Darstellungssätze im wesentlichen durch Spezifizierung der Verteilungen aus dem schwachen Gesetz großer Zahlen für Halbgruppenoperatoren hervorgehen, lassen sich damit also - ohne Verwendung individueller Methoden - unmittelbar konkrete, scharfe Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit in den einzelnen Darstellungssätzen angeben.

Lemma 4.1. Für $f \in D(A^r)$, $r \geq 1$ und beliebige $s,t \geq 0$ gilt

$$T(t)f-T(s)f = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(t-s)^k}{k!} T(s) A^k f + \int_s^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} T(u) A^r f du. \quad (4.1)$$

Dabei ist vereinbarungsgemäß für $s > t$

$$\int_s^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} T(u) A^r f du := -\int_t^s \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} T(u) A^r f du. \quad (4.2)$$

Beweis. Die Beziehung (4.1) gilt aufgrund von (1.31) offensichtlich für $r = 1$. Angenommen, (4.1) sei für ein $r \geq 1$ gültig. Dann trifft dies auch für $r+1$ zu, denn für $f^* \in \mathfrak{X}^*$ und $f \in D(A^{r+1})$ gilt

$$f^*\left(\int_s^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} T(u) A^r f du\right) = \int_s^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} f^*(T(u) A^r f) du$$

$$= \frac{-(t-u)^r}{r!} f^*(T(u) A^r f)\Big|_s^t + \int_s^t \frac{(t-u)^r}{r!} \frac{d}{du} f^*(T(u) A^r f) du$$

$$= \frac{(t-s)^r}{r!} f^*(T(s) A^r f) + \int_s^t \frac{(t-u)^r}{r!} f^*(AT(u) A^r f) du$$

$$= f^*\left(\frac{(t-s)^r}{r!} T(s) A^r f\right) + f^*\left(\int_s^t \frac{(t-u)^r}{r!} T(u) A^{r+1} f du\right)$$

$$= f^*\left(\frac{(t-s)^r}{r!} T(s) A^r f + \int_s^t \frac{(t-s)^r}{r!} T(u) A^{r+1} f du\right), \quad (4.3)$$

so daß damit auch

$$\int_s^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} T(u) A^r f du$$

$$= \frac{(t-s)^r}{r!} T(s) A^r f + \int_s^t \frac{(t-u)^r}{r!} T(u) A^{r+1} f du. \quad (4.4)$$

Damit ist aber (4.1) auch für $r+1$ gültig.

Man beachte, daß sich für $s = 0$ gerade die Beziehung (1.31) ergibt.

Mit Hilfe von Lemma 4.1 können wir nun eine erste fundamentale Abschätzung beweisen.

<u>Satz 4.1.</u> Es sei X eine nicht-negative Zufallsvariable, deren momenterzeugende Funktion ψ_X^* an einer Stelle $\delta_X > 0$ existieren möge. Dann gelten für $\zeta \geq 0$ die folgenden Beziehungen:

$$\|E[T(X)]f - T(\zeta)f\|$$

$$\leq M\|Af\|\,[e^{\omega\zeta}E(|X-\zeta|) + \omega\sqrt{E(X-\zeta)^4}\sqrt{\psi_X^*(2\omega)}], \qquad (4.5)$$

falls $f \in D(A)$ und $\delta_X \geq 2\omega$;

$$E[T(X)]f - T(\zeta)f = E(X-\zeta)T(\zeta)Af + R_1(f) \text{ mit}$$

$$\|R_1(f)\| \leq \frac{M}{2}\|A^2f\|\,[e^{\omega\zeta}E(X-\zeta)^2 + \omega\{E(X-\zeta)^4\}^{3/4}\sqrt[4]{\psi_X^*(4\omega)}], \qquad (4.6)$$

falls $f \in D(A^2)$ und $\delta_X \geq 4\omega$;

$$E[T(X)]f - T(\zeta)f = E(X-\zeta)T(\zeta)Af + \frac{1}{2}E(X-\zeta)^2T(\zeta)A^2f + R_2(f) \text{ mit}$$

$$\|R_2(f)\| \leq \frac{M}{6}\|A^3f\|\,[e^{\omega\zeta}E(|X-\zeta|^3) + \omega\{E(X-\zeta)^6\}^{2/3}\sqrt[3]{\psi_X^*(3\omega)}], \qquad (4.7)$$

falls $f \in D(A^3)$ und $\delta_X \geq 3\omega$.

<u>Beweis.</u> Gemäß Lemma 4.1 ist für $f \in D(A^r)$ und $s,t \geq 0$ $\int_s^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} T(u)A^r f\,du$ eine (stark) stetige Funktion der Variablen s und t, also auch (Borel-) meßbar bezüglich s und t. Im ersten

Fall gilt somit

$$E[T(X)]f-T(\zeta)f = E\left[\int_\zeta^X T(u)A\,f\,du\right] \text{ mit}$$

$$\left\|E\left[\int_\zeta^X T(u)Afdu\right]\right\| = \left\|E\left[1_{\{X>\zeta\}}\int_\zeta^X T(u)Afdu - 1_{\{X\leq\zeta\}}\int_X^\zeta T(u)Afdu\right]\right\|$$

$$\leq E\left[1_{\{X>\zeta\}}\left\|\int_\zeta^X T(u)Afdu\right\|\right] + E\left[1_{\{X\leq\zeta\}}\left\|\int_X^\zeta T(u)Afdu\right\|\right]$$

$$\leq \|Af\|ME\left[1_{\{X>\zeta\}}\int_\zeta^X e^{\omega u}du + 1_{\{X\leq\zeta\}}\int_X^\zeta e^{\omega u}du\right]$$

$$\leq \|Af\|ME\left[1_{\{X>\zeta\}}(X-\zeta)e^{\omega X} + 1_{\{X\leq\zeta\}}(\zeta-X)e^{\omega\zeta}\right]$$

$$= \|Af\|ME\left[|X-\zeta|e^{\omega\zeta} + 1_{\{X>\zeta\}}(X-\zeta)(e^{\omega X}-e^{\omega\zeta})\right]$$

$$\leq \|Af\|ME\left[|X-\zeta|e^{\omega\zeta} + \omega 1_{\{X>\zeta\}}(X-\zeta)^2 e^{\omega X}\right]$$

$$\leq \|Af\|M\{e^{\omega\zeta}E(|X-\zeta|) + \omega\, E[(X-\zeta)^2 e^{\omega X}]\}$$

$$\leq \|Af\|M\{e^{\omega\zeta}E(|X-\zeta|) + \omega\sqrt{E(X-\zeta)^4}\;\sqrt{E(e^{2\omega X})}\} \qquad (4.8)$$

wegen $e^b - e^a \leq (b-a)e^b$ für alle $a \leq b$ und der Hölder-Ungleichung. Hieraus ergibt sich aber sofort (4.7). Im zweiten Fall erhält man analog zu (4.8)

$$E[T(X)]f-T(\zeta)f = E(X-\zeta)T(\zeta)Af + E\left[\int_\zeta^X (X-u)T(u)A^2fdu\right]$$

mit

$$\left\|E\left[\int_\zeta^X (X-u)T(u)A^2fdu\right]\right\|$$

$$\leq \|A^2f\| ME\left[1_{\{X>\zeta\}} \int_{\zeta}^{X}(X-u)e^{\omega u}du + 1_{\{X\leq\zeta\}} \int_{X}^{\zeta}(u-X)e^{\omega u}du\right]$$

$$\leq \|A^2f\| ME\left[1_{\{X>\zeta\}}e^{\omega X} \int_{\zeta}^{X}(X-u)du + 1_{\{X\leq\zeta\}}e^{\omega\zeta} \int_{X}^{\zeta}(u-X)du\right]$$

$$= \|A^2f\| ME\left[1_{\{X>\zeta\}} \frac{1}{2}(X-\zeta)^2e^{\omega X} + 1_{\{X\leq\zeta\}} \frac{1}{2}(X-\zeta)^2e^{\omega\zeta}\right]$$

$$= \|A^2f\|\frac{M}{2} E\left[(X-\zeta)^2e^{\omega\zeta} + 1_{\{X>\zeta\}}(X-\zeta)^2(e^{\omega X}-e^{\omega\zeta})\right]$$

$$\leq \|A^2f\|\frac{M}{2}\{e^{\omega\zeta}E(X-\zeta)^2 + \omega E[|X-\zeta|^3e^{\omega X}]\}$$

$$\leq \|A^2f\|\frac{M}{2}\{e^{\omega\zeta}E(X-\zeta)^2 + \omega\{E(X-\zeta)^4\}^{3/4} \sqrt[4]{E(e^{4\omega X})}\}, \tag{4.9}$$

woraus (4.6) unmittelbar folgt.

Im letzten Fall erhält man analog

$$E[T(X)]f-T(\zeta)f$$

$$= E(X-\zeta)T(\zeta)Af + \frac{1}{2}E(X-\zeta)^2T(\zeta)A^2f+E\left[\int_{\zeta}^{X}\frac{(X-u)^2}{2} T(u)\, A^3f du\right]$$

mit

$$\left\|E\left[\int_{\zeta}^{X}\frac{(X-u)^2}{2} T(u)\, A^3f du\right]\right\|$$

$$\leq \|A^3f\| ME\left[1_{\{X>\zeta\}} \frac{1}{6}(X-\zeta)^3e^{\omega X} + 1_{\{X\leq\zeta\}} \frac{1}{6}(\zeta-X)^3e^{\omega\zeta}\right]$$

$$\leq \|A^3f\|\frac{M}{6}\{e^{\omega\zeta}E(|X-\zeta|^3) + \omega E\left|(X-\zeta)^4e^{\omega X}\right|\}$$

$$\leq \|A^3f\|\frac{M}{6}\{e^{\omega\zeta}E(|X-\zeta|^3) + \omega\{E(X-\zeta)^6\}^{2/3} \sqrt[3]{E(e^{3\omega X})}\}, \tag{4.10}$$

woraus (4.7) unmittelbar folgt.

Natürlich können in den Abschätzungen der Restglieder in Satz 4.1 auch andere Hölder-Konstanten verwendet werden; die hier u.a. getroffene Wahl der vierten absoluten Momente von $X - \xi$ wird sich jedoch insofern als nützlich erweisen, als die entsprechenden Momente der in Beispiel 3.3 zugrundegelegten Verteilungen in diesem Fall noch relativ einfach berechenbar sind.

Wegen der zentralen Bedeutung des schwachen Gesetzes großer Zahlen für Halbgruppenoperatoren (3.3) für die einzelnen Darstellungssätze wollen wir Satz 4.1 für diesen Fall noch einmal speziell formulieren:

<u>Korollar 4.1.</u> Es sei $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge unabhängiger, identisch wie $X \geq 0$ verteilter Zufallsvariablen, deren momenterzeugende Funktion ψ_X^* an einer Stelle $\delta_X > 0$ existieren möge. Bezeichnet dann $\xi = E(X)$ und $\sigma^2 = V(X)$, so gilt

$$\begin{aligned} &\|E[T(\bar{X}_n)]f - T(\xi)f\| \\ &\leq M\|Af\| \left[e^{\omega\xi} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \omega \sqrt{E(\bar{X}_n - \xi)^4}\ \{\psi_X^*(\tfrac{2\omega}{n})\}^{n/2} \right] \end{aligned} \tag{4.11}$$

für $f \in D(A)$ und $n \geq \frac{2\omega}{\delta_X}$ bzw.

$$\begin{aligned} &\|E[T(\bar{X}_n)]f - T(\xi)f\| \\ &\leq Me^{\omega\xi}\|Af\| \left[\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{\omega}{n} \frac{4\sqrt{2}}{e} \frac{1}{\eta^2} \psi_X^*(\eta) \exp\{ \frac{4\omega^2 \psi_X^*(\eta)}{ne^2(\eta - \frac{2\omega}{n})^2} \} \right] \end{aligned} \tag{4.12}$$

für $f \in D(A)$ und $n > \max(\frac{2\omega}{\eta}, \frac{60}{\psi_X^*(\eta)})$ mit $0 < \eta \leq \delta_X$;

$$\|E[T(\bar{X}_n)]f - T(\xi)f\|$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2 f\| \left[e^{\omega\xi}\ \frac{\sigma^2}{n} + \omega\{E(\bar{X}_n-\xi)^4\}^{3/4}\{\psi_X^*(\tfrac{4\omega}{n})\}^{n/4}\right] \tag{4.13}$$

für $f \in D(A^2)$ und $n \geq \frac{4\omega}{\delta_X}$ bzw.

$$\|E[T(\bar{X}_n)]f - T(\xi)f\|$$

$$\leq \frac{M}{2} e^{\omega\xi} \|A^2 f\| \left[\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\omega}{n\sqrt{n}}\ \frac{8\sqrt[4]{8}}{e\sqrt{e}}\ \frac{1}{\eta^3}\ \{\psi_X^*(\eta)\}^{3/2} \exp\{\frac{8\omega^2\ \psi_X^*(\eta)}{ne^2(\eta - \frac{4\omega}{n})^2}\}\right] \tag{4.14}$$

für $f \in D(A^2)$ und $n > \max(\frac{4\omega}{\eta}, \frac{60}{\psi_X^*(\eta)})$ mit $0 < \eta \leq \delta_X$;

$$E[T(\bar{X}_n)]f - T(\xi)f = \frac{\sigma^2}{2n}\ T(\xi)A^2 f + R_2(f) \quad \text{mit}$$

$$\|R_2(f)\| \leq \frac{M}{6} e^{\omega\xi} \|A^3 f\| \left[\frac{2}{n\sqrt{n}}\ \frac{3\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\ \frac{1}{\eta^3}\ \{\psi_X^*(\eta)\}^{3/2} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{\omega}{n^2}\ \frac{36\cdot\sqrt[3]{4}}{e^2}\ \frac{1}{\eta^4}\ \{\psi_X^*(\eta)\}^2\ \exp\{\frac{6\omega^2\ \psi_X^*(\eta)}{ne^2(\eta - \frac{3\omega}{n})^2}\}\right] \tag{4.15}$$

für $f \in D(A^3)$ und $n > \max(\frac{3\omega}{\eta}, \frac{45}{\psi_X^*(\eta)})$ mit $0 < \eta \leq \delta_X$. Dabei kann σ^2 noch durch

$$\sigma^2 \leq \frac{4}{e}\ \frac{1}{\eta^2}\ \psi_X^*(\eta) \quad \text{mit } 0 < \eta \leq \delta_X \tag{4.16}$$

abgeschätzt werden.

<u>Beweis.</u> Die Resultate ergeben sich aus Satz 4.1 vermöge Satz 2.1 und Satz 2.3. Im Falle von (4.11) beachte man noch, daß aufgrund der Jensen'schen Ungleichung

$$\{E(|\bar{X}_n-\xi|)\}^2 \leq E(\bar{X}_n-\xi)^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

also

$$E(|\overline{X}_n-\xi|) \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

gilt.

Man beachte, daß Beziehungen der Art (4.13), (4.14) bzw. (4.15) in der Approximationstheorie auch unter dem Namen "Voronovskaja-Bedingung" bekannt sind (vgl. auch Voronovskaja (1932)).

Korollar 4.2. Unter den Voraussetzungen des Korollars 3.2 mit δ_X aus (2.27) gilt:

$$\|\psi_N^n(E[T(\tfrac{Y}{n})])f - T(\xi)f\| \leq Me^{\omega\xi}\|Af\|\Big[\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{2}{\sqrt{e}}\,\frac{1}{\eta}\sqrt{\psi_N(\psi_Y^*(\eta))} + \dots$$

$$\dots + \frac{\omega}{n}\,\frac{4\sqrt{2}}{e}\,\frac{1}{\eta^2}\,\psi_N(\psi_X^*(\eta))\exp\Big\{\frac{4\omega^2\psi_N(\psi_Y^*(\eta))}{ne^2(\eta-\frac{2\omega}{n})^2}\Big\}\Big] \tag{4.17}$$

für $f \in D(A)$ und $n > \max(\frac{2\omega}{\eta}, \frac{60}{\psi_N(\psi_Y^*(\eta))})$ mit $0 < \eta \leq \delta_X$;

$$\|\psi_N^n(E[T(\tfrac{Y}{n})])f - T(\xi)f\| \leq \frac{M}{2}e^{\omega\xi}\|A^2f\|\Big[\frac{1}{n}\,\frac{4}{e}\,\frac{1}{\eta^2}\,\psi_N(\psi_Y^*(\eta)) + \dots$$

$$\dots + \frac{\omega}{n\sqrt{n}}\,\frac{8\sqrt[4]{8}}{e\sqrt{e}}\,\frac{1}{\eta^3}\,\{\psi_N(\psi_Y^*(\eta))\}^{3/2}\exp\Big\{\frac{8\omega^2\psi_N(\psi_Y^*(\eta))}{ne^2(\eta-\frac{4\omega}{n})^2}\Big\}\Big] \tag{4.18}$$

für $f \in D(A^2)$ und $n > \max(\frac{4\omega}{\eta}, \frac{60}{\psi_N(\psi_Y^*(\eta))})$ mit $0 < \eta \leq \delta_X$;

$$\psi_N^n(E[T(\tfrac{Y}{n})])f - T(\xi)f$$

$$= \frac{1}{2n}(E(N)V(Y) + \xi^2\frac{V(N)}{(E(N))^2})\ T(\xi)A^2f + R_2(f)$$

mit

$$\|R_2(f)\| \leq \frac{M}{6} e^{\omega\xi} \|A^3 f\| \left[\frac{2}{n\sqrt{n}} \frac{3\sqrt{3}}{e\sqrt{e}} \frac{1}{\eta^3} \{\psi_N(\psi_Y^*(\eta))\}^{3/2} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{\omega}{n^2} \frac{36\sqrt[3]{4}}{e^2} \frac{1}{\eta^4} \{\psi_N(\psi_Y^*(\eta))\}^2 \exp\{\frac{6\omega^2 \psi_N(\psi_Y^*(\eta))}{ne^2(\eta - \frac{3\omega}{n})^2}\} \right] \tag{4.19}$$

für $f \in D(A^3)$ und $n > \max(\frac{3\omega}{\eta}, \frac{45}{\psi_N(\psi_Y^*(\eta))})$ mit $0 < \eta \leq \delta_X$.

Beweis. Unmittelbar ersichtlich aufgrund der Korollare 3.2, 3.1, 4.1 und (2.30) bzw. (2.31) sowie (2.28).

Aus Korollar 4.2 ergeben sich durch die Spezifizierung $\psi_Y^*(t) = e^t$ bzw. $\psi_Y^*(t) = \frac{1}{1-t}$ bzw. $\psi_Y^*(t) = e^{t\xi}$ bzw. $\psi_Y^*(t) = \frac{1}{1-t\xi}$, t geeignet auch sofort entsprechende Abschätzungen für die Beziehungen (3.54) und (3.55) des Korollars 3.4, wobei jeweils $V(Y) = 0$ bzw. $V(Y) = 1$ bzw. $V(Y) = 0$ bzw. $V(Y) = \xi^2$; eine entsprechende Spezifizierung ist natürlich auch für Korollar 4.1 möglich.

Korollar 4.3. Unter den Voraussetzungen des Satzes 3.5 gilt: Für $E(N) = \xi$ ist für $f \in \mathfrak{X}$

$$\psi_N^n\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(\frac{A}{n}\right)^k\right) f - T(\xi) f = \frac{1}{2n} V(N) T(\xi) A^2 f + R_2(f)$$

mit

$$\|R_2(f)\| \leq \frac{1}{6} e^{\|A\|} \|A^3 f\| \left[\frac{2}{n\sqrt{n}} \frac{3\sqrt{3}}{e\sqrt{e}} \frac{1}{\log^3 \delta} \{\psi_N(\delta)\}^{3/2} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{\|A\|}{n^2} \frac{36\sqrt[3]{4}}{e^2} \frac{1}{\log^4 \delta} \psi_N^2(\delta) \exp\{\frac{6\|A\|^2 \psi_N(\delta)}{ne^2(\log \delta - \frac{3\|A\|}{n})^2}\} \right] + \dots$$

$$\dots + \frac{\|A\|^m}{(m+1)!} \|f\| \frac{1}{n^m} e^{(2+\frac{1}{n})\|A\|} \exp\{\frac{8\|A\|^2 \psi_N(\delta)}{ne^2(\log \delta - \frac{2\|A\|}{n})^2}\} \tag{4.20}$$

für $n > \max(\frac{3\|A\|}{\log\delta}, \frac{45}{\psi_N(\delta)})$;

für $E(N) = 1$ ist dagegen für $f \in \mathfrak{X}$

$$\psi_N^n(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\frac{\xi}{n} A)^k) - T(\xi)f = \frac{\xi^2}{2n} V(N)T(\xi)A^2 f + R_2(f)$$

mit

$$\|R_2(f)\| \leq \frac{1}{6} e^{\xi\|A\|}\|A^3 f\| \Big[\frac{2}{n\sqrt{n}} \frac{3\sqrt{3}}{e\sqrt{e}} \frac{\xi^3}{\log^3\delta} \{\psi_N(\delta)\}^{3/2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\|A\|}{n^2} \frac{36\sqrt[3]{4}}{e^2} \frac{\xi^4}{\log^4\delta} \psi_N^2(\delta)\exp\{\frac{6\xi^2\|A\|^2 \psi_N(\delta)}{ne^2(\log\delta - \frac{3\xi\|A\|}{n})^2}\}\Big] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\|A\|^m}{(m+1)!} \|f\| (\frac{\xi}{n})^m e^{\xi(2+\frac{1}{n})\|A\|} \exp\{\frac{8\xi^2\|A\|^2 \psi_N(\delta)}{ne^2(\log\delta - \frac{2\xi\|A\|}{n})^2}\} \qquad (4.21)$$

für $n > \max(\frac{3\xi\|A\|}{\log\delta}, \frac{45}{\psi_N(\delta)})$.

Beweis. Satz 3.5, (3.76) und Korollar 4.2 unter Benutzung der Tatsache, daß im vorliegenden Fall $M = 1$ und $\omega = \|A\|$ gewählt werden kann.

Qualitativ besagt also insbesondere Korollar 4.1, daß

$$\|E[T(\overline{X}_n)]f - T(\xi)f\| \leq \frac{M}{2} e^{\omega\xi}\|A^2 f\|\frac{\sigma^2}{n} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}}) \qquad (4.22)$$

für $f \in D(A^2)$ und

$$\|E[T(\overline{X}_n)]f - T(\xi)f\| = \frac{\sigma^2}{2n} \|T(\xi)A^2 f\| + O(\frac{1}{n\sqrt{n}}) \qquad (4.23)$$

für $f \in D(A^3)$ bei $n \to \infty$ gilt.

Dies bedeutet u. a., daß auch für $f \in D(A^r)$ mit $r \geq 2$ die durch

(4.22) und (4.23) gegebene Konvergenzordnung $O(\frac{1}{n})$ nicht verbessert werden kann. Sogar die in (4.22) auftretenden Konstanten können nicht verbessert werden, wie man am Beispiel der Halbgruppe der Linkstranslationen (Beispiel 3.1) sehen kann: dort ist ja wegen $M = 1$, $\omega = 0$

$$\|T(\xi)A^2f\| = Me^{\omega\xi}\|A^2f\| \tag{4.24}$$

für $f \in D(A^2)$, so daß in diesem Fall in (4.22) sogar Gleichheit gilt für alle $f \in D(A^3) \subset D(A^2)$.

Wie man anhand der Beziehung (4.7) sehen kann, läßt sich auch bei (nicht-trivialen) stochastischen Darstellungssätzen von anderer Form als (3.3) - etwa in der Art des Satzes 3.4 - keine bessere Konvergenzordnung als $O(\frac{1}{n})$ erreichen; entsprechend für Satz 3.3 (vgl. auch eine ähnliche Bemerkung in Hahn (1980)).

Im folgenden wollen wir nun mit Hilfe von Satz 4.1 bzw. Korollar 4.1 und 4.3 noch explizite Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit der in den Beispielen 3.2, 3.3 und 3.4 vorgestellten Darstellungssätze angeben. Wir beschränkten uns dabei auf den interessanteren Fall $f \in D(A^2)$; die Fälle $f \in D(A)$ bzw. $f \in D(A^3)$ sind natürlich analog zu behandeln.

<u>Korollar 4.4.</u> Es gilt für $\xi > 0$ in (3.57) (Hille)

$$\|T(\xi)f - e^{\xi A_{1/\tau}}f\|$$

$$\leq \frac{M}{2}e^{\omega\xi}\|A^2f\|\left[\frac{\xi}{\tau} + 2\omega\sqrt{\frac{2\xi^3}{\tau^3}}\exp\left\{\frac{2\omega^2\xi}{\tau}e^{4\omega/\tau}\right\}\right] \tag{4.25}$$

für $f \in D(A^2)$ und $\tau \geq \frac{1}{\xi}$

beziehungsweise in (3.58) (Phillips)

$$\|T(\xi)f - \exp\{\xi\tau^2R(\tau) - \xi\tau I\}f\|$$

$$\leq \frac{M}{2} e^{\omega\xi} \|A^2 f\| \left[\frac{2\xi}{\tau} + 6\omega \frac{e^{\xi}}{\tau\sqrt{\tau}} \exp\{\frac{4\omega^2\xi}{\tau-4\omega}\}\right] \tag{4.26}$$

für $f \in D(A^2)$ und $\tau > \max(16, 4\omega)$.

Beweis. Für einen Poisson-Prozeß $\{N(\tau) \mid \tau > 0\}$ mit Parameter $\xi > 0$ ist

$$E(N(\tau) - \xi\tau)^4 = 3\xi^2\tau^2 + \xi\tau \leq 4\xi^2\tau^2 \tag{4.27}$$

für $\tau \geq \frac{1}{\xi}$. Wegen

$$E(N(\tau) - \xi\tau)^2 = V(N(\tau)) = \xi\tau \tag{4.28}$$

für $\tau > 0$ und

$$\psi_{N(\tau)}(t) = e^{\xi\tau(t-1)}, \quad \tau > 0, \ t \in \mathbb{R} \tag{4.29}$$

ergibt sich damit die erste Behauptung aus (3.57) und Satz 4.1, wenn dort X durch $\frac{1}{\tau} N(\tau)$ ersetzt wird. Man beachte dabei, daß der Ausdruck $\{\psi^*_{\frac{1}{\tau}N(\tau)}(4\omega)\}^{1/4}$ noch gemäß (1.7) durch

$$\{\psi^*_{\frac{1}{\tau}N(\tau)}(4\omega)\}^{1/4} = \{\psi_{N(\tau)}(e^{4\omega/\tau})\}^{1/4}$$

$$= e^{\xi\tau/4(e^{4\omega/\tau}-1)} \leq \exp\{\frac{\xi\tau}{4}(\frac{4\omega}{\tau} + \frac{8\omega^2}{\tau^2} e^{4\omega/\tau})\}$$

$$= e^{\omega\xi} \exp(\frac{2\omega^2\xi}{\tau} e^{4\omega/\tau}) \tag{4.30}$$

abgeschätzt werden kann.

Wählt man dagegen $X(\tau)$ wie in (3.29) mit exponentialverteiltem Y mit Erwartungswert 1, so gilt

$$E(X(\tau) - \xi\tau)^2 = V(X(\tau)) = 2\xi\tau \tag{4.31}$$

gemäß (2.31), und wie im Beweis zu Satz 2.2 erhält man mit (4.29) für $\tau > 1$

$$E\left[\left(\frac{1}{\tau}X(\tau)-\xi\right)^4\right] \le 2\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{\tau}}\right)^4 e^{-4}\exp\left\{\frac{\xi\tau}{\tau-\sqrt{\tau}}\right\} \tag{4.32}$$

wegen

$$\psi^*_{\frac{1}{\tau}X(\tau)}(t) = \psi_{N(\tau)}\left(\psi^*_Y\left(\frac{t}{\tau}\right)\right) = \exp\left\{\xi\tau\left(\frac{1}{1-\frac{t}{\tau}}\right)-1\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{\xi\tau t}{\tau-t}\right\} \quad \text{für } \tau > t. \tag{4.33}$$

Beachtet man noch, daß die Funktion $\tau \to \frac{\tau}{\tau-\sqrt{\tau}}$ monoton fallend ist, so ergibt sich wieder mit Satz 4.1 und (3.58)

$$\|T(\xi)f - \exp\{\xi\tau^2R(\tau) - \xi\tau I\}f\|$$

$$\le \frac{M}{2}\|A^2f\|\left[e^{\omega\xi}\frac{2\xi}{\tau} + \omega\,\frac{64}{e^3\tau}\,\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{\tau}}\exp\left\{\frac{3}{4}\,\frac{\xi\tau}{\tau-\sqrt{\tau}} + \frac{1}{4}\,\frac{4\xi\tau\omega}{\tau-4\omega}\right\}\right]$$

$$\le \frac{M}{2}\|A^2f\|e^{\omega\xi}\left[\frac{2\xi}{\tau} + 6\omega\,\frac{1}{\tau\sqrt{\tau}}\exp\left\{\frac{3}{4}\,\frac{\xi\tau}{\tau-\sqrt{\tau}} + \frac{4\omega^2\xi}{\tau-4\omega}\right\}\right]$$

$$\le \frac{M}{2}\|A^2f\|e^{\omega\xi}\left[\frac{2\xi}{\tau} + 6\omega\,\frac{e^{\xi}}{\tau\sqrt{\tau}}\exp\left\{\frac{4\omega^2\xi}{\tau-4\omega}\right\}\right] \tag{4.34}$$

für $\tau > \max(16,\ 4\omega)$ und $f \in D(A^2)$.

<u>Korollar 4.5.</u> Es gilt für $0 < \xi < 1$ in (3.59) (Kendall)

$$\|T(\xi)f - \{(1-\xi)I + \xi T(\tfrac{1}{n})\}^n f\|$$

$$\le \frac{M}{2}\|A^2f\|\left[e^{\omega\xi}\,\frac{\xi(1-\xi)}{n} + 2\omega\sqrt{\frac{2\xi^3(1-\xi)^3}{n^3}}\,\left((1-\xi)+\xi e^{4\omega/n}\right)^{n/4}\right]$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\|e^{\omega\xi}\left[\frac{\xi(1-\xi)}{n} + 2\omega\sqrt{\frac{2\xi^3(1-\xi)^3}{n^3}}\exp\left\{\frac{2\omega^2\xi}{n}e^{4\omega/n}\right\}\right] \tag{4.35}$$

für $f \in D(A^2)$ und $n \geq \frac{1}{\xi(1-\xi)} - 6$

bzw. in (3.60) (Chung)

$$\|T(\xi)f - \{(1-\xi)I + \xi nR(n)\}^n f\|$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\|\left[e^{\omega\xi}\frac{\xi(2-\xi)}{n} + 25\omega\sqrt{\frac{(1+\xi)^3}{n^3}}\left(1+\frac{4\omega\xi}{n-4\omega}\right)^{n/4}\right]$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\|e^{\omega\xi}\left[\frac{\xi(2-\xi)}{n} + 25\omega\sqrt{\frac{(1+\xi)^3}{n^3}}\exp\left\{\frac{4\omega^2\xi}{n-4\omega}\right\}\right] \tag{4.36}$$

für $f \in D(A^2)$ und $n > \max(4\omega, \frac{60}{1+\xi})$;

für $\xi > 0$ gilt in (3.61)

$$\|T(\xi)f - \{\tfrac{1}{2}I + \tfrac{1}{2}T(\tfrac{2\xi}{n})\}^n f\|$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\|\left[e^{\omega\xi}\frac{\xi^2}{n} + \frac{5}{2}\omega\frac{\xi^3}{n\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{8\omega\xi/n}\right)^{n/4}\right]$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\|e^{\omega\xi}\left[\frac{\xi^2}{n} + \frac{5}{2}\omega\frac{\xi^3}{n\sqrt{n}}\exp\left\{\frac{4\omega^2\xi^2}{n}e^{8\omega\xi/n}\right\}\right] \tag{4.37}$$

für $f \in D(A^2)$ und alle $n \in \mathbb{N}$

bzw. in (3.62)

$$\|T(\xi)f - \{\tfrac{1}{2}I + \tfrac{n}{4\xi}R(\tfrac{n}{2\xi})\}^n f\|$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\|\left[e^{\omega\xi}\frac{3\xi^2}{n} + 353\omega\frac{\xi^3}{n\sqrt{n}}\left(1+\frac{4\omega\xi}{n-8\omega\xi}\right)^{n/4}\right]$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\|e^{\omega\xi}\left[\frac{3\xi^2}{n} + 353_\omega \frac{\xi^3}{n\sqrt{n}} \exp\left\{\frac{8\omega^2\xi^2}{n-8\omega\xi}\right\}\right] \tag{4.38}$$

für $f \in D(A^2)$ und $n > \max(8\omega\xi, 40)$

bzw. in (3.64)

$$\left\|T(\xi)f - \left\{\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\xi}R\left(\frac{n}{\xi}\right)\right)^2\right\}^n f\right\|$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\|\left[e^{\omega\xi}\frac{2\xi^2}{n} + 95\omega\frac{\xi^3}{n\sqrt{n}}\left(1 + \frac{4\omega\xi n - 8\omega^2\xi^2}{n^2 - 8\omega\xi n + 16\omega^2\xi^2}\right)^{n/4}\right]$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\|e^{\omega\xi}\left[\frac{2\xi^2}{n} + 95\omega\frac{\xi^3}{n\sqrt{n}} \exp\left\{2\omega^2\xi^2\frac{3n-8\omega\xi}{(n-4\omega\xi)^2}\right\}\right] \tag{4.39}$$

für $f \in D(A^2)$, $n > \max(4\omega\xi, 24)$;

für $\xi > 0$ gilt in (3.65) (Shaw)

$$\left\|T(\xi)f - \left\{(1+\xi)I - \xi T\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^{-n} f\right\|$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\|\left[e^{\omega\xi}\frac{\xi(1+\xi)}{n} + 2\omega\sqrt{\frac{2\xi^3(1+\xi)^3}{n^3}}\left(1+\xi-\xi e^{4\omega/n}\right)^{-n/4}\right]$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\|e^{\omega\xi}\left[\frac{\xi(1+\xi)}{n} + 2\omega\sqrt{\frac{2\xi^3(1+\xi)^3}{n^3}} \exp\left\{\frac{4\omega^2\xi(1+\xi)e^{4\omega/n}}{n-4\omega\xi e^{4\omega/n}}\right\}\right] \tag{4.40}$$

für $f \in D(A^2)$ und $n > \max(4\omega(1+\xi), \frac{1}{\xi(1+\xi)} + 6)$

bzw. in (3.66) (Chung)

$$\left\|T(\xi)f - \{(1+\xi)I - \xi nR(n)\}^{-n} f\right\|$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\|\left[e^{\omega\xi}\frac{\xi(2+\xi)}{n} + 4\frac{\omega}{n\sqrt{n}}(2+\xi)^3\sqrt{(1+\xi)^3}\left(1 + \frac{4\omega\xi}{n-4(1+\xi)\omega}\right)^{n/4}\right]$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2 f\| e^{\omega\xi}\left[\frac{\xi(2+\xi)}{n} + 4\frac{\omega}{n\sqrt{n}}(2+\xi)^3\sqrt{(1+\xi)^3}\exp\{\frac{4\omega^2\xi(1+\xi)}{n-4(1+\xi)\omega}\}\right] \quad (4.41)$$

für $f \in D(A^2)$ und $n > \max(4\omega(1+\xi), \frac{60}{1+\xi})$;

für $\xi > 0$ gilt in (3.67) (Shaw)

$$\|T(\xi)f - \{2I - T(\tfrac{\xi}{n})\}^{-n} f\|$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2 f\|\left[e^{\omega\xi}\ \frac{2\xi^2}{n} + 8\omega\ \frac{\xi^3}{n\sqrt{n}}\ (2 - e^{4\omega\xi/n})^{-n/4}\right]$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2 f\| e^{\omega\xi}\left[\frac{2\xi^2}{n} + 8\omega\ \frac{\xi^3}{n\sqrt{n}}\ \exp\{8\omega^2\xi^2\ \frac{e^{4\omega\xi/n}}{n-4\omega\xi e^{4\omega\xi/n}}\}\right] \quad (4.42)$$

für $f \in D(A^2)$ und $n \geq \max(7,\ 6\omega\xi)$

bzw. in (3.68)

$$\|T(\xi)f - \{2I - \tfrac{n}{\xi}R(\tfrac{n}{\xi})\}^{-n} f\|$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2 f\|\left[e^{\omega\xi}\ \frac{3\xi^2}{n} + 353\omega\ \frac{\xi^3}{n\sqrt{n}}\ (1 + \frac{4\omega\xi}{n-8\omega\xi})^{n/4}\right]$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2 f\| e^{\omega\xi}\left[\frac{3\xi^2}{n} + 353\omega\ \frac{\xi^3}{n\sqrt{n}}\ \exp\{\frac{8\omega^2\xi^2}{n-8\omega\xi}\}\right] \quad (4.43)$$

für $f \in D(A^2)$ und $n > \max(8\omega\xi,\ 40)$;

für $\xi > 0$ gilt in (3.69) (Post-Widder)

$$\|T(\xi)f - \{\tfrac{n}{\xi}R(\tfrac{n}{\xi})\}^{n} f\|$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2 f\|\left[e^{\omega\xi}\ \frac{\xi^2}{n} + 3\sqrt{3}\ \omega\ \frac{\xi^3}{n\sqrt{n}}\ (1 + \frac{4\omega\xi}{n-4\omega\xi})^{n/4}\right]$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\| e^{\omega\xi}\left[\frac{\xi^2}{n} + 3\sqrt{3}\ \omega\ \frac{\xi^3}{n\sqrt{n}}\ \exp\left\{\frac{4\omega^2\xi^2}{n-4\omega\xi}\right\}\right] \qquad (4.44)$$

für $f \in D(A^2)$ und $n > 4\omega\xi$;

für $\xi > 0$ gilt in (3.71) (Butzer-Hahn)

$$\|T(\xi)f - \{\frac{n^\xi}{\Gamma(\xi)} \int_0^\infty t^{\xi-1}e^{-nt}T(t)(.)dt\}^n f\|$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\| \left[e^{\omega\xi}\ \frac{\xi^2}{n} + 3\sqrt{3}\ \omega\ \sqrt{\frac{\xi^3}{n^3}}(1 + \frac{4\omega}{n-4\omega})^{n\xi/4}\right]$$

$$\leq \frac{M}{2}\|A^2f\| e^{\omega\xi}\left[\frac{\xi^2}{n} + 3\sqrt{3}\ \omega\ \sqrt{\frac{\xi^3}{n^3}}\ \exp\left\{\frac{4\omega^2\xi}{n-4\omega}\right\}\right] \qquad (4.45)$$

für $f \in D(A^2)$ und $n > \max(4\omega, \frac{1}{\xi})$;

für $\xi > 0$ gilt in (3.77)

$$\|T(\xi) - (I + \frac{\xi}{n}A)^n\| \leq \frac{\|A\|}{2}\ \frac{\xi}{n}\ e^{(2+1/n)\xi\|A\|} \qquad (4.46)$$

bzw. allgemeiner für $m \geq 1$

$$\|T(\xi) - \{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\frac{\xi}{n}A)^k\}^n\| \leq \frac{\|A\|^m}{(m+1)!}\ (\frac{\xi}{n})^m e^{(2+1/n)\xi\|A\|} \qquad (4.47)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis.</u> Die Abschätzungen ergeben sich aus den angegebenen Beziehungen durch Abschätzungen der vierten Momente (gegebenenfalls mit Satz 2.3) sowie der entsprechenden momenterzeugenden Funktionen in Korollar 4.1 bzw. (3.76).
Im einzelnen gilt dabei (unter Verwendung der Bezeichnungen aus Lemma 2.2 bzw. (3.3)):
Ist N binomialverteilt über $\{0,1\}$ mit Erwartungswert $\xi \in (0,1)$ und $Y \equiv 1$, so ist $V(X) = \xi(1-\xi)$ und

$$E(\overline{X}_n-\xi)^4 = \frac{3}{n^2}\,\xi^2(1-\xi)^2 + \frac{1}{n^3}\,\xi(1-\xi)(6\xi^2-6\xi+1)$$

$$\leq \frac{4}{n^2}\,\xi^2(1-\xi)^2 \text{ für } n \geq \frac{1}{\xi(1-\xi)} - 6; \tag{4.48}$$

wegen $\psi_X^*(t) = 1-\xi+\xi e^t$, $t \geq 0$ ergibt sich damit (4.35). Ist dagegen Y exponentialverteilt mit Erwartungswert 1, so ist $V(X) = E(N)V(Y) + V(N)\{E(Y)\}^2 = \xi+\xi(1-\xi) = \xi(2-\xi)$ gemäß (2.31) und

$$E(\overline{X}_n-\xi)^4 \leq \frac{2}{n^2}\left(\frac{16}{e}\,\psi_X^*\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)^2$$

$$\leq \frac{512}{n^2e^2}\left(\psi_N\left(\psi_Y^*\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)\right)^2 = \frac{512}{n^2e^2}(1+\xi)^2 \tag{4.49}$$

für $n \geq \dfrac{60}{\psi_X^*(\frac{1}{2})} = \dfrac{60}{1+\xi}$

gemäß Satz 2.3; wegen $\psi_X^*(t) = 1-\xi+\xi\,\dfrac{1}{1-t} = \dfrac{1-t(1-\xi)}{1-t}$, $t < 1$ ergibt sich damit (4.36).

Ist N binomialverteilt über $\{0,1\}$ mit Erwartungswert $\frac{1}{2}$ und $Y \equiv 2\xi$, so ist $V(X) = \xi^2$ und

$$E(\overline{X}_n-\xi)^4 = \frac{3\xi^4}{n^2} - \frac{2\xi^4}{n^3} \leq \frac{3\xi^4}{n^2} \tag{4.50}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen $\psi_X^*(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2\xi t}$, $t \geq 0$ ergibt sich damit (4.37). Ist dagegen Y exponentialverteilt mit Erwartungswert 2ξ, so ist $V(X) = \frac{1}{2}V(Y) + \frac{1}{4}\{E(Y)\}^2 = 3\xi^2$ und

$$E(\overline{X}_n-\xi)^4 \leq \frac{2}{n^2}\left(\frac{64\xi^2}{e}\,\psi_X^*\left(\tfrac{1}{4\xi}\right)\right)^2$$

$$\leq \frac{8192\,\xi^4}{n^2e^2}\left(\psi_N\left(\psi_Y^*\left(\tfrac{1}{4\xi}\right)\right)\right)^2 = \frac{18432}{n^2e^2}\,\xi^4 \tag{4.51}$$

für $n \geq \frac{60}{\psi_X^*(\frac{1}{4\xi})} = 40$; wegen $\psi_X^*(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-2\xi t} = \frac{1-\xi t}{1-2\xi t}$, $t < \frac{1}{2\xi}$,

ergibt sich damit (4.38). Ist N binomialverteilt über $\{0,2\}$ mit Erwartungswert 1 und Y exponentialverteilt mit Erwartungswert ξ, so ist $V(X) = V(Y) + \{E(Y)\}^2 = 2\xi^2$ und

$$E(\overline{X}_n-\xi)^4 \leq \frac{2}{n^2}\left(\frac{16\xi^2}{e}\,\psi_X^*\left(\frac{1}{2\xi}\right)\right)^2$$

$$\leq \frac{512\,\xi^4}{n^2e^2}\left(\psi_N\left(\psi_Y^*\left(\frac{1}{2\xi}\right)\right)\right)^2 = \frac{3200}{n^2e^2}\,\xi^4 \tag{4.52}$$

für $n \geq \frac{60}{\psi^*(\frac{1}{2\xi})} = 24$; wegen $\psi_X^*(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-\xi t)^2}$, $t > \frac{1}{\xi}$ ergibt

sich damit (4.39). Ist N geometrisch verteilt mit Erwartungswert $\xi > 0$ und $Y \equiv 1$, so ist $V(X) = \xi(1+\xi)$ und

$$E(\overline{X}_n-\xi)^4 = \frac{3}{n^2}\,\xi^2(1+\xi)^2 + \frac{1}{n^3}\,\xi(1+\xi)(6\xi^2+6\xi+1)$$

$$\leq \frac{4}{n^2}\,\xi^2(1+\xi)^2 \quad \text{für } n \geq \frac{1}{\xi(1+\xi)}+6; \tag{4.53}$$

wegen $\psi_X^*(t) = (1+\xi-\xi e^t)^{-1}$, $t < \log(1+\frac{1}{\xi})$ ergibt sich damit (4.40). Ist dagegen Y exponentialverteilt mit Erwartungswert 1, so ist $V(X) = \xi\cdot V(Y) + \xi(1+\xi)\,\{E(Y)\}^2 = \xi(2+\xi)$ und

$$E(\overline{X}_n-\xi)^4 \leq \frac{2}{n^2}\left(\frac{4(2+\xi)^2}{e}\,\psi_X^*\left(\frac{1}{2+\xi}\right)\right)^2$$

$$\leq \frac{32}{n^2e^2}(2+\xi)^4(1+\xi)^2 \tag{4.54}$$

für $n \geq \frac{60}{\psi_X^*(\frac{1}{2+\xi})} = \frac{60}{1+\xi}$; wegen $\psi_X^*(t) = \frac{1-t}{1-(1+\xi)t}$, $t < \frac{1}{1+\xi}$ ergibt

sich damit (4.41). Ist N geometrisch verteilt mit Erwartungswert 1 und $Y \equiv \xi$, so ist $V(X) = 2\xi^2$ und

$$E(\overline{X}_n-\xi)^4 = \left(\frac{12}{n^2}+\frac{26}{n^3}\right)\xi^4 \leq \frac{16}{n^2}\,\xi^4 \tag{4.55}$$

für $n \geq 7$; wegen $\psi_X^*(t) = \frac{1}{2-e^{\xi t}}$, $t < \frac{\log 2}{\xi}$ ergibt sich damit (4.42). Ist dagegen Y exponentialverteilt mit Erwartungswert ξ, so ist $V(X) = V(Y) + 2\,\{E(Y)\}^2 = 3\xi^2$ und

$$E(\bar{X}_n-\xi)^4 \leq \frac{2}{n^2}\left(\frac{64\xi^2}{e}\,\psi_X^*\left(\frac{1}{4\xi}\right)\right)^2 \leq \frac{18432}{n^2e^2}\,\xi^4 \tag{4.56}$$

für $n \geq \frac{60}{\psi_X^*(\frac{1}{4\xi})} = 40$; wegen $\psi_X^*(t) = \frac{1-\xi t}{1-2\xi t}$, $t < \frac{1}{2\xi}$ ergibt sich damit (4.43). Ist $N \equiv 1$ und Y exponentialverteilt mit Erwartungswert ξ, so ist $X = Y$, also $V(X) = \xi^2$ und

$$E(\bar{X}_n-\xi)^4 = \left(\frac{3}{n^2}+\frac{6}{n^3}\right)\xi^4 \leq \frac{9}{n^2}\,\xi^4 \tag{4.57}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen $\psi_X^*(t) = \frac{1}{1-\xi t}$, $t < \frac{1}{\xi}$ ergibt sich damit (4.44). Ist $N \equiv 1$ und Y Gamma-verteilt mit $\beta = 1$ und $\gamma = \xi$ in (2.15), so ist $X = Y$ mit $V(X) = \xi^2$ und

$$E(\bar{X}_n-\xi)^4 = \frac{3}{n^2}\,\xi^2 + \frac{6}{n^3}\,\xi \leq \frac{9}{n^2}\,\xi^2 \tag{4.58}$$

für $n \geq \frac{1}{\xi}$; wegen $\psi_X^*(t) = (1-t)^{-\xi}$, $t < 1$ ergibt sich damit (4.45).

Die Abschätzungen in (4.46) und (4.47) ergeben sich analog (3.76), wenn dort $N \equiv 1$ und damit $\psi_N(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$ gesetzt wird.

Man beachte, daß Beziehung (4.37) für Kontraktionshalbgruppen $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ (also für $M = 1$ und $\omega = 0$) und $n = 1$ die Gestalt

$$\|T(\xi)f - \tfrac{1}{2}(I + T^2(\xi))f\| = \tfrac{1}{2}\,\|(T(\xi) - I)^2 f\| \leq \frac{\xi^2}{2}\,\|A^2 f\|,$$

also

$$\|(T(\xi)-I)^2 f\| \leq \xi^2 \|A^2 f\| \tag{4.59}$$

für $f \in D(A^2)$ annimmt; bezeichnet für $\xi > 0$ und $f \in \mathfrak{X}$

$$\omega_2(\xi,f) := \sup_{0 \leq t \leq \xi} \|(T(t)-I)^2 f\| \tag{4.60}$$

den Stetigkeitsmodul der Ordnung 2 (vgl. Butzer-Hahn (1980), (2.1)), so ergibt sich also speziell für $f \in D(A^2)$

$$\omega_2(\xi,f) \leq \xi^2 \|A^2 f\|. \tag{4.61}$$

Bezeichnet ferner für $t > 0$ und $f \in \mathfrak{X}$

$$K(t,f) := \inf \{\|f-g\| + t\|A^2 g\| \mid g \in D(A^2)\} \tag{4.62}$$

das modifizierte K-Funktional (vgl. Butzer-Hahn (1980), (2.2)), so ergibt sich ein einfacher (wegen (4.37) wahrscheinlichkeitstheoretischer) Beweis für die Beziehung

$$\omega_2(\xi,f) \leq 4K(\xi^2,f) \tag{4.63}$$

für $\xi > 0$, $f \in \mathfrak{X}$ (vgl. auch Butzer-Berens (1967), (3.4.7), Butzer, Hahn (1980), (2.3)): es ist für $t > 0$, $g \in D(A^2)$

$$\|(T(t)-I)^2 f\| \leq \|(T(t)-I)^2 (f-g)\| + \|(T(t)-I)^2 g\|$$

$$\leq 4\|f-g\| + t^2\|A^2 g\| \leq 4(\|f-g\| + t^2\|A^2 g\|);$$

da g beliebig war, folgt also

$$\omega_2(\xi,f) = \sup_{0 \leq t \leq \xi} \|(T(t)-I)^2 f\| \leq 4K(\xi^2,f).$$

IV. 2 Abschätzungen mit Hilfe von Stetigkeitsmodulen

Die im vorigen Abschnitt behandelten Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit beruhten wesentlich auf Glattheitsbedingungen der Art $f \in D(A)$, $D(A^2)$ bzw. $D(A^3)$. Hier sollen nun mit Hilfe verschiedener Stetigkeitsmodule Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit entwickelt werden, die diese Unterscheidung überflüssig machen, also für beliebige $f \in \mathfrak{X}$ gelten. Zunächst wollen wir unter Verwendung des bereits in (4.60) erklärten Stetigkeitsmoduls der Ordnung 2 und der in IV. 1 entwickelten Resultate die in Butzer-Hahn (1980) angegebenen, auf Ungleichungen vom Jackson-Typ beruhenden Abschätzungen verbessern. Diese Verbesserungen beruhen im wesentlichen auf der durch die allgemeinere Taylorentwicklung (4.1) ermöglichte bestmögliche Abschätzung der auftretenden Momente (vgl. etwa (4.14) (mit $\omega = 0$) und Beziehung (3.3) in Butzer-Hahn (1980)).

Auch die von Ditzian (1969, 1970, 1971) für die Darstellungssätze (3.57) und (3.58) von Hille und Phillips speziell entwickelten Konvergenzabschätzungen ergeben sich hier - teilweise sogar verschärft - aus einer entsprechenden allgemeineren Abschätzung für das schwache Gesetz großer Zahlen für Halbgruppenoperatoren. Hierbei wird wesentlich von der durch die Existenz der momenterzeugenden Funktion bewirkten exponentiellen Konvergenz im schwachen Gesetz großer Zahlen (Satz 1.2) Gebrauch gemacht.

<u>Korollar 4.6.</u> (vgl. Butzer-Hahn (1980)). Es seien Y eine nicht-negative reelle und N eine nicht-negative ganzzahlige Zufallsvariable derart, daß ψ_Y^* an einer Stelle $\delta_Y > 0$ und ψ_N an einer Stelle $\delta_N > 1$ existieren mögen. Ferner sei $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ eine Kontraktionshalbgruppe. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathfrak{X}$ mit $\xi = E(N)E(Y)$:

$$\| \{\psi_N(E[T(\tfrac{Y}{n})])\}^n f - T(\xi) f \|$$

$$\leq C\omega_2\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \sqrt{E(N)V(Y) + V(N)\ \{E(Y)\}^2}, f\right). \qquad (4.64)$$

Dabei ist C eine geeignete universelle Konstante.
Speziell gilt für alle $\xi > 0$, $f \in \mathfrak{X}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\|T(\xi)f - \{(1-\xi)I + \xi T(\tfrac{1}{n})\}^n f\| \leq C\omega_2(\sqrt{\tfrac{\xi(1-\xi)}{2n}}, f)\ (\xi < 1) \tag{4.65}$$

$$\|T(\xi)f - \{(1-\xi)I + \xi nR(n)\}^n f\| \leq C\omega_2(\sqrt{\tfrac{\xi(2-\xi)}{2n}}, f)\ (\xi < 1) \tag{4.66}$$

$$\|T(\xi)f - \{\tfrac{1}{2} I + \tfrac{1}{2} T(\tfrac{2\xi}{n})\}^n f\| \leq C\omega_2(\tfrac{\xi}{\sqrt{2n}}, f) \tag{4.67}$$

$$\|T(\xi)f - \{\tfrac{1}{2} I + \tfrac{n}{4\xi} R(\tfrac{n}{2\xi})\}^n f\| \leq C\omega_2(\sqrt{\tfrac{3\xi^2}{2n}}, f) \tag{4.68}$$

$$\|T(\xi)f - \{\tfrac{1}{2} I + \tfrac{1}{2}(\tfrac{n}{\xi} R(\tfrac{n}{\xi}))^2\}^n f\| \leq C\omega_2(\tfrac{\xi}{\sqrt{n}}, f) \tag{4.69}$$

$$\|T(\xi)f - \{(1+\xi)I - \xi T(\tfrac{1}{n})\}^{-n} f\| \leq C\omega_2(\sqrt{\tfrac{\xi(1+\xi)}{2n}}, f) \tag{4.70}$$

$$\|T(\xi)f - \{(1+\xi)I - \xi nR(n)\}^{-n} f\| \leq C\omega_2(\sqrt{\tfrac{\xi(2+\xi)}{2n}}, f) \tag{4.71}$$

$$\|T(\xi)f - \{2I - T(\tfrac{\xi}{n})\}^{-n} f\| \leq C\omega_2(\tfrac{\xi}{\sqrt{n}}, f) \tag{4.72}$$

$$\|T(\xi)f - \{2I - \tfrac{n}{\xi} R(\tfrac{n}{\xi})\}^{-n} f\| \leq C\omega_2(\sqrt{\tfrac{3\xi^2}{2n}}, f) \tag{4.73}$$

$$\|T(\xi)f - \{\tfrac{n}{\xi} R(\tfrac{n}{\xi})\}^n f\| \leq C\omega_2(\tfrac{\xi}{\sqrt{2n}}, f) \tag{4.74}$$

$$\|T(\xi)f - \{\tfrac{n^\xi}{\Gamma(\xi)} \int_0^\infty t^{\xi-1} e^{-nt} T(t)(.)dt\}^n f\| \leq C\omega_2(\tfrac{\xi}{\sqrt{2n}}, f) \tag{4.75}$$

$$\|T(\xi)f - e^{\xi A_{1/\tau}} f\| \leq C\omega_2(\sqrt{\tfrac{\xi}{2\tau}}, f) \text{ für } \tau > 0 \tag{4.76}$$

$$\|T(\xi)f - \exp\{\xi\tau^2 R(\tau) - \xi\tau I\}f\| \leq C\omega_2\left(\sqrt{\tfrac{\xi}{\tau}}, f\right) \text{ für } \tau > 0. \qquad (4.77)$$

Beweis. Analog zu Butzer-Hahn (1980), in dem die dortigen Ungleichungen (3.3) vom Jackson-Typ durch die durch Korollar 4.1, 4.2, 4.4 und 4.5 gegebenen Ungleichungen ersetzt werden. Man beachte dabei, daß wegen $\omega = 0$ die hier eventuell gegebenen Einschränkungen an n bzw. τ nicht notwendig sind, da in diesem Fall die vierten Momente bzw. die entsprechenden momenterzeugenden Funktionen nicht abgeschätzt zu werden brauchen.

Wir wollen nun zeigen, daß im allgemeinen Fall auch stochastische Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit mittels des Stetigkeitsmoduls

$$\omega_1^*(\delta,t,f) := \sup_{\substack{|s-t|\leq\delta \\ s\geq 0}} \|T(t)f - T(s)f\| \qquad (4.78)$$

für $\delta > 0$, $t \geq 0$, $f \in \mathfrak{X}$ möglich sind. Bezeichnet

$$\omega_1^b(\delta,f) := \sup\{\|T(t)f - T(s)f\| \mid 0 \leq s,\ t \leq b,\ |s-t| \leq \delta\} \qquad (4.79)$$

für $b > 0$, $\delta > 0$, $f \in \mathfrak{X}$ den rektifizierten Stetigkeitsmodul im Intervall $[0,b]$, so lassen sich wegen

$$\omega_1^b(\delta,f) \geq \sup_{0\leq t\leq b-\delta} \omega_1^*(\delta,t,f) \qquad (4.80)$$

(vgl. Ditzian (1969)) auch entsprechende Aussagen mit diesem Stetigkeitsmodul herleiten. Wir verwenden dazu eine Beziehung, die sich aus dem Beweis von Lemma 1 in Chung (1962) ergibt (vgl. auch den Beweis von M. Riesz in Hille-Phillips (1957), Lemma 10.4.1).

Lemma 4.2. Unter den Voraussetzungen von Korollar 4.1 gilt für jedes $\delta > 0$:

$$\| E[T(\bar{X}_n)]f - T(\xi)f\| \tag{4.81}$$

$$\leq \omega_1^*(\delta,\xi,f)+e^{-\delta\sqrt{n}}\sqrt{2}\,\exp\{\frac{4\psi_X^*(\eta)}{e^2(\eta-\frac{2}{\sqrt{n}})^2}\}Me^{\omega\xi}(1+\exp\{\frac{4\omega^2\psi_X^*(\eta)}{e^2 n(\eta-\frac{2\omega}{n})^2}\})\|f\|$$

für alle $f \in \mathscr{X}$ und alle $n > \max(\frac{4}{\eta^2}, \frac{2\omega}{\eta})$ mit $0 < \eta \leq \delta_X$.

<u>Beweis.</u> Es ist

$$\| E[T(\bar{X}_n)]f - T(\xi)f\|$$

$$\leq \int_{|\bar{X}_n-\xi|\leq\delta} \|T(\bar{X}_n)f-T(\xi)f\|dP \quad + \int_{|\bar{X}_n-\xi|>\delta} \|T(\bar{X}_n)f-T(\xi)f\|dP$$

$$\leq \omega_1^*(\delta,\xi,f) + \sqrt{P(|\bar{X}_n-\xi|>\delta)}\,\sqrt{E(\|T(\bar{X}_n)f - T(\xi)f\|^2)} \tag{4.82}$$

$$\leq \omega_1^*(\delta,\xi,f) + \sqrt{P(e^{2\sqrt{n}|\bar{X}_n-\xi|}>e^{2\sqrt{n}\delta})}\,\{\sqrt{E(\|T(\bar{X}_n)f\|^2)} + \|T(\xi)f\|\}$$

$$\leq \omega_1^*(\delta,\xi,f) + e^{-\delta\sqrt{n}}\sqrt{E(e^{2\sqrt{n}|\bar{X}_n-\xi|})}\,\{M\|f\|\sqrt{\psi_{\bar{X}_n}^*(2\omega)}+Me^{\omega\xi}\|f\|\}$$

unter Verwendung der Hölder- und der Markoff-Ungleichung. Mit Satz 2.1 sowie dem Beweis von Satz 2.2 ergibt sich nun die Behauptung.

Man beachte, daß die exponentielle Konvergenz in (4.81) wesentlich auf die Existenz der momenterzeugenden Funktion ψ_X^* und damit auf die exponentielle Konvergenz der Wahrscheinlichkeiten $P(|\bar{X}_n - \xi| > \delta)$ gegen Null, also die exponentielle Konvergenz im schwachen Gesetz großer Zahlen zurückgeht (vgl. auch Lemma 5, III in Petrov (1975)).

<u>Korollar 4.7.</u> Unter den Voraussetzungen des Korollars 3.2

mit δ_X aus (2.27) gilt:

$$\|\psi_N^n(E[T(\frac{Y}{n})])f - T(\xi)f\|$$

$$\leq \omega_1^*(\delta,\xi,f) + e^{-\delta\sqrt{n}}\ \sqrt{2}\exp\{\frac{4\psi_N(\psi_Y^*(\eta))}{e^2(\eta - \frac{2}{\sqrt{n}})^2}\}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot Me^{\omega\xi}(1+\exp\{\frac{4\omega^2\psi_N(\psi_Y^*(\eta))}{e^2 n(\eta - \frac{2\omega}{n})^2}\})\|f\| \tag{4.83}$$

für alle $f \in \mathscr{X}$, $\delta > 0$, $n > \max(\frac{4}{\eta^2}, \frac{2\omega}{\eta})$ mit $0 < \eta \leq \delta_X$.

<u>Beweis.</u> Lemma 2.2, Lemma 4.2.

Natürlich lassen sich auch für die spezifischen Darstellungen aus Beispiel 3.2 explizite Abschätzungen der Form (4.81) bzw. (4.83) angeben. Da solche Abschätzungen unter Verwendung des Stetigkeitsmoduls der Ordnung 2 bereits ausgiebig in Korollar 4.6 behandelt worden sind und entsprechende Formulierungen für den hier betrachteten Fall nicht schwerfallen, wollen wir nur die in der Literatur ausführlicher behandelten Darstellungen aus Beispiel 3.1 noch einmal speziell diskutieren.

<u>Korollar 4.8.</u> Es gilt

$$\|T(\xi)f - e^{\xi A_{1/\tau}}f\| \tag{4.84}$$

$$\leq \omega_1^*(\tau^{-1/3},\xi,f)+e^{-\sqrt[6]{\tau}}\sqrt{2}\ \exp\{\xi e^{2/\sqrt{\tau}}\}Me^{\omega\xi}(1+\exp\{\frac{\omega^2\xi}{\tau}\ e^{2\omega/\tau}\})\|f\|$$

für alle $f \in \mathscr{X}$ und $\tau > 0$ (vgl. Hsu (1960), Butzer-Berens (1967): Theorem 1.2.2) bzw. allgemeiner für $0 < \gamma < \frac{1}{2}$

$$\|T(\xi)f - e^{\xi A_{1/\tau}} f\| \tag{4.85}$$

$$\leq \omega_1^*(\tau^{-\gamma},\xi,f) + e^{-\tau^{(1/2-\gamma)}} \sqrt{2}\exp\{\xi e^{2/\sqrt{\tau}}\} M e^{\omega\xi}(1+\exp\{\frac{\omega^2\xi}{\tau} e^{2\omega/\tau}\}) \|f\|$$

für alle $f \in \mathscr{X}$ und $\tau > 0$ (vgl. Ditzian (1969), (1970)). Ferner gilt für $0 < \gamma < \frac{1}{2}$

$$\|T(\xi)f - \exp\{\xi\tau^2 R(\tau) - \xi\tau I\}f\|$$

$$\leq \omega_1^*(\tau^{-\gamma},\xi,f) + e^{-\tau^{(1/2-\gamma)}} \sqrt{2}\exp\{\frac{2\xi\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}-2}\} \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot M e^{\omega\xi}(1 + \exp\{\frac{2\omega^2\xi}{\tau-2\omega}\}) \|f\| \tag{4.86}$$

für alle $f \in \mathscr{X}$ und $\tau > \max(4,\ 2\omega)$ (vgl. Ditzian (1971)).

<u>Beweis.</u> Analog dem Beweis von Lemma 4.2; man beachte dabei, daß analog dem Beweis von Satz 2.2 und mit den Bezeichnungen aus Satz 3.3 im Fall der Beziehung (4.84) bzw. (4.85) gilt

$$\sqrt{P(e^{2\sqrt{\tau}|\frac{1}{\tau}X(\tau)-\xi|} > e^{2\delta\sqrt{\tau}})} \leq e^{-\delta\sqrt{\tau}} \sqrt{E(e^{2\sqrt{\tau}|\frac{1}{\tau}X(\tau)-\xi|})}$$

$$\leq e^{-\delta\sqrt{\tau}} \sqrt{e^{-2\sqrt{\tau}\xi} E(e^{2X(\tau)/\sqrt{\tau}}) + e^{2\sqrt{\tau}\xi} E(e^{-2X(\tau)/\sqrt{\tau}})}$$

$$\leq e^{-\delta\sqrt{\tau}} \sqrt{e^{-2\sqrt{\tau}\xi} e^{\tau\xi(e^{2/\sqrt{\tau}}-1)} + e^{2\sqrt{\tau}\xi} e^{\tau\xi(e^{-2/\sqrt{\tau}}-1)}}$$

$$\leq e^{-\delta\sqrt{\tau}} \sqrt{2}\exp\{\xi e^{2/\sqrt{\tau}}\},\quad \tau > 0; \tag{4.87}$$

mit $\delta = \tau^{-1/3}$ bzw. $\tau^{-\gamma}$ und Abschätzungen analog (4.30) ergibt sich damit (4.84) und (4.85).

Entsprechendes gilt für Beziehung (4.86), wenn man beachtet, daß hier $E(e^{\pm 2X(\tau)/\sqrt{\tau}}) = \psi^*_{N(\tau)}(\frac{1}{1\pm 2/\sqrt{\tau}})$, $\tau > 4$ gilt (4.88).

IV. 3 Verbesserungen der Konvergenzordnung

In dem letzten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir noch zeigen, wie durch Übertragung einer Idee von Bernstein (1932) auf die Halbgruppentheorie die durch (4.22) und (4.23) gegebene Konvergenzordnung $O(\frac{1}{n})$ durch geeignete Eliminierung des Varianzterms verbessert werden kann.

Satz 4.2. Unter den Voraussetzungen von Korollar 4.1 bzw. Korollar 4.2 gilt:

$$\|E[T(\overline{X}_n)]f - \frac{\sigma^2}{2n} E[T(\overline{X}_n)]A^2 f - T(\xi)f\| = o(\frac{1}{n\sqrt{n}}) \text{ für } n \to \infty \quad (4.89)$$

für alle $f \in D(A^4)$ bzw.

$$\|\psi_N^n(E[T(\tfrac{Y}{n})])f - \frac{1}{2n}(E(N)V(Y)+V(N)\{E(Y)\}^2)\psi_N^n(E[T(\tfrac{Y}{n})])A^2 f - \ldots$$

$$\ldots - T(\xi)f\| = o(\frac{1}{n\sqrt{n}}) \text{ für } n \to \infty \quad (4.90)$$

für alle $f \in D(A^4)$.

Beweis. Da sich (4.90) aus (4.89) ergibt, reicht es, die letztere Beziehung zu beweisen. Mit Lemma 4.1 erhält man für $f \in D(A^4)$

$$E[T(\overline{X}_n)]f - T(\xi)f = \frac{\sigma^2}{2n} T(\xi)A^2 f + \frac{1}{6} E(\overline{X}_n - \xi)^3 T(\xi)A^3 f + \ldots$$

$$\ldots + E\left[\int_\xi^{\overline{X}_n} \frac{1}{6}(\overline{X}_n - \xi)^3 T(u)A^4 f du\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{2n} T(\xi)A^2 f + \frac{1}{6} E(\overline{X}_n - \xi)^3 T(\xi)A^3 f + O(\frac{1}{n^2}) \qquad (4.91)$$

analog dem Beweis zu Korollar 4.1. Damit ist aber

$$\| E[T(\overline{X}_n)]f - \frac{\sigma^2}{2n} E[T(\overline{X}_n)]A^2 f - T(\xi)f \|$$

$$= \| -\frac{\sigma^2}{2n}\{E[T(\overline{X}_n)]A^2 f - T(\xi)A^2 f\} + \frac{1}{6} E(\overline{X}_n - \xi)^3 T(\xi)A^3 f + O(\frac{1}{n^2}) \|$$

$$\leq \frac{M}{4} e^{\omega\xi} \|A^4 f\| \frac{\sigma^4}{n^2} + \frac{1}{6}|E(\overline{X}_n - \xi)^3| M e^{\omega\xi} \|A^3 f\| + O(\frac{1}{n^2})$$

$$= \frac{1}{6} |E(\overline{X}_n - \xi)^3| \; M e^{\omega\xi} \|A^3 f\| + O(\frac{1}{n^2}). \qquad (4.92)$$

Da $E[\sqrt{n}^{\,3} (\overline{X}_n - \xi)^3] \to 0$ für $n \to \infty$ gemäß dem zentralen Grenzwertsatz (Satz 1.3, (1.16)), also

$$|E(\overline{X}_n - \xi)^3| = o(\frac{1}{n\sqrt{n}}) \text{ für } n \to \infty \qquad (4.93)$$

gilt, ergibt sich damit (4.89).

Die Konvergenzordnung in Satz 4.2 hängt also entscheidend von der Konvergenz des Ausdrucks $E(\overline{X}_n - \xi)^3$ gegen Null ab. Im Falle

$$E(\overline{X}_n - \xi)^3 = O(\frac{1}{n^2}) \text{ für } n \to \infty \qquad (4.94)$$

wird gemäß dem obigen Beweis sogar die Ordnung $O(\frac{1}{n^2})$ in Satz 4.2 erreicht. Dies ist z. B. bei Binomial-, geometrischen- oder Exponential- bzw. Gammaverteilungen der Fall, so daß eine Übertragung von Satz 4.2 auf die entsprechenden Beziehungen des Beispiels 3.3 bzw. Korollar 4.5 die Konvergenzordnung $O(\frac{1}{n^2})$ ergibt. Entsprechendes gilt für um ξ symmetrische Verteilungen, da dann sogar $E(\overline{X}_n - \xi)^3 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Natürlich läßt sich durch mehrfaches Anwenden der im Beweis von Satz 4.2 skizzierten Methode (Eliminierung der Restterme) die Konvergenzordnung gegebenenfalls noch weiter verbessern. Wegen der möglicherweise komplizierten Struktur der höheren zentralen Momente von $\overline{X}_n$ ist dies jedoch in der Regel mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden. Im Fall der Binomialverteilung (also z. B. im Darstellungssatz (3.59) von Kendall) erhält man etwa

Satz 4.3. Für $f \in D(A^6)$ und $0 < \xi < 1$ gilt:

$$\| T(\xi)f - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \xi^k (1-\xi)^{n-k} \{T(\tfrac{k}{n})f - \frac{1}{2n}\, \xi(1-\xi) T(\tfrac{k}{n}) A^2 f - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{6n^2}\, \xi(1-\xi)(1-2\xi) T(\tfrac{k}{n}) A^3 f + \frac{1}{8n^2}\, \xi^2 (1-\xi)^2 T(\tfrac{k}{n}) A^4 f\} \|$$

$$= O(\frac{1}{n^3}) \text{ für } n \to \infty. \tag{4.95}$$

Beweis. Analog dem Beweis zu Satz 4.2 unter Beachtung der Beziehungen

$$E(\overline{X}_n - \xi)^3 = \frac{1}{n^2}\, \xi(1-\xi)(1-2\xi)$$

und

$$E(\overline{X}_n - \xi)^4 = \frac{3}{n^2}\, \xi^2 (1-\xi)^2 + \frac{1}{n^3}\, \xi(1-\xi)(6\xi^2 - 6\xi + 1)$$

(vgl. (4.48)).

V. Beispiele

In diesem letzten Kapitel wollen wir aus der großen Zahl der möglichen Anwendungen der in den vorherigen Paragraphen erzielten Ergebnisse einige wenige interessante Beispiele - sowohl aus der Analysis als auch aus der Stochastik - exemplarisch hervorheben.

V. I Beispiele aus der Approximationstheorie

Zunächst wenden wir uns der Approximation im Intervall $[0,1]$ stetiger Funktionen durch Polynome zu, und zwar im Sinne von Bernstein (1912, 1932). Hierzu bezeichne $C[0,1]$ die Menge der auf $[0,1]$ stetigen Funktionen.

<u>Satz 5.1.</u> Für $g \in C[0,1]$ und $0 < \xi < 1$ gilt:

$$\left|g(\xi) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \xi^k (1-\xi)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$\leq \|g'\| \sqrt{\frac{\xi(1-\xi)}{n}} \leq \frac{\|g'\|}{2\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

falls $g' \in C[0,1]$ bzw.

$$\left|g(\xi) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \xi^k (1-\xi)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$\leq \|g''\| \frac{\xi(1-\xi)}{2n} \leq \frac{\|g''\|}{8n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.2}$$

falls $g'' \in C[0,1]$ bzw.

$$g(\xi) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \xi^k (1-\xi)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= -g''(\xi) \frac{\xi(1-\xi)}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \quad (n \to \infty), \tag{5.3}$$

falls $g''' \in C[0,1]$. Ferner gilt

$$|g(\xi) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \xi^k (1-\xi)^{n-k} \{g(\tfrac{k}{n}) - \frac{\xi(1-\xi)}{2n} g''(\tfrac{k}{n})\}|$$

$$\leq \frac{1}{6n^2} |\xi(1-\xi)(1-2\xi)| \|g'''\| + \frac{3}{8n^2} \xi^2(1-\xi)^2 \|g^{(4)}\| + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{24n^3} \xi(1-\xi)(6\xi^2 - 6\xi + 1) \|g^{(4)}\|$$

$$\leq \frac{1}{60n^2} \|g'''\| + \frac{3}{128n^2} \|g^{(4)}\| + \frac{1}{480n^3} \|g^{(4)}\|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.4)$$

falls $g^{(4)} \in C[0,1]$ sowie

$$|g(\xi) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \xi^k (1-\xi)^{n-k} \{g(\tfrac{k}{n}) - \frac{\xi(1-\xi)}{2n} g''(\tfrac{k}{n}) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{6n^2} \xi(1-\xi)(1-2\xi) g'''(\tfrac{k}{n}) + \frac{1}{8n^2} \xi^2(1-\xi)^2 g^{(4)}(\tfrac{k}{n})\}|$$

$$\leq \frac{1}{64n^3} \|g^{(5)}\| + \frac{1}{4n^3} \|g^{(6)}\|, \qquad (5.5)$$

falls $g^{(6)} \in C[0,1]$ und $n \geq 15$.

Beweis. Es sei $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ die Halbgruppe der Linkstranslationen aus Beispiel 3.1. Dann ist A der (unbeschränkte) Ableitungsoperator. Für $g \in C[0,1]$ sei nun $g^* \in UCB(\mathbb{R})$ so gewählt, daß $g^* = g$ auf $[0,1]$ und g^* dieselben Glattheitseigenschaften besitzt wie jeweils g in den Beziehungen (5.1) bis (5.5) (ein solches g^* existiert stets). Wegen $M = 1$ und $\omega = 0$ ergibt sich dann die Aussage des Satzes vermöge (3.59), Korollar 4.1, Satz 4.2 sowie Satz 4.3, indem man die Ausdrücke $T(\xi)g^*(0)$ bzw. $T(\overline{X}_n)g^*(0)$ betrachtet. Für die bei der Abschätzung (5.5) benötigten Momente 5. und 6. Ordnung beachte man, daß im vorliegenden Fall von Binomialverteilungen

$$E(\overline{X}_n-\xi)^5 = \frac{10}{n^3}\,\xi^2(1-\xi)^2(1-2\xi) + \ldots$$

$$+ \ldots \frac{1}{n^4}\,\xi(1-\xi)(1-2\xi)(12\xi^2-12\xi+1) \qquad (5.6)$$

für $n \in \mathbb{N}$ und unter Verwendung von (2.24) mit $\beta = \eta = 2$

$$E(\overline{X}_n-\xi)^6 \leq \frac{4}{n^3}\exp\{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(e^2-1)\xi\},\; n \geq 15 \qquad (5.7)$$

gilt.

Beziehung (5.3) besagt hierbei, daß für genügend glatte (nicht-lineare) Funktionen die exakte Konvergenzordnung stets $O(\frac{1}{n})$ ist. Entsprechend gilt für (5.4) und (5.5): dort ist die exakte Konvergenzordnung für genügend glatte, "nicht-triviale" Funktionen gegeben durch $O(\frac{1}{n^2})$ bzw. $O(\frac{1}{n^3})$.

Weitere wahrscheinlichkeitstheoretische Aspekte speziell in Bezug auf Bernsteinpolynome finden sich in Lindvall (1982).

Wir wollen sogleich ein analoges Resultat für auf $\mathbb{R}^+$ gleichmäßig stetige, beschränkte Funktionen $g \in UCB(\mathbb{R}^+)$ formulieren (vgl. auch Butzer-Berens, (1.2.23)).

Satz 5.2. Für $g \in UCB(\mathbb{R}^+)$ und $\xi > 0$ gilt:

$$|g(\xi) - e^{-\xi\tau}\sum_{k=0}^{\infty} g(\tfrac{k}{\tau})\frac{(\xi\tau)^k}{k!}| \leq \|g'\|\sqrt{\frac{\xi}{\tau}},\quad \tau > 0, \qquad (5.8)$$

falls $g' \in UCB(\mathbb{R}^+)$ bzw.

$$|g(\xi) - e^{-\tau\xi}\sum_{k=0}^{\infty} g(\tfrac{k}{\tau})\frac{(\xi\tau)^k}{k!}| \leq \|g''\|\,\frac{\xi}{2\tau},\quad \tau > 0, \qquad (5.9)$$

falls $g'' \in UCB(\mathbb{R}^+)$ bzw.

$$g(\xi) - e^{-\tau\xi} \sum_{k=0}^{\infty} g(\tfrac{k}{\tau}) \frac{(\xi\tau)^k}{k!} = -g''(\xi)\ \frac{\xi}{2\tau} + O(\frac{1}{\tau\sqrt{\tau}})\ (\tau \to \infty), \quad (5.10)$$

falls $g''' \in UCB(\mathbb{R}^+)$.

Beweis. Analog dem Beweis zu Satz 5.1 unter Verwendung von Korollar 4.4 und Satz 4.1.

(Der approximierende Operator in Satz 5.2 ist auch unter dem Namen Favard-Operator bekannt.)

Man beachte, daß in Satz 5.2 nicht die Existenz von $\lim_{\xi\to\infty} g(\xi)$ vorausgesetzt ist; aus diesem Grunde ist die Konvergenz in Satz 5.2 auch nur in jedem endlichen Teilintervall von $\mathbb{R}^+$ gleichmäßig. Wie man jedoch sieht, impliziert die Existenz von $\lim_{\xi\to\infty} g(\xi)$ natürlich die gleichmäßige Konvergenz.

Wie in Satz 5.1 ist auch hier die Konvergenzordnung exakt $O(\frac{1}{\tau})$ für $\tau \to \infty$, falls g eine genügend glatte, "nicht-triviale" Funktion ist. Analog Satz 4.2 läßt sich auch hier die Konvergenzordnung durch geeignete Modifikation noch verbessern:

Satz 5.3. Für $g \in UCB(\mathbb{R}^+)$ und $\xi > 0$ gilt:

$$\left|g(\xi) - \sum_{k=0}^{\infty} \{g(\tfrac{k}{\tau}) - \frac{\xi}{2\tau}\, g''(\tfrac{k}{\tau})\} \frac{(\xi\tau)^k}{k!}\right| = O(\frac{1}{\tau^2}) \text{ für } \tau \to \infty \quad (5.11)$$

falls auch $g^{(4)} \in UCB(\mathbb{R}^+)$, und zwar gleichmäßig in ξ in jedem endlichen Teilintervall von $\mathbb{R}^+$.

Beweis. Unter Benutzung einer entsprechenden Version des Satzes 4.2 und Beachtung von

$$E\left(\frac{1}{\tau}X(\tau)-\xi\right)^3 = \frac{\xi}{\tau^2}, \quad \tau > 0 \tag{5.12}$$

für einen Poisson-Prozeß $\{X(\tau) \mid \tau > 0\}$ mit Parameter ξ.

Schließlich wollen wir noch einen entsprechenden - analog zu Satz 5.1 zu beweisenden - Sachverhalt für den Darstellungssatz von Shaw (3.65) formulieren:

<u>Satz 5.4.</u> Für $g \in UCB(\mathbb{R}^+)$ und $\xi > 0$ gilt:

$$\left|g(\xi) - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{\xi^k}{(1+\xi)^{n+k}} g\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$\leq \|g'\| \sqrt{\frac{\xi(1+\xi)}{n}}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.13}$$

falls $g' \in UCB(\mathbb{R}^+)$ bzw.

$$\left|g(\xi) - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{\xi^k}{(1+\xi)^{n+k}} g\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$\leq \|g''\| \frac{\xi(1+\xi)}{2n}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.14}$$

falls $g'' \in UCB(\mathbb{R}^+)$ bzw.

$$g(\xi) - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{\xi^k}{(1+\xi)^{n+k}} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= -g''(\xi) \frac{\xi(1+\xi)}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \quad (n \to \infty), \tag{5.15}$$

falls $g''' \in UCB(\mathbb{R}^+)$ bzw.

$$\left|g(\xi) - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{\xi^k}{(1+\xi)^{n+k}} \left\{g\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{\xi(1+\xi)}{2n} g''\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\right|$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \to \infty), \tag{5.16}$$

falls $g^{(4)} \in UCB(\mathbb{R}^+)$.

Die Konvergenzen sind dabei gleichmäßig in ξ in jedem endlichen Teilintervall von $\mathbb{R}^+$.

(Der approximierende Operator in Satz 5.4 ist auch unter dem Namen Baskakov-Operator bekannt.)

Bezüglich weiterer stochastischer Approximationssätze siehe Ramanujan (1975).

Die Konvergenzabschätzungen in den vorigen Sätzen lassen sich natürlich mittels der Korollare 4.6 bis 4.8 auch unter Verwendung der verschiedenen Stetigkeitsmodule formulieren.

V. II Beispiele aus der Stochastik

Wir wollen uns hier noch einigen Beispielen aus der Stochastik zuwenden, und zwar zunächst dem Poisson'schen Grenzwertsatz, welcher besagt, daß eine Folge $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ mit Parameter $\frac{\xi}{n}$ für $n > \xi$ über $\{0,1,\dots,n\}$ binomialverteilter Zufallsvariablen in Verteilung gegen eine mit Parameter ξ (> 0) Poisson-verteilte Zufallsvariable X konvergiert: $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ für $n \to \infty$. Eine erste funktionalanalytische Betrachtung dieser Konvergenz stammt wohl von Le Cam (1960), der auch Abschätzungen der Konvergenzordnung bezüglich einer Norm auf dem Raum der signierten Maße angibt. Diese sind jedoch um den Faktor 2 größer als die in Pfeifer (1983 a) angegebenen, welche im wesentlichen auf dem Darstellungssatz (4.46) beruhen. Wir wollen nun zunächst zeigen, daß die hier gewonnenen Abschätzungen bestmöglich sind. Wir betrachten dazu die folgendermaßen definierte Metrik ρ auf der Menge $\mathcal{M}^1(\Xi,\mathcal{F})$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße über einem Meßraum $(\Xi,\mathcal{F})$:

$$\rho(Q_1,Q_2) := \sup_{C\in\mathcal{F}} |Q_1(C) - Q_2(C)|. \tag{5.17}$$

Wir wählen im folgenden $\Xi = \mathbb{Z}^+$, die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen, und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Xi)$, die Potenzmenge von Ξ. Dann lassen sich die Binomialverteilung $B(n,\xi)$ über $\{0,1,\ldots,n\}$ mit Parameter $\xi \in (0,1)$, die Poisson-Verteilung $Po(\xi)$ mit Parameter $\xi > 0$ und die negative Binomialverteilung $\overline{B}(n,\xi)$ mit Parametern n und $\xi > 0$ als Maße über $(\Xi,\mathcal{F})$ auffassen. Es gilt dann:

Satz 5.5.

$$\rho(B(n, \tfrac{\xi}{n});\ Po(\xi)) \leq \frac{\xi^2}{n} \tag{5.18}$$

für $\xi > 0$ und $n > \xi$ sowie

$$\rho(\overline{B}(n, \tfrac{n}{n+\xi});\ Po(\xi)) \leq \frac{\xi^2}{n} \tag{5.19}$$

für $\xi > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Konvergenzordnung ist exakt $O(\frac{1}{n})$; genauer gilt:

$$\rho(B(n, \tfrac{\xi}{n});\ Po(\xi)) = O(\tfrac{1}{n}) \tag{5.20}$$

$$\rho(\overline{B}(n, \tfrac{n}{n+\xi});\ Po(\xi)) = O(\tfrac{1}{n}) \tag{5.21}$$

für $n \to \infty$, gleichmäßig in ξ in jedem endlichen Teilintervall von $\mathbb{R}^+$.

Beweis. Es sei $\mathcal{X} = \ell^\infty$, und für $f \in \ell^\infty$ sei die Schreibweise $f = (f(0), f(1), \ldots)$ vereinbart. Die lineare Kontraktion B auf sei definiert durch

$$Bf = \varepsilon_1 * f, \tag{5.22}$$

wobei für $k \in \mathbb{Z}^+$ ε_k die Einpunktverteilung in k und $*$ die Faltungsoperation bezeichne (d. h. B ist damit ein Translationsoperator). Dann erzeugt der beschränkte lineare Operator

$A := B - I$ die Poisson'sche Faltungshalbgruppe $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ mit

$$T(\xi)f = e^{\xi A}f = e^{-\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} \varepsilon_k * f, \; \xi > 0. \tag{5.23}$$

Nun ist aber für $f \in \mathscr{X}$

$$(I + \frac{\xi}{n} A)^n f = ((1 - \frac{\xi}{n})I + \frac{\xi}{n} B)^n f$$

$$= ((1 - \frac{\xi}{n})\varepsilon_0 + \frac{\xi}{n} \varepsilon_1)^{n*} * f = B(n, \frac{\xi}{n}) * f, \tag{5.24}$$

so daß wegen der Kontraktionseigenschaft von $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ mit einer etwas schärferen Form von (4.46) (siehe Pfeifer (1983 a) folgt:

$$\|B(n, \frac{\xi}{n}) * f - Po(\xi) * f\| \leq \frac{\xi^2}{2n}\|A^2 f\|, \; n > \xi \tag{5.25}$$

sowie entsprechend

$$\|B(n, \frac{\xi}{n}) * f - Po(\xi) * f\| = \frac{\xi^2}{2n}\|T(\xi)A^2 f\| + O(\frac{1}{n^2}) \tag{5.26}$$

für $n \to \infty$. Hiermit ergeben sich wie im Beweis von Pfeifer (1983 a) die Beziehungen (5.18) und (5.20). Die Beziehungen (5.19) und (5.21) folgen analog aus dem Darstellungssatz von Post-Widder ((3.69), (4.44) unter Beachtung von Satz 4.1); man beachte dabei, daß für $\lambda > 0$

$$\lambda R(\lambda) = \lambda(\lambda I - A)^{-1} = \lambda((1+\lambda)I - B)^{-1}$$

$$= \frac{\lambda}{1+\lambda}(I - \frac{B}{1+\lambda})^{-1} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\lambda)^k} B^k, \tag{5.27}$$

also

$$\lambda R(\lambda) f = \frac{\lambda}{1+\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\lambda)^k} \varepsilon_k * f$$

$$= \overline{B}(1, \frac{\lambda}{1+\lambda}) * f, \; f \in \mathscr{X} \tag{5.28}$$

gilt, d. h. $\lambda R(\lambda)f$ ist gerade die Faltung einer geometrischen Verteilung (mit Erwartungswert $\frac{1}{\lambda}$) mit f, so daß

$$\left(\frac{n}{\xi} R\left(\frac{n}{\xi}\right)\right)^n f = \overline{B}\left(n, \frac{n}{n+\xi}\right) * f, \quad f \in \mathfrak{X}, \; n \in \mathbb{N}. \tag{5.29}$$

Für die statistische Praxis besagt Satz 5.5, daß für kleine Werte von p die Binomialverteilung $B(n,p)$ näherungsweise durch die Poisson-Verteilung $Po(np)$ ersetzt werden kann, wobei der maximale Fehler (bzgl. ρ) gegeben ist durch np^2. Entsprechendes gilt für die negative Binomialverteilung $\overline{B}(n,p)$, falls p nahe bei 1 liegt (mit $Po(n(\frac{1}{p}-1))$ als approximierender Verteilung); der maximale Fehler beträgt hier $\frac{n}{p^2}(1-p)^2$. Dies erklärt, warum Satz 5.5 auch als das "Gesetz seltener Ereignisse" bezeichnet wird: eine $B(n,p)$-verteilte Zufallsvariable X läßt sich ja als die "Trefferanzahl" in einer Folge von n unabhängigen Versuchen mit jeweiliger Erfolgswahrscheinlichkeit p interpretieren; eine $\overline{B}(n,p)$-verteilte Zufallsvariable Y zählt dagegen die dem n-ten "Treffer" vorausgehenden Mißerfolge.
Für kleine p ist im ersten Fall die Trefferanzahl (bei festem n) ebenfalls erwartungsgemäß klein , also eine hohe Trefferanzahl selten; im zweiten Fall ist bei großem p die Anzahl der Mißerfolge klein, also eine lange Wartezeit (bis zum n-ten Treffer) selten.

Mit Hilfe des Darstellungssatzes von Butzer-Hahn ((3.71), (4.45)) erhält man in diesem Zusammenhang noch folgenden interessanten Grenzwertsatz:

<u>Satz 5.6.</u> Für $\xi > 0$ gilt:

$$\rho\left(\overline{B}\left(n\xi, \frac{n}{n+1}\right); \; Po(\xi)\right) \leq \frac{\xi^2}{n} \tag{5.30}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\rho\left(\overline{B}\left(n\xi, \frac{n}{n+1}\right); \; Po(\xi)\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty). \tag{5.31}$$

Beweis. Analog dem Beweis zu Satz 5.5 unter Beachtung von $\overline{B}(n\xi, \frac{n}{n+1}) = \overline{B}(\xi, \frac{n}{n+1})^{n*}$ (n-fache Faltung) sowie

$$\overline{B}(\xi, \tfrac{n}{n+1})(\{k\}) = \binom{k+\xi-1}{k} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\xi} \frac{1}{(n+1)^k}$$

$$= \frac{n^{\xi}}{(n+1)^{k+\xi}} \frac{\Gamma(k+\xi)}{\Gamma(\xi)\Gamma(k+1)} \tag{5.32}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Dies ist aber gerade diejenige Verteilung, welche aus der Poisson-Verteilung durch Randomisierung des Parameters gemäß einer Gamma-Verteilung hervorgeht:

$$\overline{B}(\xi, \tfrac{n}{n+1})(\{k\}) = \frac{n^{\xi}}{\Gamma(\xi)k!} \int_0^{\infty} t^{k+\xi-1} e^{-(n+1)t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{n^{\xi}}{\Gamma(\xi)} t^{\xi-1} e^{-nt} e^{-t} \frac{t^k}{k!} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{n^{\xi}}{\Gamma(\xi)} t^{\xi-1} e^{-nt} Po(t)(\{k\})dt, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \tag{5.33}$$

Abschließend wollen wir noch einen wichtigen Aspekt aus der stochastischen Simulation, nämlich die Erzeugung Poisson-verteilter Zufallszahlen, behandeln. Neben "exakten" Methoden (vgl. Schmitz-Lehmann (1976), Pfeifer (1978)) werden häufig wegen des evtl. geringeren Rechenaufwandes auch approximative Verfahren verwendet. Ein solches Verfahren - versehen mit Fehlerabschätzungen - liefert aber z. B. Beziehung (4.47):

Satz 5.7. Für $m \geq 2$ und $0 < \zeta < 1$ sei die Verteilung $Q(m,\zeta)$ über $\{0,1,...,m\}$ definiert durch

$$Q(m,\zeta)(\{k\}) := \frac{\zeta^k}{k!} \sum_{j=0}^{m-k} (-1)^j \frac{\zeta^j}{j!} \quad 0 \leq k \leq m. \tag{5.34}$$

Dann gilt:

$$\rho(Q(m, \frac{\xi}{n})^{n*}, \mathrm{Po}(\xi)) \leq \frac{2^m \xi^{m+1}}{n^m (m+1)!}, \quad n > \xi > 0. \tag{5.35}$$

Die Konvergenzordnung ist dabei exakt $O(\frac{1}{n^m})$ für $n \to \infty$.

<u>Beweis.</u> Analog zum Beweis von Satz 5.5 unter Verwendung einer in diesem Fall möglichen verschärften Version von (4.47) (analog Pfeifer (1983 a)). Man beachte dabei, daß

$$\begin{aligned} Q(m,\zeta) &= \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=k}^{m} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} \frac{\zeta^i}{i!} \varepsilon_k \\ &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} \frac{\zeta^i}{i!} \varepsilon_1^{k*} \\ &= \sum_{i=0}^{m} \frac{\zeta^i}{i!} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^{i*} \end{aligned} \tag{5.36}$$

gilt, also

$$\begin{aligned} Q(m,\zeta) * f &= \sum_{i=0}^{m} \frac{\zeta^i}{i!} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^{i*} * f \\ &= \sum_{i=0}^{m} \frac{\zeta^i}{i!} (B-I)^i f = \sum_{i=0}^{m} \frac{\zeta^i}{i!} A^i f \end{aligned} \tag{5.37}$$

für $f \in \ell^\infty$ ist.

Das Ergebnis des Satzes 5.7 läßt sich wahrscheinlichkeitstheoretisch auch so ausdrücken:

Ist bei $n > \xi > 0$ $\{X_{nk}, 1 \leq k \leq n\}$ eine unabhängige Familie identisch verteilter Zufallsvariablen mit der Verteilung $Q(m, \frac{\xi}{n})$, $m \geq 2$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{n} X_{nk}$ in Verteilung gegen eine mit Parameter ξ Poisson-verteilte Zufallsvariable X : $\sum_{k=1}^{n} X_{nk} \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ $(n \to \infty)$. Der maximale Abstand der approximierenden und der Grenzverteilung bzgl. ρ beträgt dabei höchstens $\frac{2^m \xi^{m+1}}{n^m (m+1)!}$.

Zur Erzeugung $Po(\xi)$-verteilter Zufallsvariablen läßt sich also (näherungsweise) die Summe jeweils n voneinander unabhängiger, nach der (endlich-diskreten) Verteilung $Q(m, \frac{\xi}{n})$ realisierter Zufallsvariablen verwenden. Die Zahlen n und m sind dabei so zu bestimmen, daß der durch (5.35) gegebene Fehler eine vorgegebene Fehlerschranke nicht überschreitet.

Literatur

von Bahr, B. (1965): On the convergence of moments in the central limit theorem. Ann. Math. Statist. 36, 808-818.

Bauer, H. (1974): Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. De Gruyter, Berlin (2. Auflage).

Bernoulli, J. (1713): Ars Conjectandi. Basel.

Bernstein, N.S. (1912): Démonstration du théorème de Weierstrass, fondée sur le calcul des probabilités. Soob. Kharkov Mat. Obs. 13, 1-2.

Bernstein, N.S. (1932): Complément à l'article de E. Voronovskaja. C.R. Acad. Sci. URSS, 86-92.

Billingsley, P. (1979): Probability and Measure. Wiley, New York.

Brillinger, D. (1962): A note on the rate of convergence of a mean. Biometrika 49, 574-576.

Butzer, P.L. (1957): Halbgruppen von linearen Operatoren und eine Anwendung in der Approximationstheorie. J. reine und angew. Math. 197, 112-120.

Butzer, P.L. und Berens, H. (1967): Semi-Groups of Operators and Approximation. Springer Verlag, Berlin.

Butzer, P.L. und Hahn, L. (1980): A probabilistic approach to representation formulae for semigroups of operators with rates of convergence. Semigroup Forum 21, 257-272.

Le Cam, L. (1960): An approximation theorem for the Poisson binomial distribution. Pacific J. Math. 10, 1181-1197.

Chung, K.L. (1962): On the exponential formulas of semi-group theory. Math. Scand. 10, 153-162.

Csörgö, M. (1979): Brownian motion - Wiener process. Canad. Math. Bull. 22, 257-279.

Dharmadhikari, S. und Jogdeo, K. (1969): Bounds on moments of certain random variables. Ann. Math. Statist. 40, 1506-1509.

Ditzian, Z. (1969): On Hille's first exponential formula. Proc. Amer. Math. Soc. 22, 351-355.

Ditzian, Z. (1970): Note on Hille's exponential formula. Proc. Amer. Math. Soc. 24, 351-352.

Ditzian, Z. (1971): Exponential formulae for semi-groups of operators in terms of the resolvent. Israel J. Math. 9, 541-553.

Dunford, N. and Schwartz, J.T. (1958): Linear Operators. Part I: General Theory. Interscience Publ. Inc., New York.

Gänssler, P. and Stute, W. (1977): Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer-Verlag, Berlin.

Hahn, L. (1980): Approximation by operators of probabilistic type. J. Approx. Theory 30, 1-10.

Hall, P. (1978): On the rate of convergence of moments in the central limit theorem. J. Austral. Math. Soc. 25 (Series A), 250-256.

Hille, E. (1948): Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.

Hille, E. and Phillips, R.S. (1957): Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31, Providence, R.I.

Hsu, L.C. (1960): An estimation for the first exponential formula in the theory of semi-groups of linear operators. Czechoslovak Math. J. 10 (85), 323-328.

Kendall, D.G. (1954): Bernstein polynomials and semigroups of operators. Math. Scand. 2, 185-186.

Lindvall, T. (1982): Bernstein polynomials and the law of large numbers. Math. Scientist 7, 127-139.

Lukacs, E. (1960): Characteristic Functions. Griffin, London.

Mourier, E. (1953): Éléments aléatoires dans un espace de Banach. Ann. Inst. Henri Poincaré 13, 159-244.

Pettis, B.J. (1938): On integration in vector spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 44, 277-304.

Petrov, V.V. (1975): Sums of Independent Random Variables. Springer-Verlag, Berlin.

Pfeifer, D. (1978): An application of record values to stochastic simulation. Meth. Op. Res. 29, 738-749.

Pfeifer, D. (1982): On a general probabilistic representation formula for semigroups of operators. J. Math. Res. Exp. 2, 93-98.

Pfeifer, D. (1983 a): A semi-group theoretic proof of Poisson's limit law. Semigroup Forum 26, 379-382.

Pfeifer, D. (1983 b): On a probabilistic representation theorem of operator semigroups with bounded generator. J. Math. Res. Exp. (im Druck).

Pfeifer, D. (1983 c): A note on probabilistic representations of operator semigroups. Semigroup Forum (im Druck).

Ramanujan, M.S. (1975): Approximation theory, moment problems and distribution functions. In: Statistical Distributions in Scientific Work, Vol. I, 185-192.

Sazanov, V.V. (1974): On the estimation of moments of sums of independent random variables. Th. Prob. Appl. 19, 371-374.

Schmitz, N. und Lehmann, F. (1976): Monte-Carlo-Methoden I. Erzeugen und Testen von Zufallszahlen. Verlag Anton Hain.

Shaw, S.Y. (1980): Approximation of unbounded functions and applications to representations of semigroups. J. Approx. Theory 28, 238-259.

Voronovskaja, E.V. (1932): The asymptotic properties of the approximation of functions with Bernstein polynomials (in Russisch). Dokl. Akad. Nauk. SSSR(A), 79-85.

Weierstraß, K. (1885): Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Berlin, 633-639, 789-805.

Whittle, P. (1960): Bounds for the moments of linear and quadratic forms in independent random variables. Th. Prob. Appl. 5, 302-305.

Lebenslauf

17.3.1953	geboren in Wuppertal-Elberfeld als Sohn des Steuerinspektors Edgar Pfeifer und seiner Ehefrau Ilse, geb. Buchholz
1959 - 1963	Besuch der Gustav-Adolf-Schule in Duisburg
1963 - 1966	Besuch des Steinbart-Gymnasiums in Duisburg
1966 - 1971	Studium der Mathematik mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften an der RWTH Aachen
1977	Diplomprüfung für Mathematik (mit Auszeichnung)
1977 - 1978	Verwalter der Stelle eines Wissenschaftlichen Assistenten
seit 1978	Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik der RWTH Aachen
1980	Promotion zum Dr. rer. nat. (mit Auszeichnung)
seit 1980	verheiratet mit der Diplom-Sozialpädagogin Anke Schwen-Pfeifer, geb. Schwen
9.5.1982	Geburt der Tochter Detje Katharina
Oktober 1983	Eröffnung des Habilitationsverfahrens