"Record Values" in einem stochastischen Modell mit nicht-identischen Verteilungen

Dietmar Pfeifer

"Record Values" in einem stochastischen Modell mit nicht-identischen Verteilungen

Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

zur Erlangung
des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker
Dietmar Pfeifer
aus Wuppertal-Elberfeld

Referent: Professor Dr. B. Rauhut

Korreferent: Professor Dr. O. Krafft

Tag der mündlichen Prüfung: 27. November 1979

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik der RWTH Aachen.

Mein Dank gilt allen, die mir durch ständige Bereitschaft zur Diskussion behilflich waren, insbesondere

Herrn Prof. Dr. B. Rauhut, dem Leiter des Instituts, der mich zur Beschäftigung mit dem Thema anregte und bei der Anfertigung der Arbeit unterstützte sowie

Herrn Prof. Dr. O. Krafft, dessen Interesse an den behandelten Fragestellungen ich wertvolle Hinweise verdanke.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Symbolliste

0. Einleitung 1

I. Das mathematische Modell 8

A) Definitionen, Meßbarkeit, Existenzaussagen 8

B) Die Verteilungen der "Record Values", "Record Times" und "Inter-record Times" 16

II. Charakterisierungen der Exponential- und der geometrischen Verteilungen 27

A) Darstellungssätze 28

B) Charakterisierungssätze 32

III. Parametrische Fragestellungen 50

A) "Record Values", "Record Times" und "Inter-record Times" bei Exponential- und geometrischen Verteilungen 50

B) Zusammenhänge zur "klassischen" Extremwertstatistik 81

IV. Anhang 84

Literaturverzeichnis 92

Symbolliste

$\emptyset$	leere Menge
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\overline{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}_\zeta$	$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqq \zeta\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\mathbb{R}_\zeta$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq \zeta\}$
$(a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\}$ (entsprechend: $[a,b]$, $[a,b)$, (a,b))
$\bigwedge$	Allquantor
$\bigvee$	Existenzquantor
$\mathfrak{P}(A)$	Potenzmenge von A
$\mathfrak{B}$	Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}$
$\mathfrak{A}(X)$	die von der Zufallsvariablen X erzeugte σ-Algebra
1_A	Indikatorfunktion der Menge A
Φ	Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung
$\#$	abzählendes Maß auf $\mathfrak{P}(\mathbb{Z})$
$\|A\|$	Anzahl der Elemente der Menge A
λ	Lebesgue-Maß
ε_ζ	Einpunktverteilung im Punkt ζ
P_X	Verteilung der Zufallsvariablen X unter P
$\operatorname{supp} \mu$	Träger des (Borel-) Maßes μ
$\mu \otimes \nu$	Produktmaß der Maße μ und ν
$\frac{d\nu}{d\mu}$	Dichte des Maßes ν bezüglich des Maßes μ
$\operatorname{Int}(x)$	ganzzahliger Anteil der reellen Zahl x
$\square$	Ende eines Beweises

0. Einleitung

Das in der vorliegenden Arbeit behandelte Teilgebiet der Extremwertstatistik verdankt seine Entstehung hauptsächlich einer Arbeit von K.N. Chandler [5] aus dem Jahr 1952, in der erstmalig Untersuchungen über "Record Values" und die damit zusammenhängenden "Record Times" und "Inter-record Times" angestellt wurden. Die Motivation des Autors (und die wohl damit zusammenhängende Namensgebung) begründete sich dabei u.a. auf "the frequency with which record weather conditions are reported in the newspapers".

Bei den "Record Values" handelt es sich anschaulich um die Familie der aufeinanderfolgenden verschiedenen Maxima (oder Minima) in einer Folge von Beobachtungen. Die "Record Times" geben die Zeitpunkte an, zu denen die neuen Extrema auftreten, die "Inter-record Times" die Wartezeiten zwischen dem Auftreten dieser Extrema. Eine mathematische Präzisierung dieses Modells gibt die folgende

0.1 Definition:

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Familie rellwertiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ mit $X_\infty := \infty$.
Die Familie $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ der "(Upper) Record Times" ist induktiv definiert durch

$$U_0 := 1$$

$$U_{n+1} := \min\{k \in \mathbb{N} \mid X_k > X_{U_n}\} \qquad (n \in \mathbb{Z}_0),$$

wobei $\min \emptyset := \infty$ zu setzen ist.

$\{X_{U_n}\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ heißt die Familie der "(Upper) Record Values".
Die Familie $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der "(Upper) Inter-record Times" ist definiert durch

$$\Delta_n := U_n - U_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Der Zusatz "Upper" in Definition 0.1 bezieht sich auf die Betrachtung der aufeinanderfolgenden Maxima der Familie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; geht man entsprechend von den aufeinanderfolgenden Minima dieser Familie aus, so ist der Zusatz "Lower" gebräuchlich. Wegen des durch

$$\min(A) = - \max(-A) \qquad (A \subseteq \mathbb{R})$$

gegebenen Zusammenhangs zwischen "Upper Record Values" und "Lower Record Values" kann man sich auf die Betrachtung der "(Upper) Record Values" beschränken (Foster und Stuart [13] , Shorrock [40]).

Bezüglich der Frage der Meßbarkeit der in Definition 0.1 auftretenden Größen sei auf die Bemerkung 1.4 verwiesen (vgl. auch Shorrock [38]).

Setzt man voraus, daß die Familie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch stetig verteilt ist, so impliziert dies die fast sichere Existenz unendlich vieler verschiedener "Record Values" bzw. äquivalent dazu die fast sichere Endlichkeit der "Record Times" und "Inter-record Times" (Chandler [5]). Dies gilt auch dann noch, wenn statt der Stetigkeit der Verteilung nur gefordert wird, daß der rechte Endpunkt der Verteilung kein Atom ist (Shorrock [38]). Unter den erstgenannten Voraussetzungen sind die Verteilungen der "Record Times" und "Inter-record Times" unabhängig von der Verteilung der $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (Chandler [5], Feller [12], Foster und Stuart [13], Karlin [27], Rênyi [32]). Allerdings existieren in diesem Fall bereits die Erwartungswerte der "Inter-record Times" und damit - bis auf U_0 - auch die der "Record Times" nicht (Chandler [5], Feller [12], Foster und Stuart [13]). Dies schränkt aber die Anwendbarkeit des obigen Modells auf statistische Fragestellungen stark ein. In diesem Zusammenhang sind hauptsächlich die Arbeiten von Foster und Stuart [13] sowie Foster und Teichroew [14] zu erwähnen, die einen verteilungsfreien Test auf "Zufälligkeit" gegen "Trend" behandeln, der sich auf die Anzahl der "Upper" und "Lower Record Values" in einer endlichen Menge von Beobachtungen stützt. Ein ähnliches, nicht verteilungsfreies Testverfahren zur Überprüfung der Unabhängigkeit von Zufallszahlengeneratoren wird in [30] vorgeschlagen.

Unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit und identischen stetigen Verteilung der Familie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzen die "Record Times" und "Inter-record Times" jedoch wichtige wahrscheinlichkeitstheoretische Eigenschaften, von denen einige erstmals 1962 durch

Rényi entdeckt wurden. Im einzelnen handelt es sich um die folgenden drei Beziehungen:

$$(0.1)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \Delta_n = 1 \qquad P\text{ - fast sicher}$$

$$(0.2)\quad \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(\ln U_n - n) \leq t\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(\ln \Delta_n - n) \leq t\right) = \Phi(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(0.3)\quad \lim \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} \frac{\ln U_n - n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = \lim \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} \frac{\ln \Delta_n - n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = \pm 1 \quad P\text{ - fast sicher}$$

(Rényi [32], Neuts [28], Holmes und Strawderman [26], [44]).
Die formale Analogie zum starken Gesetz der großen Zahlen, zum zentralen Grenzwertsatz und zum Gesetz vom iterierten Logarithmus, angewandt auf eine Familie unabhängiger, identisch exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Erwartungswert 1, besagt, daß die logarithmierten "Record Times" und "Inter-record Times" sich asymptotisch wie die Partialsummen solcher exponentialverteilter Zufallsvariablen verhalten (siehe dazu Shorrock [38], Westcott [51], [52], Williams [54]). Wegen des durch

$$U_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gegebenen Zusammenhangs zwischen "Record Times" und "Inter-record Times" ist dagegen eine Approximation der Verteilungen dieser Grössen für kleine n, etwa mittels (0.2), praktisch unbrauchbar (Barton und Mallows [1], Neuts [28]).
Schließlich ist noch zu bemerken, daß die "Record Times" unter den obigen Voraussetzungen eine homogene Markoff-Kette mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$(0.4)\quad P(U_{n+1} = j \mid U_n = i) = \frac{i}{j(j-1)} \qquad (i \in \mathbb{Z}_{n+1},\ j \in \mathbb{Z}_{i+1},\ n \in \mathbb{N})$$

bilden (Galambos und Seneta [18], Rényi [32]).

Entsprechende Aussagen zu (0.1) bis (0.3) für "Record Values" lassen sich aus einem Charakterisierungssatz von Tata herleiten, der besagt: Unter der Annahme einer absolut-stetigen Verteilung besitzen die "Record Values" genau dann unabhängige (und dann auch identisch mit Erwartungswert 1 exponentialverteilte) Zuwächse, wenn die $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ selbst mit Erwartungswert 1 exponentialverteilt sind (Resnick [33],[34], Tata [45]; de Haan und Resnick [8]). Hierdurch ergeben sich Verbindungen zur Theorie der stationären Markoff-Erneuerungsprozesse (im Sinne von Çinlar [6]) und der Poisson-Prozesse (Shorrock [38],[39],[40]; der letztere Zusammenhang wurde unabhängig davon auch von Gergely und Yezhov [20] entdeckt). Ähnliche Aussagen wie (0.1) bis (0.3) gelten auch für den Fall, daß die $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine diskrete Verteilung besitzen (Vervaat [46],[47], [48],[49]).

Wie in der "klassischen" Extremwertstatistik lassen sich auch für "Record Values" Grenzwertsätze und Charakterisierungen der Anziehungsbereiche der zugehörigen Grenzverteilungen angeben. Die Grenzverteilungen sind dabei vom Typ $\Phi(-\ln(-\ln\Psi))$, wobei Ψ eine der drei Extremwertverteilungen (Gnedenko [22]) ist (Freudenberg und Szynal [16]; Resnick [33],[34]).

Einen anderen Zugang zu einigen der oben angesprochenen Problemkreise bietet die Theorie der extremalen Prozesse (Dwass [9]), die in der Extremwertstatistik eine ähnliche Rolle spielen wie die stabilen Prozesse bezüglich der aus unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen gebildeten Summenprozesse. Durch Einbettung der "Record Values" in einen geeigneten extremalen Prozeß lassen sich viele im Zusammenhang mit (0.1) bis (0.3) stehende Aussagen leicht gewinnen (Resnick [35],[36],[37], Shorrock [41]).

Eine Behandlung von "Record Values" unter kombinatorischen Gesichtspunkten findet man in Barton und Mallows [1], David und Barton [7], Haghighi-Talab und Wright [24].

Im Gegensatz zu der relativ erschöpfenden Behandlung von "Record Values" für den Fall der Unabhängigkeit und identischen Verteilung der Familie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wurden "Record Values" in allgemeineren Modellen bisher nur in wenigen Fällen untersucht. Die erste Arbeit in dieser Richtung stammt von Yang [55], der von den Maxima einer geometrisch wachsenden Anzahl unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen ausgeht. (Dieses Modell entspricht der mathematischen Beschreibung der Rekorde bei Olympischen Spielen unter Berücksichtigung des progessiven Wachstums der Weltbevölkerung.) Biondini und Siddiqui [3] setzen abschwächend nur voraus, daß die

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markoff-Kette bilden. Guthrie und Holmes [23] gehen von einem verallgemeinerten Semi-Markoff-Prozeß aus, für dessen "Record Times" und "Inter-record Times" sie unter gewissen Voraussetzungen analoge Ergebnisse zu (0.1) bis (0.3) herleiten. Eine andere Verallgemeinerung stellen die sog. "Random Record Models" (Gaver [19]) dar, bei denen die Zeitpunkte für die Realisation der (unabhängigen und identisch verteilten) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch davon unabhängige Punkt-Prozesse gesteuert werden. Dieses Modell, das also in gewissem Sinne kontinuierliche "Record Times" behandelt, wird von Westcott [50] noch dahingehend verallgemeinert, daß bestimmte Abhängigkeiten zwischen den $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und dem steuernden Prozeß erlaubt sind.

Um einen möglichst vollständigen Überblick über die bisher auf dem Gebiet der "Record Values" erschienenen Veröffentlichungen zu geben, wurden die Arbeiten von Freudenberg und Szynal [15], Glick [21], Pickands [31], Siddiqui und Biondini [42], Westcott [53] sowie die Bücher von Galambos [17] und Neuts [29] mit in das Literaturverzeichnis aufgenommen.

Anknüpfend an den vorletzten Absatz wird in dieser Arbeit ein Modell vorgestellt, das - unter Beibehaltung der Unabhängigkeit der zugrundeliegenden Zufallsvariablen - die Voraussetzung der identischen Verteilung in spezifischer Weise abschwächt. Im Unterschied zu Yang's Modell wird hier zugelassen, daß die Verteilung der auf jeden "Record Value" folgenden (bis zum Eintritt eines weiteren "Record Value" identisch verteilten) Zufallsvariablen von den vorher zugrundeliegenden Verteilung beliebig abweichen darf.
Die Vorteile einer solchen Betrachtungsweise sind u.a. folgende:

1. Das Modell ist auf gewisse praktische Situationen anwendbar, da es die Möglichkeit einer "Umweltbeeinflussung" nicht ausschließt (siehe hierzu Beispiel 1.2).

2. Das Modell gestattet eine parametrische Behandlung von "Record Values", "Record Times" und "Inter-record Times" (siehe Kapitel III). Dabei lassen sich Bedingungen für die Existenz von

Erwartungswerten und Varianzen der "Record Times" und "Inter-record Times" angeben. Hierdurch ist unter gewissen Voraussetzungen eine Anwendbarkeit auf (insbesondere mit 1. im Zusammenhang stehende) statistische Fragestellungen gegeben (vgl. dazu die Ausführungen auf Seite 2).

3. Das Modell bildet bzgl. der Markoff-Erneuerungsprozesse gerade das nicht-stationäre Analogon des Modells mit identischen Verteilungen. Dadurch bleiben wesentliche wahrscheinlichkeitstheoretische Beziehungen auch im allgemeineren Fall erhalten (siehe Kapitel I).

Die Arbeit gliedert sich inhaltlich in vier Teile. Kapitel I behandelt Problemstellungen, die das auf Seite 5 unten beschriebene Modell als ganzes betreffen. Neben Meßbarkeitsfragen stehen zunächst äquivalente Bedingungen für die fast sichere Existenz unendlich vieler (verschiedener) "Record Values" im Vordergrund. Für den (im Modell enthaltenen) Spezialfall der identischen Verteilung ergibt sich hieraus das Kriterium von Shorrock (vgl. dazu die Ausführungen auf Seite 2). In Teil B dieses Kapitels wird u.a. nachgewiesen,daß der zweidimensionale aus "Record Values" und "Record Times" zusammengesetzte Prozeß einen (i.a. nicht-stationären) Markoff-Erneuerungsprozeß im Sinne von Çinlar [6] bildet. Dies impliziert die Markoff-Eigenschaft der "Record Values" sowie die für Kapitel III wichtige bedingte Unabhängigkeit der "Inter-record Times" bei gegebenen "Record Values". Die im Falle identischer Verteilungen bestehende Markoff-Eigenschaft der "Record Times" geht dagegen i.a. verloren.
Das allgemeinere Modell gestattet darüberhinaus eine wesentlich umfassendere Charakterisierung der Exponential- (und geometrischen) Verteilungen als das Modell mit identischen Verteilungen. Dies ist Gegenstand des Kapitels II. Der Charakterisierungssatz von Tata (vgl. Seite 3 und 4) ist dabei als Spezialfall in den Sätzen 2.1 und 2.5 enthalten.
Die in Kapitel II charakterisierten (parametrischen) Verteilungsklassen bilden die Grundlage für Kapitel III. Hier werden - in Abhängigkeit von den gewählten Parametern - u.a. äquivalente Bedingungen für die Existenz von Erwartungswerten und Varianzen der "Record Times" und "Inter-record Times" sowie im Falle der Existenz diese selbst angegeben. Für die "Record Values" sowie die

logarithmierten "Record Times" und "Inter-record Times" existieren diese Kenngrößen für jede Wahl von Parametern. Dabei ergeben sich interessante Zusammenhänge zwischen den Kenngrößen der "Record Values" und der logarithmierten "Inter-record Times". Für den Spezialfall der identischen stetigen Verteilung läßt sich hieraus die Beziehung

$$E(\ell n\ \Delta_n) = n - C + O(\frac{n}{2^n})$$

$$Var(\ell n\ \Delta_n) = n + \frac{\pi^2}{6} + O((\frac{2}{3})^n) \qquad (n \to \infty)$$

ableiten (Satz 3. 9), wobei C = 0,577216... die Euler'sche Konstante bezeichne. Hieraus läßt sich eine gegenüber (0.2) erheblich verbesserte Approximation der Verteilung von Δ_n - insbesondere für "kleine" n - gewinnen.
Durch spezielle Wahl der Parameter läßt sich erreichen, daß die "Record Values" verteilungsgleich mit gewissen Ordnungsstatistiken unabhängiger, identisch stetig verteilter Zufallsvariablen sind. Dieser in Teil B des Kapitels untersuchte Zusammenhang zur Extremwertstatistik führt zu "klassischen" Grenzwertsätzen für solche "Record Values" im Sinne von Gnedenko [22] und Smirnov [43] (vgl. dazu die Ausführungen auf Seite 4).
Im Anhang (Kapitel IV) werden einige für Beweise benötigte Hilfssätze und Sätze bewiesen.

I. Das mathematische Modell

Um eine übersichtliche Darstellung zu gewährleisten, sollen vorab folgende Bezeichnungsweisen eingeführt werden:

Ist F eine (stets als rechtsseitig stetig angenommene) Verteilungsfunktion und $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine integrierbare $\mathfrak{B}$-meßbare Abbildung, so sei definitionsgemäß

(1.1) $\int f(t)\, dF(t) := \int f\, d\mu_F$,

wobei μ_F das durch F induzierte Borel-Maß bezeichne, welches durch

(1.2) $\mu_F((-\infty, b]) := F(b) \qquad (b \in \mathbb{R})$

gegeben ist. Bei Integrationen über Teilintervalle sei

(1.3) $\int_a^b f(t)\, dF(t) := \int 1_{(a,b]}(t)\, f(t)\, dF(t)$

$(a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}, a < b)$

vereinbart, entsprechend für $b = \infty$.
Obiges gilt sinngemäß auch für reguläre bedingte sowie mehrdimensionale Verteilungsfunktionen.

A) Definitionen, Meßbarkeit, Existenzaussagen

Das in der Einleitung verbal beschriebene Modell ist zunächst mathematisch folgendermaßen zu präzisieren:

1.1 Definition:

$X := \{X_0, \{X_{nk}\}_{n,k \in \mathbb{N}}\}$ sei eine Familie reellwertiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$P_{X_{nk}} = P_{X_{n1}} \qquad (n,k \in \mathbb{N})$.

Ferner sei

$X_{n\infty} := \infty \qquad (n \in \mathbb{N})$.

Dann ist die Familie $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der zu X gehörigen "Inter-record

Times" induktiv definiert durch

$\Delta_1 \ :=\min\{k \in \mathbb{N} \,|\, X_{1k} > X_0\}$

$\Delta_{n+1}:=\min\{k \in \mathbb{N} \,|\, X_{n+1,k} > X_{n,\Delta_n}\}$ $(n \in \mathbb{N})$,

wobei $\min(\emptyset):=\infty$ zu setzen ist.
Zur Vereinfachung der Schreibweise sei noch

$\Delta_0:=0$ und $X_{00}:=X_0$ vereinbart.

Die Familie $\{X_{n,\Delta_n}\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ heißt die Familie der zu X gehörigen "Record Values", die Familie $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ mit

(1.4) $U_n:=1+\sum_{k=0}^{n}\Delta_k$ $(n \in \mathbb{Z}_0)$

die Familie der zu X gehörigen "Record Times".

Definition 1.1 läßt sich anschaulich wie folgt interpretieren:

1.2 <u>Beispiel:</u>

X_0 sei eine konstante Zufallsgröße, etwa die Belastbarkeit eines Druckventils, mit dessen Hilfe der Verlauf eines chemischen Experiments kontrolliert werden soll. Die Variablen $\{X_{1k}\}$ mögen identisch verteilte zufallsabhängige (metrisch skalierte) Einflußgrößen darstellen, etwa die Druckverhältnisse bei wiederholter Durchführung desselben chemischen Experiments. Überschreitet eine dieser Größen die Toleranzgrenze X_0, d.h. stellt sich in diesem Sinne ein "Unfall" ein, so beschreibt Δ_1 den Eintrittszeitpunkt dieses Unfalls und X_{1,Δ_1} die Höhe des entstandenen "Schadens". In der Praxis wird man nun bemüht sein, durch entsprechende Sicherheitsvorkehrungen - welche in der Regel die Verteilung der nachfolgenden Größen $\{X_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ beeinflussen - das erneute Entstehen eines gleichgroßen oder kleineren Schadens zu verhindern. So wird man etwa bei evtl. verändertem Versuchsaufbau ein entsprechend stärkeres Druckventil verwenden, dessen Toleranzgrenze gerade X_{1,Δ_1} beträgt (da beispielsweise aus Kostengründen eine "Überdimensionierung" des Ventils nicht in Betracht kommt). Erst nach weiteren Δ_2 Wiederholungen des nunmehr modifizierten Experiments tritt erneut ein Unfall ein, dessen Ausmaß durch $X_{2,\Delta_2} > X_{1,\Delta_1}$ gegeben ist usw.

Aus der Definition der "Record Values", "Record Times" und "Inter-record Times" ist nicht unmittelbar ersichtlich, daß es sich hierbei um Zufallsvariable, d.h. um meßbare Abbildungen handelt. Dies wird jedoch gewährleistet durch das folgende

1.3 Lemma:

Es sei

$$\mathfrak{A}_{nk} := \mathfrak{A}(X_0, \{X_{1j}\}_{j\in\mathbb{N}}, \dots, \{X_{n-1,j}\}_{j\in\mathbb{N}}, \{X_{nj}\}_{j=1}^{k}) \qquad (n \in \mathbb{N},\ k \in \overline{\mathbb{N}}).$$

Dann gilt

(1.5) Δ_n (und damit auch U_n) ist eine Stopzeit bezüglich $\{\mathfrak{A}_{nk}\}_{k\in\overline{\mathbb{N}}}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(1.6) X_{n,Δ_n} ist meßbar bezüglich

$$\mathfrak{A}_{\Delta_n} := \{E \in \mathfrak{P}(\Omega) \mid \bigwedge_{k\in\overline{\mathbb{N}}} E \cap \{\Delta_n \leq k\} \in \mathfrak{A}_{nk}\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Beweis:

Für n = 1 gilt offenbar

$$\{\Delta_1 \leq k\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{X_{1i} > X_0\} \in \mathfrak{A}(X_0, X_{11}, \dots, X_{1k}) \in \mathfrak{A}_{1k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Unter der Annahme, daß (1.5) für ein $n \in \mathbb{N}$ gültig ist, folgt

$$\{\Delta_{n+1} \leq k\} = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{\{X_{n+1,i} > X_{nj}\}}_{\in\, \mathfrak{A}_{n+1,k}} \cap \underbrace{\{\Delta_n = j\}}_{\in\, \mathfrak{A}_{nj} \subseteq \mathfrak{A}_{n+1,k}} \in \mathfrak{A}_{n+1,k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Da trivialerweise $\{\Delta_n \leq \infty\} = \Omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist nach dem Prinzip der vollständigen Induktion (1.5) für $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bewiesen. Die entsprechende Aussage für $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ folgt aus

$$\{U_n \leq k\} = \bigcup_{\substack{k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N} \\ 1+\sum_{i=1}^{n} k_i \leq k}} \; \bigcap_{j=1}^{n} \{\Delta_j \leq k_j\}$$

und $\{U_n \leq \infty\} = \Omega \qquad (n,k \in \mathbb{N})$.

Zum Beweis von (1.6) sei auf $I := \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{N}}$ die durch

$$(j_1,k_1) \sqsubseteq (j_2,k_2) :\Leftrightarrow j_1 \leq j_2 \text{ und } k_1 \leq k_2 \qquad ((j_1,k_1),(j_2,k_2) \in I)$$

gegebene Halbordnung[1)] definiert. Dann ist

(n,Δ_n) Stopzeit bezüglich $\{\mathfrak{A}_{jk} \mid (j,k) \in I\}$ und $\sqsubseteq$ wegen

$$\{(n,\Delta_n) \sqsubseteq (j,k)\} = \begin{cases} \{\Delta_n \leq k\} & , n \leq j \\ \emptyset & , n > j \end{cases} \quad \in \mathfrak{A}_{jk}$$

wegen $\{\Delta_n \leq k\} \in \mathfrak{A}_{nk} \subseteq \mathfrak{A}_{jk}$ für $n \leq j \quad (n \in \mathbb{N}, (j,k) \in I)$. Nach Bauer [2], Lemma 58.3 ist nun X_{n,Δ_n} meßbar bezüglich

$$\mathfrak{A}_{(n,\Delta_n)} = \{E \in \mathfrak{P}(\Omega) \mid \bigwedge_{(j,k)\in I} E \cap \{(n,\Delta_n) \sqsubseteq (j,k)\} \in \mathfrak{A}_{jk}\}$$

$$= \{E \in \mathfrak{P}(\Omega) \mid \bigwedge_{k\in\overline{\mathbb{N}}} E \cap \{\Delta_n \leq k\} \in \mathfrak{A}_{nk}\} = \mathfrak{A}_{\Delta_n} \qquad (n \in \mathbb{N}). \square$$

1.4 <u>Bemerkung:</u>

Lemma 1.3 impliziert unmittelbar auch die Meßbarkeit der "Record Values", "Record Times" und "Inter-record Times" im Falle identischer Verteilung (Definition 0.1 der Einleitung).

---

1) Wie man leicht nachprüft, ist diese Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

Im folgenden wird nun stets die Unabhängigkeit der Familie X vorausgesetzt. Aus Vereinfachungsgründen mögen ferner alle betrachteten Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definiert sein.

Für die weitere Untersuchung des Modells erweisen sich die folgenden Größen als wichtig:

1.5 Definition:

Es bezeichne F_n die zu $P_{X_{n1}}$ bzw. F_0 die zu P_{X_0} gehörige Verteilungsfunktion ($n \in \mathbb{N}$). Dann heißt

$\xi_n := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F_n(x) < 1\}$ rechter Endpunkt von F_n (bzw. P_{X_n}),

$\zeta_n := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_n(x) > 0\}$ linker Endpunkt von F_n (bzw. P_{X_n})

($n \in \mathbb{Z}_0$).

Der folgende Satz gibt äquivalente Bedingungen für die fast sichere Endlichkeit der "Inter-record Times" an, die sich auch als äquivalente Bedingungen für die fast sichere Existenz unendlich vieler verschiedener "Record Values" lesen lassen:

1.6 Satz:

a) Es gelte $P(\Delta_n < \infty) = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist für $1 \leq j \leq n$

$P(\Delta_j < \infty) = 1$ sowie

$\xi_{j-1} \leq \xi_j$, falls ξ_{j-1} kein Atom[1] von F_{j-1} ist bzw.

$\xi_{j-1} < \xi_j$, falls ξ_{j-1} ein Atom von F_{j-1} ist.

b) Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$P(\Delta_{n-1} < \infty) = 1$ sowie

---

1) Ein Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ heißt Atom einer Verteilungsfunktion F, wenn ξ Atom des Maßes μ_F ist. Dies ist äquivalent dazu, daß ξ kein Stetigkeitspunkt von F ist.

$\xi_{n-1} \leq \xi_n$, falls ξ_{n-1} kein Atom von F_{n-1} ist bzw.

$\xi_{n-1} < \xi_n$, falls ξ_{n-1} ein Atom von F_{n-1} ist.

Dann ist

$P(\Delta_n < \infty) = 1$.

Beweis:

a) Wegen $\{\Delta_j = \infty\} \subseteq \{\Delta_n = \infty\}$ für $1 \leq j \leq n$ nach Definition 1.1 folgt aus

$P(\Delta_n < \infty) = 1$ unmittelbar auch

$P(\Delta_j < \infty) = 1$ für diese j.

Man nehme nun im Widerspruch zur Behauptung an, daß es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ gibt derart, daß

$\xi_{k-1} > \xi_k$, falls ξ_{k-1} kein Atom von F_{k-1} ist bzw.

$\xi_{k-1} \geq \xi_k$, falls ξ_{k-1} ein Atom von F_{k-1} ist.

Es kann dabei vorausgesetzt werden, daß es sich um das kleinste derartige k handelt, d.h. daß für $1 \leq j \leq k-1$ gilt

$\xi_{j-1} \leq \xi_j$, falls ξ_{j-1} kein Atom von F_{j-1} ist bzw.

$\xi_{j-1} > \xi_j$, falls ξ_{j-1} ein Atom von F_{j-1} ist.

Notwendigerweise ist $k \geq 2$, da sonst

$$
\begin{aligned}
P(\Delta_1 = \infty) &= P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{X_{1i} \leq X_0\}\Big) \geq P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{X_{1i} \leq \xi_1 \leq X_0\}\Big) \\
&= P(X_0 \geq \xi_1) \prod_{i=1}^{\infty} P(X_{1i} \leq \xi_1) = P(X_0 \geq \xi_1) \\
&= 1 - F_0(\xi_1) + P(X_0 = \xi_1) > 0,
\end{aligned}
$$

da entweder gilt

$F_0(\xi_1) < 1$, falls $\xi_0 > \xi_1$ oder

$P(X_0 = \xi_1) > 0$, falls $\xi_0 = \xi_1$ (und damit ξ_0 ein Atom von F_0 ist). Dies ist ein Widerspruch zu der bereits bewiesenen ersten Hälfte der Aussage a).

Für $k \geqq 2$ kann man aber eine Kette $t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-2}$ reeller Zahlen so wählen, daß gilt

$t_0 = \xi_0$, falls $\xi_0 < \xi_1$ bzw.

$0 < F_0(t_0) < 1$, falls $\xi_0 = \xi_1$

und für $1 \leqq j \leqq k-2$

$t_j = \xi_j$, falls $\xi_j < \xi_{j+1}$ bzw.

$F_j(t_{j-1}) < F_j(t_j) < 1$, falls $\xi_j = \xi_{j+1}$,

da im Fall $\xi_j = \xi_{j+1}$ $(0 \leqq j \leqq k-2)$ nach Wahl von k ξ_j ein Stetigkeitspunkt von F_j ist.
Wegen $P(\Delta_{k-1} = \infty) = 0$ folgt dann

$$\begin{aligned}
P(\Delta_k = \infty) &= P(\Delta_{k-1} = \infty) + P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} \{\Delta_{k-1} = j\} \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \{X_{ki} \leqq X_{k-1,j}\}\Big) \\
&\geqq P\Big(\{\Delta_{k-1} = 1\} \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \{X_{ki} \leqq \xi_k \leqq X_{k-1,1}\}\Big) \\
&= P(\{\Delta_{k-1} = 1\} \cap \{\xi_k \leqq X_{k-1,1}\}) \\
&\geqq P(X_0 < X_{11} < \ldots < X_{k-1,1} \geqq \xi_k) \\
&\geqq P(X_0 \leqq t_0 < X_{11} \leqq t_1 < \ldots < X_{k-2,1} \leqq t_{k-2} \leqq X_{k-1,1} \geqq \xi_k) \\
&= F_0(t_0) \prod_{i=1}^{k-2} (F_i(t_i) - F_i(t_{i-1}))\, P(X_{k-1,1} \geqq \max(t_{k-2}, \xi_k)) \\
&> 0 \quad \text{nach Wahl von } t_0, \ldots, t_{k-2} \text{ und wegen}
\end{aligned}$$

$$P(X_{k-1,1} \geqq \max(t_{k-2}, \xi_k)) = 1 - F_{k-1}(\max(t_{k-2}, \xi_k)) + P(X_{k-1,1} = \max(t_{k-2}, \xi_k)) > 0,$$

da nämlich gilt

$F_{k-1}(\max(t_{k-2}, \xi_k)) = F_{k-1}(t_{k-2}) < 1$, falls $t_{k-2} \geqq \xi_k$

oder

$F_{k-1}(\max(t_{k-2},\xi_n)) = F_{k-1}(\xi_k) < 1$, falls $t_{k-2} < \xi_k < \xi_{k-1}$

oder

$P(X_{k-1,1} = \xi_k) > 0$, falls $t_{k-2} < \xi_k = \xi_{k-1}$ (und damit

ξ_{k-1} ein Atom von F_{k-1} ist).

Die Aussage $P(\Delta_k = \infty) > 0$ steht aber ebenfalls im Widerspruch zur ersten Hälfte der Aussage a). Damit ist a) vollständig bewiesen.

b) Zunächst folgt aus den Voraussetzungen an die rechten Endpunkte

$$(1.7) \quad P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{X_{ni} \leq X_{n-1,k}\}\Big) = 0,$$

wobei $X_{0k} := X_0$ zu setzen ist $(k \in \mathbb{N})$.

Wegen der Unabhängigkeit von X und Lemma 4.1 (Anhang) ist nämlich

$$\begin{aligned}
P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{X_{ni} \leq X_{n-1,k}\}\Big) &= \lim_{m\to\infty} P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{X_{ni} \leq X_{n-1,k}\}\Big) \\
&= \lim_{m\to\infty} P\big(\max_{1\leq i\leq m} (X_{ni}) \leq X_{n-1,k}\big) \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_n^m(t)\, dF_{n-1}(t) \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\xi_{n-1}} F_n^m(t)\, dF_{n-1}(t) \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist eine Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz, da für $m \to \infty$ gilt:

$F_n^m \downarrow 1_{\mathbb{R}_{\xi_n}}(.)$, falls $\xi_n < \infty$ und

$F_n^m \downarrow 0$, falls $\xi_n = \infty$.

Im ersten Fall ist dann

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}\{X_{ni} \leq X_{n-1,k}\}\Big) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\xi_{n-1}} 1_{\mathbb{R}_{\xi_n}}(t)\, d F_{n-1}(t) = 0, & \text{falls } \xi_{n-1} < \xi_n \\ \int_{\{\xi_{n-1}\}} d F_{n-1}(t) = 0, & \text{falls } \xi_{n-1} = \xi_n \end{cases}$$

da für $\xi_{n-1} = \xi_n$ ξ_{n-1} ein Stetigkeitspunkt von F_{n-1} ist. Der andere Fall ist trivial.

Für n = 1 gilt nun

$$P(\Delta_1 = \infty) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}\{X_{1i} \leq X_0\}\Big) = 0 \quad \text{nach (1.7),}$$

für $n \geq 2$ dagegen

$$P(\Delta_n = \infty) = \underbrace{P(\Delta_{n-1} = \infty)}_{= 0 \text{ nach Voraussetzung}} + P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\Delta_{n-1} = k\} \cap \bigcap_{i=1}^{\infty}\{X_{ni} \leq X_{n-1,k}\}\Big)$$

$$\leq P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{\infty}\{X_{ni} \leq X_{n-1,k}\}\Big) = 0$$

ebenfalls nach (1.7), da eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist.

Der Satz ist damit vollständig bewiesen. □

1.7 <u>Folgerung:</u>

Es sei $F_n = F_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Genau dann ist $P(\Delta_n < \infty) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn ξ_0 kein Atom von F_0 ist.

Dies ist das in der Einleitung erwähnte Kriterium von Shorrock [38].

B) Die Verteilungen der "Record Values", "Record Times" und "Inter-record Times"

Die zunächst wichtige Frage nach der gemeinsamen Verteilung dieser Zufallsgrößen beantwortet das folgende

1.8 <u>Lemma:</u>

Es sei $P(\Delta_n < \infty) = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$P(\Delta_1 = k_1, \dots, \Delta_n = k_n, X_0 \leq s_0, X_{1,\Delta_1} \leq s_1, \dots, X_{n,\Delta_n} \leq s_n) =$$

$$\int_{-\infty}^{s_n} \cdots \int_{-\infty}^{s_0} \prod_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,t_i)}(t_{i-1}) F_i^{k_i-1}(t_{i-1})\, d\,F_0(t_0) \dots d\,F_n(t_n)$$

$$(k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N},\ s_0, \dots, s_n \in \mathbb{R}).$$

<u>Beweis:</u>

Es wird im wesentlichen die Beweisidee des ersten Lemmas in [30] benutzt.

Dazu sei $g\colon \mathbb{R}^{2n+1} \to \{0,1\}$ definiert durch

$$g(t_0,\dots,t_n,u_1,\dots,u_n) := \begin{cases} 1, t_0 \leq s_0 \text{ und } u_i \leq t_{i-1} < t_i \leq s_i & \text{für } 1 \leq i \leq n \\ 0 \quad \text{sonst}. \end{cases}$$

Offenbar gilt

$$g(t_0, \dots, t_n, u_1, \dots, u_n) =$$

$$\prod_{i=0}^{n} 1_{(-\infty,s_i]}(t_i) \prod_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,t_i)}(t_{i-1}) \prod_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,t_{i-1}]}(u_i).$$

Mit $Y_0 := X_0$, $Y_i := X_{i,k_i}$ und $Z_i := \max_{1 \leq j \leq k_i - 1} (X_{ij}) \qquad (1 \leq i \leq n)$,

wobei Z_i nur für den Fall $k_i > 1$ zu berücksichtigen ist, und der Unabhängigkeit von X ergibt sich somit

$$P(\Delta_1 = k_1, \dots, \Delta_n = k_n, X_0 \leq s_0, \dots, X_{n,\Delta_n} \leq s_n) =$$

$$P(\{X_0 \leq s_0\} \cap \bigcap_{i=1}^{n} \{Z_i \leq Y_{i-1} < Y_i \leq s_i\}) =$$

$$\int_\Omega g(Y_0,\dots,Y_n,Z_1,\dots,Z_n)\, d\,P = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} g\, d\,P_{(Y_0,\dots,Y_n,Z_1,\dots,Z_n)} =$$

$$\int_{-\infty}^{s_n} \cdots \int_{-\infty}^{s_0} \prod_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,t_i)}(t_{i-1}) \int_{-\infty}^{t_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{t_0} d\,P_{(Z_1,\ldots,Z_n)} \otimes P_{(Y_0,\ldots,Y_n)} =$$

$$\int_{-\infty}^{s_n} \cdots \int_{-\infty}^{s_0} \prod_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,\, t_i)}(t_{i-1}) F_i^{k_i-1}(t_{i-1})\, d\,F_0(t_0) \ldots d\,F_n(t_n). \square$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise soll im folgenden stets

(1.8) $\tau_n := P_{(\Delta_1, \ldots, \Delta_n, X_0, X_{1,\Delta_1}, \ldots, X_{n,\Delta_n})}$ $\qquad (n \in \mathbb{N})$

(1.9) $\sigma_n := P_{(X_0, X_{1,\Delta_1}, \ldots, X_{n,\Delta_n})}$ $\qquad (n \in \mathbb{Z}_0)$

bezeichnen.

1.9 <u>Folgerung:</u>

Es sei $P(\Delta_n < \infty) = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

a) Die gemeinsame Verteilung τ_n der "Record Values" und "Inter-record Times" besitzt eine Dichte f_{τ_n} bezüglich

$\mu_n := \#^n \otimes \bigotimes_{i=0}^{n} \mu_{F_i}$, nämlich

$$f_{\tau_n}(k_1,\ldots,k_n,t_0,\ldots,t_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} F_i^{k_i-1}(t_{i-1}), & t_0 < t_1 < \ldots < t_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

μ_n-fast überall $(k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}, t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R})$.

b) Durch Ersetzen von Δ_i durch U_i auf der linken Seite und von k_i durch $(k_i - k_{i-1})$ auf der rechten Seite der Gleichung in Lemma 1.8 mit $k_0 := 1$ $(1 \leq i \leq n, 1 < k_1 < \ldots < k_n)$ ergibt sich die gemeinsame Verteilung der "Record Values" und "Record Times". Es gilt entsprechendes wie unter a).

c) Die gemeinsame Verteilung der "Inter-record Times" ist gegeben durch

$$P(\Delta_1 = k_1, \ldots, \Delta_n = k_n) =$$

$$\int_{t_0 < \cdots < t_n} \cdots \int \prod_{i=1}^{n} F_i^{k_i - 1}(t_{i-1})\, dF_0(t_0) \ldots dF_n(t_n)$$

$$(k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}).$$

Wie unter b) ergibt sich hieraus die gemeinsame Verteilung der "Record Times".

d) Die gemeinsame Verteilung σ_n der "Record Values" ist gegeben durch

$$P(X_0 \leq s_0, X_{1,\Delta_1} \leq s_1, \ldots, X_{n,\Delta_n} \leq s_n) =$$

$$\int_{-\infty}^{s_n} \cdots \int_{-\infty}^{s_0} \prod_{i=1}^{n} \frac{1_{(-\infty, t_i)}(t_{i-1})}{1 - F_i(t_{i-1})}\, dF_0(t_0) \ldots dF_n(t_n)$$

$$(s_0, \ldots, s_n \in \mathbb{R}),$$

wobei ein Ausdruck der Form $\frac{1}{0}$ als ∞ und $\frac{0}{0}$ als 0 aufzufassen ist.

σ_n besitzt eine Dichte f_{σ_n} bezüglich

$$\nu_n := \bigotimes_{i=0}^{n} \mu_{F_i}, \text{ nämlich}$$

$$f_{\sigma_n}(t_0, \ldots, t_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - F_i(t_{i-1})}, & t_0 < t_1 < \cdots < t_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ν_n-fast sicher $(t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R})$

(vgl. dazu Resnick [33], Lemma 1.1).

e) Die gemeinsame Verteilung von Δ_n und X_{n,Δ_n} ist gegeben durch

$$P(\Delta_n = k, X_{n,\Delta_n} \leq s) = \int_{-\infty}^{s} F_n^{k-1}(t)\left[F_n(s) - F_n(t)\right] dP(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t)$$

$$(k \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{R}).$$

Beweis:

a) Wegen $P(\Delta_n < \infty) = 1$ ist $P(X_{j,\Delta_j} < \infty) = 1$ für $1 \leq j \leq n$. Die Behauptung folgt somit unmittelbar aus Lemma 1.8.

b) Nach Definition 1.1 ist

$$\{U_1 = k_1, \dots, U_n = k_n\} = \{\Delta_1 = k_1 - 1, \Delta_2 = k_2 - k_1, \dots, \Delta_n = k_n - k_{n-1}\}.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

c) Dies folgt aus Lemma 1.8 durch Grenzübergang $s_0, \dots, s_n \to \infty$.

d) Sei $N_n := \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0 < \dots < t_n$ und

$$\bigvee_{1 \leq i \leq n} F_i(t_{i-1}) = 1\}.$$

Dann ist N_n eine ν_n-Nullmenge, denn es ist $N_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N_{ni}$ mit

$N_{ni} := \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i > \xi_i\}$ für $1 \leq i \leq n$.

Ist nämlich $(t_0, \dots, t_n) \in N_n$, so existiert ein $1 \leq i \leq n$ mit $F_i(t_{i-1}) = 1$, so daß nach Definition des rechten Endpunkts von F_i

$t_i > t_{i-1} \geq \xi_i$ folgt.

N_{ni} ist aber für jedes $1 \leq i \leq n$ eine ν_n-Nullmenge wegen $\mu_{F_i}((\xi_i, \infty)) = 0$ für $\xi_i \in \mathbb{R}$ und $N_{ni} = \emptyset$ für $\xi_i = \infty$.

Für $(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus N_n$ gilt nun

$$\sum_{k=1}^{m} 1_{(-\infty, t_i)}(t_{i-1})\, F_i^{k-1}(t_{i-1}) \uparrow \frac{1_{(-\infty, t_i)}(t_{i-1})}{1 - F_i(t_{i-1})} \text{ für } m \to \infty \ (1 \leq i \leq n),$$

so daß die erste Aussage mit dem Satz von der monotonen Konvergenz durch Summation bzgl. $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ aus Lemma 1.8 folgt.

Die zweite Behauptung ergibt sich analog wie unter a).

e) Wegen der Länglichkeit eines direkten Beweises sei auf den nachfolgenden Satz 1.11 verwiesen, aus dem sich die Behauptung unmittelbar ergibt. □

Wie in der Einleitung bereits erwähnt wurde, spielen bei der Untersuchung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Zusammenhänge der "Record Values", "Record Times" und "Inter-record Times" die sogenannten Markoff-Erneuerungsprozesse im Sinne von Çinlar [6] eine große Rolle. Da seine Terminologie für das hier betrachtete Modell etwas zu eng gefaßt ist, soll eine sinngemäße Erweiterung wie folgt vorgenommen werden:

1.10 Definition:

Eine Familie $\{Y_n, T_n\}_{n \in \mathbb{Z}_0}$ reellwertiger Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ heißt Markoff-Erneuerungsprozeß, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

a) $T_0 = \text{const}$ $\quad P$ - fast sicher

b) $P(T_n - T_{n-1} \in A,\ Y_n \in B \mid T_1, \ldots, T_{n-1}, Y_0, \ldots, Y_{n-1}) =$

$$P(T_n - T_{n-1} \in A\ ,\ Y_n \in B \mid Y_{n-1}) \qquad P\text{ - fast sicher}$$

$$(A, B \in \mathfrak{B}\ ,\ n \in \mathbb{N}).$$

Die im folgenden betrachteten bedingten Verteilungen sind o.B.d.A. stets als reguläre bedingte Verteilungen aufzufassen (vgl. dazu Bauer [2], § 56, Breiman [4], Kapitel 4.3).

Den Zusammenhang zwischen dem betrachteten Modell und den Markoff-Erneuerungsprozessen im Sinne von Definition 1.10 behandelt der

1.11 Satz:

Es gelte $P(\Delta_n < \infty) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\{X_{n,\Delta_n}, U_n\}_{n \in \mathbb{Z}_0}$ ein (i.a.nicht-stationärer) Markoff-Erneuerungsprozeß mit

$$P(\Delta_n = k,\ X_{n,\Delta_n} \leq s \mid X_{n-1,\Delta_{n-1}}) =$$

$$\{F_n(s) - F_n(X_{n-1,\Delta_{n-1}})\} F_n^{k-1}(X_{n-1,\Delta_{n-1}})\, 1_{(-\infty,s]}(X_{n-1,\Delta_{n-1}})$$

P - fast sicher $\qquad (n,k \in \mathbb{N}\ ,\ s \in \mathbb{R})$

(vgl. dazu Shorrock [38], Kapitel 2).

Beweis:

Wegen Lemma 4.2 (Anhang) und der nach Definition 1.1 bestehenden eindeutigen Beziehung

$$\Delta_1 = U_1 - 1 \quad \text{und} \quad \Delta_j = U_j - U_{j-1} \qquad (2 \leq j \leq n,\ n \in \mathbb{N})$$

genügt es, die Gültigkeit der Beziehung

$$(1.10) \quad P(\Delta_n \in A,\ X_{n,\Delta_n} \in B \mid \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}, X_0, X_{1,\Delta_1}, \dots, X_{n-1,\Delta_{n-1}}) =$$
$$P(\Delta_n \in A,\ X_{n,\Delta_n} \in B \mid X_{n-1,\Delta_{n-1}})$$
$$P\text{-fast sicher} \qquad (n \in \mathbb{N},\ A \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}),\ B \in \mathfrak{B})$$

nachzuweisen.

Gemäß Hinderer [25], Satz 23.4 besitzt nach Folgerung 1.9 a) $(\Delta_n, X_{n,\Delta_n})$ eine bedingte $\# \otimes \mu_{F_n}$-Dichte bezüglich $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}, X_0, X_{1,\Delta_1}, \dots, X_{n-1,\Delta_{n-1}}$, nämlich

$$(1.11) \quad f_{\Delta_n, X_{n,\Delta_n}}(k_n, t_n \mid \Delta_1 = k_1, \dots, \Delta_{n-1} = k_{n-1}, \dots$$
$$X_0 = t_0, \dots, X_{n-1,\Delta_{n-1}} = t_{n-1}) =$$
$$\frac{f_{\tau_n}(k_1, \dots, k_n, t_0, \dots, t_n)}{f_{\tau_{n-1}}(k_1, \dots, k_{n-1}, t_0, \dots, t_{n-1})} =$$
$$F_n^{k_n - 1}(t_{n-1})\ 1_{(-\infty, t_n)}(t_{n-1}) \qquad \tau_{n-1}\text{-fast sicher}$$
$$(k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N},\ t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}).$$

Hieraus folgt durch Integration

$$P(\Delta_n = k, X_{n,\Delta_n} \leq s \mid \Delta_1 = k_1, \dots, \Delta_{n-1} = k_{n-1}, X_0 = t_0, \dots, X_{n-1,\Delta_{n-1}} = t_{n-1}) =$$
$$F_n^{k-1}(t_{n-1}) \int_{-\infty}^{s} 1_{(t_{n-1}, \infty)}(t_n)\, dF_n(t_n) =$$
$$F_n^{k-1}(t_{n-1})\{F_n(s) - F_n(t_{n-1})\} 1_{(-\infty, s]}(t_{n-1})$$
$$\tau_{n-1}\text{-fast sicher} \quad (k_1, \dots, k_n, k \in \mathbb{N},\ t_0, \dots, t_{n-1}, s \in \mathbb{R}),$$

woraus sich (1.10) und die in Satz 1.11 angegebene Beziehung ergibt. □

Die strukturellen Eigenschaften der Markoff-Erneuerungsprozesse führen im Falle der "Record Values" und "Record Times" zu der

1.12 <u>Folgerung:</u>

Es gelte $P(\Delta_n < \infty) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

a) $\{X_{n,\Delta_n}\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ ist eine (i.a. nicht-stationäre) Markoff-Kette mit

$$P(X_{n,\Delta_n} \leq s \mid X_{n-1,\Delta_{n-1}}) = \frac{F_n(s) - F_n(X_{n-1,\Delta_{n-1}})}{1 - F_n(X_{n-1,\Delta_{n-1}})} 1_{(-\infty,s]}(X_{n-1,\Delta_{n-1}})$$

P - fast sicher $\qquad (n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{R})$.

b) $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ sind bedingt unabhängig gegeben $X_0, X_{1,\Delta_1}, \ldots, X_{n,\Delta_n}$ mit

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} \{\Delta_i = k_i\} \mid X_0, X_{1,\Delta_1}, \ldots, X_{n,\Delta_n}) = \prod_{i=1}^{n} P(\Delta_i = k_i \mid X_{i-1,\Delta_{i-1}}) \quad P\text{ - fast sicher}$$

$(n, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N})$.

Speziell ist

$$P(\Delta_i = k \mid X_{i-1,\Delta_{i-1}}) = (1 - F_i(X_{i-1,\Delta_{i-1}}))F_i^{k-1}(X_{i-1,\Delta_{i-1}}) \tag{1.12}$$

P - fast sicher,

also Δ_i bedingt geometrisch verteilt gegeben $X_{i-1,\Delta_{i-1}}$ mit

(1.13) $\quad E(\Delta_i | X_{i-1,\Delta_{i-1}}) = \dfrac{1}{1 - F_i(X_{i-1,\Delta_{i-1}})}$ P - fast sicher

(1.14) $\quad Var(\Delta_i | X_{i-1,\Delta_{i-1}}) = \dfrac{F_i(X_{i-1,\Delta_{i-1}})}{(1 - F_i(X_{i-1,\Delta_{i-1}}))^2}$

P - fast sicher $\qquad (1 \leq i \leq n)$.

<u>Beweis:</u>

Die Markoff-Eigenschaft und die bedingte Unabhängigkeit sind allgemeine Eigenschaften eines Markoff-Erneuerungsprozesses, siehe Satz 4.3 (Anhang). Im einzelnen gilt:

a) Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung ergibt sich durch Summation bzgl. Δ_n aus Satz 1.11.

b) Wegen Satz 4.3 (Anhang) ist nur zu zeigen:

(1.15) $\quad P(\Delta_i = k \mid X_{i-1,\Delta_{i-1}}, X_{i,\Delta_i}) =$

$$(1 - F_i(X_{i-1,\Delta_{i-1}}))F_i^{k-1}(X_{i-1,\Delta_{i-1}}) \quad \text{P - fast sicher}$$

$$(1 \leq i \leq n,\ k \in \mathbb{N}).$$

Folgerung 1.9 a) impliziert aber, daß

$(\Delta_i, X_{i-1,\Delta_{i-1}}, X_{i,\Delta_i})$ eine $\# \otimes \mu_{F_{i-1}} \otimes \mu_{F_i}$ - Dichte

$f_{\Delta_i, X_{i-1,\Delta_{i-1}}, X_{i,\Delta_i}}$ und $X_{i-1,\Delta_{i-1}}$ eine $\mu_{F_{i-1}}$-Dichte

$f_{X_{i-1,\Delta_{i-1}}}$ besitzt. Nach Satz 1.19 und (1.8) sowie dem bereits zitierten Satz 23.4 in Hinderer [25] existiert dann eine bedingte #- Dichte von Δ_i bezüglich $(X_{i-1,\Delta_{i-1}}, X_{i,\Delta_i})$ mit

$f_{\Delta_i}(k_i \mid X_{i-1,\Delta_{i-1}} = t_{i-1}, X_{i,\Delta_i} = t_i) =$

$$\frac{f_{\Delta_i, X_{i-1,\Delta_{i-1}}, X_{i,\Delta_i}}(k_i, t_{i-1}, t_i)}{f_{X_{i-1,\Delta_{i-1}}, X_{i,\Delta_i}}(t_{i-1}, t_i)} =$$

$$\frac{f_{\Delta_i,X_{i,\Delta_i}}(k_i,t_i|X_{i-1,\Delta_{i-1}} = t_{i-1})f_{X_{i-1,\Delta_{i-1}}}(t_{i-1})}{f_{X_{i,\Delta_i}}(t_i|X_{i-1,\Delta_{i-1}} = t_{i-1})f_{X_{i-1,\Delta_{i-1}}}(t_{i-1})} =$$

$$\frac{f_{\Delta_i,X_{i,\Delta_i}}(k_i,t_i|X_{i-1,\Delta_{i-1}} = t_{i-1})}{\sum_{k=1}^{\infty} f_{\Delta_i,X_{i,\Delta_i}}(k,t_i|X_{i-1,\Delta_{i-1}} = t_{i-1})} =$$

$$(1 - F_i(t_{i-1}))F_i^{k-1}(t_{i-1}) \qquad P_{(X_{i-1,\Delta_{i-1}},X_{i,\Delta_i})}\text{- fast sicher}$$

$$(t_{i-1},\ t_i \in \mathbb{R}).$$

Damit ist (1.15), also auch (1.12) bewiesen. Die Beziehungen (1.13) und (1.14) folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der geometrischen Verteilung. □

Die Beziehung (1.12) läßt sich heuristisch dadurch erklären, daß bei gegebenem $X_{i-1,\Delta_{i-1}} = t_{i-1} \in \mathbb{R}$ der nächste "Record Value" genau dann auftritt, wenn in der Familie $\{X_{ik}\}_{k\in\mathbb{N}}$ erstmalig der Wert t_{i-1} überschritten wird. Wegen der Unabhängigkeit und identischen Verteilung dieser Familie handelt es sich also um ein einfaches Wartezeitproblem, wobei die Überschreitungswahrscheinlichkeit durch

$$P(X_{ik} > t_{i-1}) = 1 - F_i(t_{i-1}) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

gegeben ist.

Wegen der i.a. nicht-stationären Übergangswahrscheinlichkeiten gehen gegenüber Satz 1.11 und Folgerung 1.12 andere wichtige Eigenschaften des Modells mit identischen Verteilungen verloren:

1.13 Bemerkung:

Auch im Falle von $P(\Delta_n < \infty) = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ gilt:

a) $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ bildet i.a. keine Markoff-Kette (vgl. dazu (0.4)). Ist beispielsweise F eine stetige Verteilungsfunktion und ist $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so setze man

$$F_n = F^{\alpha_n} \qquad (n \in \mathbb{Z}_0) .$$

Es ist dann mit $k_0 := 1$ und Folgerung 1.9 c)

$$(1.16) \quad P(U_1 = k_1, \dots, U_n = k_n) = P(\Delta_1 = k_1 - 1, \dots$$
$$\Delta_2 = k_2 - k_1, \dots, \Delta_n = k_n - k_{n-1}) =$$
$$\frac{\prod_{i=0}^{n} \alpha_i}{\prod_{j=1}^{n} \{\sum_{i=1}^{j} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) k_{i-1} + \alpha_j (k_j - 1)\} \{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) k_{i-1} + \alpha_n k_n\}} ,$$

also

$$(1.17) \quad P(U_n = k_n \mid U_0 = k_0, \dots, U_{n-1} = k_{n-1}) =$$
$$\alpha_n \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) k_{i-1} + \alpha_{n-1} k_{n-1}}{\{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) k_{i-1} + \alpha_n (k_n - 1)\} \{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) k_{i-1} + \alpha_n k_n\}}$$
$$(1 < k_1 < \dots < k_n, \; n \in \mathbb{N}) .$$

Dieser Ausdruck ist von $k_1, \dots, k_{n-2}$ nur dann unabhängig, wenn α_i = const für $0 \leq i \leq n-1$. Hier ist also $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ genau dann eine Markoff-Kette, wenn α_n = const für alle $n \in \mathbb{Z}_0$, also im Fall identischer stetiger Verteilung.

b) Sind die Verteilungsfunktionen $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ stetig mit supp $\mu_{F_n} = \mathbb{R}_0$ $(n \in \mathbb{Z}_0)$, so ist der zu $\{X_{n,\Delta_n}, U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ gehörige Zählprozeß $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_0}$, definiert durch

$$(1.18) \quad N_t := \#\{n \in \mathbb{Z}_0 \mid X_{n,\Delta_n} \leq t\} = \min\{n \in \mathbb{Z}_0 \mid X_{n,\Delta_n} > t\} \; (t \in \mathbb{R}_0)$$

i.a. kein Poisson-Prozeß (vgl. dazu Shorrock [39], Theorem 1). Ein diesbezügliches Gegenbeispiel ist in Bemerkung 3.13 zu finden.

II. Charakterisierungen der Exponential- und der geometrischen Verteilungen

Trotz der größeren Allgemeinheit des in Definition 1.1 vorgestellten Modells und des damit zwangsläufig verbundenen Verlusts "guter" Eigenschaften (siehe Bemerkung 1.13) lassen sich immer noch die Klassen der Exponential- und geometrischen Verteilungen durch die Forderung unabhängiger Zuwächse der "Record Values" charakterisieren, wie in den Sätzen 2.1 und 2.5 bzw. 2.2 und 2.9 gezeigt wird. Die ersteren beiden Sätze schließen dabei - wie bereits erwähnt - den auf speziellen Voraussetzungen beruhenden Charakterisierungssatz von Tata [45] für die Exponentialverteilungen ein.
Eine entsprechende Charakterisierung der geometrischen Verteilungen - welche bezüglich der hier wesentlichen "Gedächtnislosigkeit" das diskrete Gegenstück zu den Exponentialverteilungen bilden - wurde, soweit bekannt, bisher nicht veröffentlicht.
Eine andere Charakterisierung beinhalten die Sätze 2.7 und 2.11, wo lediglich die Unabhängigkeit jeweils aufeinanderfolgender Zuwächse vorausgesetzt wird, jedoch mit der zusätzlichen (nicht redundanten) Annahme, daß X_0 selbst exponential- bzw. geometrisch verteilt ist. Der Beweis macht dabei von einer für die Faltung von Exponential- bzw. geometrischen Verteilungen charakteristischen Eigenschaft Gebrauch (Sätze 4.5 und 4.7 (Anhang)).

Im folgenden soll mit $\mathrm{Exp}(\lambda,\zeta)$ die Exponentialverteilung mit den Parametern $\lambda > 0$ und $\zeta \in \mathbb{R}$ bezeichnet werden, deren Lebesgue-Dichte $f(\lambda,\zeta;\cdot)$ die Gestalt

$$(2.1) \quad f(\lambda,\zeta;x) = 1_{\mathbb{R}_\zeta}(x)\,\lambda e^{-\lambda(x-\zeta)} \quad \lambda^1\text{-fast überall} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

besitzt; mit $\mathrm{Geo}(p,\zeta)$ soll die geometrische Verteilung mit den Parametern $p \in (0,1)$ und $\zeta \in \mathbb{Z}$ bezeichnet werden, deren $\#$-Dichte $g(p,\zeta;\cdot)$ die Gestalt

$$(2.2) \quad g(p,\zeta;k) = 1_{\mathbb{Z}_\zeta}(k)\,p(1-p)^{k-\zeta} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

besitzt. ζ ist also jeweils der linke Endpunkt der Verteilung. Zur Abkürzung sei noch

(2.3) $\rho_O := P_{X_O}$ und

$$\rho_n := P_{(X_O, X_{1,\Delta_1} - X_O, \ldots, X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}})} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gesetzt.

A) Darstellungssätze

Für die Klasse der Exponentialverteilungen gilt der folgende

2.1 Satz:

Es sei

$P_{X_{n1}} = \mathrm{Exp}(\lambda_n, \zeta_n)$ mit

$\zeta_n \leqq \zeta_O \qquad (\lambda_n > 0,\ \zeta_O,\ \zeta_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.

Dann besitzt die Familie $\{X_{n,\Delta_n}\}_{n \in \mathbb{Z}_O}$ unabhängige exponentialverteilte Zuwächse; genauer gilt:

$$P_{X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}}} = \mathrm{Exp}(\lambda_n, O) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Beweis:

Die Unabhängigkeit der Zuwächse ist gleichbedeutend mit

(2.4) $$P(X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq s \,|\, X_O, X_{1,\Delta_1} - X_O, \ldots, X_{n-1,\Delta_{n-1}} - X_{n-2,\Delta_{n-2}}) = P(X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq s) \quad P\text{-fast sicher} \quad (n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{R}_O).$$

Zum Beweis dieser Beziehung sei $g_n: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$g_n(t_O, \ldots, t_{n-1}) := (t_O, t_1 - t_O, \ldots, t_{n-1} - t_{n-2}) \quad (t_O, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}).$$

Mit Lemma 4.2 (Anhang), Breiman [4], Proposition 4.36 und Folgerung 1.12 a) ergibt sich

(2.5) $$P(X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq s \,|\, g_n(X_O, \ldots, X_{n-1,\Delta_{n-1}}) = (t_O, \ldots, t_{n-1})) =$$

$$P(X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq s \mid X_0 = t_0, \ldots$$

$$X_{1,\Delta_1} = t_0 + t_1, \ldots, X_{n-1,\Delta_{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} t_k) =$$

$$\frac{F_n(s + \sum_{k=0}^{n-1} t_k) - F_n(\sum_{k=0}^{n-1} t_k)}{1 - F_n(\sum_{k=0}^{n-1} t_k)} = 1 - e^{-\lambda_n s} \quad \rho_{n-1}\text{- fast sicher}$$

$$(t_0, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}).$$

Die letzte Gleichung folgt dabei aus der Tatsache, daß aufgrund der Monotonie der "Record Values"

$\operatorname{supp} \rho_{n-1} \subseteq \mathbb{R}_{\zeta_0} \times \mathbb{R}_0^{n-1}$ gilt, also für

$(t_0, \ldots, t_{n-1}) \in \operatorname{supp} \rho_{n-1}$ wegen $\zeta_n \leq \zeta_0$ stets gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_k \in \mathbb{R}_{\zeta_0} \subseteq \mathbb{R}_{\zeta_n} = \operatorname{supp} \mu_{F_n}.$$

Damit ist (2.4) und gleichzeitig $P_{X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}}} = \operatorname{Exp}(\lambda_n, 0)$

bewiesen. □

Die entsprechende Aussage für die Klasse der geometrischen Verteilungen macht der folgende

2.2 Satz:

Es sei

$P_{X_{n1}} = \operatorname{Geo}(p_n, \zeta_n)$ mit

$\zeta_n \leq \zeta_0 + n$

und X_0 diskret verteilt auf $\mathbb{Z}_{\zeta_0}$ ($p_n \in (0,1)$, $\zeta_0, \zeta_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$).

Dann besitzt die Familie $\{X_{n,\Delta_n}\}_{n \in \mathbb{Z}_0}$ unabhängige geometrisch verteilte Zuwächse; genauer gilt:

$$P_{X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}}} = \operatorname{Geo}(p_n, 1) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Beweis:

Analog zum Beweis des Satzes 2.1 läßt sich zeigen:

$$(2.6)\quad P(X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq s \mid X_0 = t_0, \ldots$$
$$X_{1,\Delta_1} - X_0 = t_1, \ldots, X_{n-1,\Delta_{n-1}} - X_{n-2,\Delta_{n-2}} = t_{n-1}) =$$
$$\frac{F_n(s + \sum_{k=0}^{n-1} t_k) - F_n(\sum_{k=0}^{n-1} t_k)}{1 - F_n(\sum_{k=0}^{n-1} t_k)} = 1 - (1 - p_n)^s \quad \rho_{n-1}\text{-fast sicher}$$
$$(s \in \mathbb{Z}_0,\ t_0, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}).$$

Die letzte Gleichung in (2.6) folgt dabei aus der Beziehung $\operatorname{supp} \rho_{n-1} \subseteq \mathbb{Z}_{\zeta_0} \times \mathbb{N}^{n-1}$ (wegen der strengen Monotonie der "Record Values"), wonach für $(t_0, \ldots, t_{n-1}) \in \operatorname{supp} \rho_{n-1}$ **entweder** $\sum_{k=0}^{n-1} t_k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0+n} \subseteq \mathbb{Z}_{\zeta_n} = \operatorname{supp} \mu_{F_n}$ oder $\sum_{k=0}^{n-1} t_k = \zeta_0+n-1$ gilt. □

2.3 Bemerkung:

a) Satz 2.1 bleibt auch dann gültig, wenn die Bedingung $P_{X_{n1}} = \operatorname{Exp}(\lambda_n, \zeta_n)$ durch die allgemeinere Bedingung

$$P_{X_{n1}}(\cdot \mid X_{n1} > \zeta_0) = \operatorname{Exp}(\lambda_n, \zeta_0) \qquad (\lambda_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

ersetzt wird, da hierdurch die Gültigkeit der Beziehung (2.5) nicht betroffen wird. Entsprechend kann in Satz 2.2 die Bedingung

$P_{X_{n1}} = \operatorname{Geo}(p_n, \zeta_n)$ durch

$$P_{X_{n1}}(\cdot \mid X_{n1} \geq \zeta_0+n) = \operatorname{Geo}(p_n, \zeta_0+n) \qquad (\zeta_0 \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$$

ersetzt werden.

b) Die Bedingungen

$$\zeta_n \leq \zeta_0 \quad \text{bzw.} \quad \zeta_n \leq \zeta_0+n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

in Satz 2.1 bzw. Satz 2.2 sind wesentliche Voraussetzungen.

Ist nämlich im ersten bzw. im zweiten Fall $\zeta_n > \zeta_0$ bzw. $\zeta_n > \zeta_0 + n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist die Menge

$\{\sum_{k=0}^{n-1} t_k \mid (t_0, \ldots, t_{n-1}) \in \operatorname{supp} \rho_{n-1}\}$ nicht in $\operatorname{supp} \mu_{F_n}$ bzw. $\operatorname{supp} \mu_{F_n} \cup \{\zeta_0 + n - 1\}$ enthalten, so daß die Ausdrücke in (2.5) und (2.6) nicht unabhängig von $t_0, \ldots, t_{n-1}$ sind. Beispielsweise ist für $\zeta_1 > \zeta_0$ im Fall des Satzes 2.1

$$P(X_{1,\Delta_1} - X_0 \leq s \mid X_0 = t_0) = \frac{F_1(s+t_0) - F_1(t_0)}{1 - F_1(t_0)} =$$

$$\begin{cases} 0 & , \quad s + t_0 < \zeta_1 \\ 1 - e^{-\lambda_1 (s + t_0)} & , \quad s + t_0 \geq \zeta_1 \quad \text{und} \quad t_0 < \zeta_1 \\ 1 - e^{-\lambda_1 s} & , \quad t_0 \geq \zeta_1 \qquad (s \in \mathbb{R}_0,\ t_0 \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

ρ_0 - fast sicher (man beachte dabei, daß das Intervall $[\zeta_0, \zeta_1)$ keine ρ_0-Nullmenge darstellt). Hieraus ist auch ersichtlich, daß in diesem Fall $X_{1,\Delta_1} - X_0$ i.a. nicht exponentialverteilt ist (man setze etwa $\rho_0 = \varepsilon_{\{\zeta_0\}}$). Entsprechendes gilt im Falle des Satzes 2.2.

Im Fall identischer Verteilungen führt Satz 2.2 zu der

2.4 <u>Folgerung:</u>

Es sei

$$P_{X_0} = P_{X_{n1}} = \mathrm{Geo}(p, \zeta) \qquad (p \in (0,1), \zeta \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}).$$

Dann ist X_{n,Δ_n} negativ-binomialverteilt auf $\mathbb{Z}_{\zeta+n}$, d.h. es gilt:

$$P(X_{n,\Delta_n} = k) = \binom{k-\zeta}{n} p^{n+1} (1-p)^{k-\zeta-n} \qquad (k \in \mathbb{Z}_{\zeta+n},\ n \in \mathbb{Z}_0).$$

Beweis:

Nach Satz 2.2 ist $P_{X_{n,\Delta_n}} = P_{\zeta+n+\sum\limits_{k=0}^{n} Y_k}$, wobei $Y_0, \ldots, Y_n$ unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sind mit $P_{Y_k} = \mathrm{Geo}(p,0)$ $(0 \leq k \leq n)$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Folgerung 2.4 ist das diskrete Analogon zu der entsprechenden Aussage für den Fall identisch exponentialverteilter Zufallsvariablen, wo die "Record Values" eine Erlang-Verteilung besitzen (Karlin [27], Problem 31, S. 267, Neuts [28]).

B Charakterisierungssätze

In diesem Abschnitt werden Bedingungen angegeben, unter denen Umkehrungen der Sätze 2.1 und 2.2 möglich sind. Im Fall der Exponentialverteilungen leistet dies der

2.5 Satz:

Es sei $\zeta_n \leq \zeta_0$, $\xi_n = \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ und F_0 auf $\mathbb{R}_{\zeta_0}$ streng monoton 1). Besitzt dann die Familie $\{X_{n,\Delta_n}\}_{n \in \mathbb{Z}_0}$ unabhängige Zuwächse, so existiert eine Folge $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen mit

$$P_{X_{n1}}(\cdot \mid X_{n1} > \zeta) = \mathrm{Exp}(\lambda_n, \zeta) \qquad (\zeta \in \mathbb{R}_{\zeta_0},\ n \in \mathbb{N}),$$

d.h. X_{n1} ist insbesondere bedingt exponentialverteilt auf $\mathbb{R}_{\zeta_0}$. Dabei ist notwendig $\zeta_0 > -\infty$.

---

1) Tata [45] setzt in dem Beweis zu seinem Charakterisierungssatz 3.1 die absolute Stetigkeit von P_{X_0} voraus. Um in seiner Arbeit von der Beziehung (3.3) auf (3.4) schließen zu können, muß jedoch zusätzlich angenommen werden, daß die zugehörige Dichte λ-fast überall auf $\mathbb{R}_{\zeta_0}$ positiv ist. Dies bedeutet aber gerade die strenge Monotonie von F_0 auf $\mathbb{R}_{\zeta_0}$.

Beweis:

Es bezeichne G_n die Verteilungsfunktion von $P_{X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}}}$ $(n \in \mathbb{N})$.
Wie im Beweis von (2.5) erhält man nach Voraussetzung

(2.7) $$P(X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq s \mid X_0 = t_0, \ldots$$

$$X_{1,\Delta_1} - X_0 = t_1, \ldots, X_{n-1,\Delta_{n-1}} - X_{n-2,\Delta_{n-2}} = t_{n-1}) =$$

$$\frac{F_n(s + \sum_{k=0}^{n-1} t_k) - F_n(\sum_{k=0}^{n-1} t_k)}{1 - F_n(\sum_{k=0}^{n-1} t_k)} = G_n(s) \qquad \rho_{n-1}\text{- fast sicher}$$

$$(s \in \mathbb{R}_0, t_0, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $s > 0$ bezeichne N_s^{n-1} diejenige ρ_{n-1}-Nullmenge, auf der die Beziehung (2.7) nicht gilt; ferner sei

$$A_s^{n-1} := (\mathbb{R}_{\zeta_0} \times \mathbb{R}_0^{n-1}) \setminus N_s^{n-1}.$$

Dann gilt mit $G_0 := F_0$:

(2.8) Sind $G_0, \ldots, G_{n-1}$ streng monoton, so ist A_s^{n-1} dicht in $\mathbb{R}_{\zeta_0} \times \mathbb{R}_0^{n-1}$ für alle $s > 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

Anderenfalls gäbe es Intervalle $I_0 \subseteq \mathbb{R}_{\zeta_0}$, $I_1, \ldots, I_{n-1} \subseteq \mathbb{R}_0$ mit $\lambda(I_k) > 0$ $(1 \leq k \leq n-1)$ und

$A_s^{n-1} \cap \bigtimes_{k=0}^{n-1} I_k = \emptyset$, also $\bigtimes_{k=0}^{n-1} I_k \subseteq N_s^{n-1}$ und demnach wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse

$$\prod_{k=0}^{n-1} \mu_{G_k}(I_k) = \rho_{n-1}(\bigtimes_{k=0}^{n-1} I_k) = 0.$$

Dies steht aber im Widerspruch zur strengen Monotonie von $G_0, \ldots, G_{n-1}$, womit (2.8) bewiesen ist.

Der Beweis des Satzes ergibt sich nun aus dem folgenden Induktionsbeweis für die strenge Monotonie von G_n $(n \in \mathbb{Z}_0)$:

Für n = 0 ist nach Voraussetzung nichts zu zeigen.
Sind nun $G_0, \ldots, G_{n-1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ streng monoton, so ist nach (2.8) A_s^{n-1} dicht in $\mathbb{R}_{\zeta_0} \times \mathbb{R}_0^{n-1}$ für jedes $s > 0$. Dann ist aber auch die Menge

$$\sum_s^{n-1} := \{\sum_{k=0}^{n-1} t_k \mid (t_0, \ldots, t_{n-1}) \in A_s^{n-1}\}$$

dicht in $\mathbb{R}_{\zeta_0}$ wegen der Stetigkeit und Surjektivität der verwendeten Summenabbildung. Damit geht (2.7) über in

$$(2.9) \qquad \frac{F_n(s+t) - F_n(t)}{1 - F_n(t)} = G_n(s) \qquad (s > 0,\ t \in \mathbb{R}_{\zeta_0}).$$

Dies ist zunächst evident für $t \in \sum_s^{n-1}$.

$\sum_s^{n-1}$ ist aber dicht in $\mathbb{R}_{\zeta_0}$; zu $t \in \mathbb{R}_{\zeta_0}$ gibt es also eine Folge $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $\sum_s^{n-1}$ mit $s_k \geqq t$ $(k \in \mathbb{N})$ und $\lim_{k \to \infty} s_k = t$. (2.9) ergibt sich dann aus der rechtsseitigen Stetigkeit von F_n.

Mit $H_k := 1 - G_k$ $(k \in \mathbb{N})$ führt (2.9) zu der Funktionalgleichung

$$(2.10) \quad H_n(s+t) = \frac{1-F_n(s+t+u)}{1-F_n(u)} = \frac{1-F_n(s+u)}{1-F_n(u)} \cdot \frac{1-F_n(t+(s+u))}{1-F_n(s+u)} = H_n(s)\, H_n(t) \qquad (s,t > 0,\ u \in \mathbb{R}_{\zeta_0})$$

mit $H_n(0) = 1$ (wegen der strengen Monotonie der "Record Values").
Da H_n auf $\mathbb{R}_0$ beschränkt ist, gibt es ein $\lambda_n > 0$ mit

$$H_n(s) = e^{-\lambda_n s} \qquad (s > 0)$$

nach Hinderer [25], Lemma 28.6.
Hieraus folgt die strenge Monotonie von $G_n = 1 - H_n$.

Mit (2.9) liefert dies darüber hinaus

$$P(X_{n1} \leq s \mid X_{n1} > \zeta) = \frac{F_n(s) - F_n(\zeta)}{1 - F_n(\zeta)} = 1 - e^{-\lambda_n(s-\zeta)}, \text{ also}$$

$$P_{X_{n1}}(\cdot \mid X_{n1} > \zeta) = \operatorname{Exp}(\lambda_n, \zeta) \qquad (s \in \mathbb{R}_\zeta, \zeta \in \mathbb{R}_{\zeta_0}).$$

ζ_0 ist hierbei notwendig reell, da sonst

$G_n(s) = 0 \quad (s > 0)$ aus (2.9) für $t \to -\infty = \zeta_0$

folgen würde.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

2.6 Bemerkung:

Fordert man spezieller $\zeta_n = \zeta_0$ sowie die Stetigkeit von F_n in ζ_0, so gilt unter den Voraussetzungen von Satz 2.5 sogar

$$P_{X_{n1}} = \operatorname{Exp}(\lambda_n, \zeta_0) \quad \text{mit} \quad \zeta_0 > -\infty \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Man braucht dazu in Satz 2.5 nur $\zeta = \zeta_0$ zu setzen und zu beachten, daß die Stetigkeit von F_n in $\zeta_n = \zeta_0$

$P(X_{n1} > \zeta_0) = P(X_{n1} \geq \zeta_0) = 1$ nach sich zieht.

Ist andererseits $\zeta_n = \zeta_0$ ein Atom von F_n mit $p_n := P(X_{n1} = \zeta_n) > 0$ (und $p_n < 1$ wegen $\xi_n = \infty$), so ist entsprechend

$$P_{X_{n1}} = p_n\, \varepsilon_{\{\zeta_0\}} + (1 - p_n)\operatorname{Exp}(\lambda_n, \zeta_0),$$

also $P_{X_{n1}}$ eine Mischung aus einer Einpunkt- und einer Exponentialverteilung.

Die zweite angekündigte Charakterisierung der Exponentialverteilungen findet sich in dem folgenden

2.7 Satz:

Es sei $P_{X_0} = \operatorname{Exp}(\lambda_0, \zeta_0)$ mit $\lambda_0 > 0$, $\zeta_0 \in \mathbb{R}$.

Ferner sei $\zeta_n \leq \zeta_0$ und $\xi_n = \infty$ $\qquad (n \in \mathbb{N})$.

Besitzt dann die Familie $\{X_{n,\Delta_n}\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ sukzessiv unabhängige Zuwächse, d.h. sind

X_0 und $X_{1,\Delta_1} - X_0$ sowie

$$X_{n+1,\Delta_{n+1}} - X_{n,\Delta_n} \text{ und } X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

unabhängig, so existiert eine Folge $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen mit

$$P_{X_{n1}}(\cdot \mid X_{n1} > \zeta) = \mathrm{Exp}(\lambda_n, \zeta) \qquad (\zeta \in \mathbb{R}_{\zeta_0},\ n \in \mathbb{N}).$$

<u>Beweis:</u>

Die Verteilung zweier sukzessiver Zuwächse hat - unabhängig von der Verteilungsannahme - folgende Gestalt:

$$(2.11) \quad P(X_{n+1,\Delta_{n+1}} - X_{n,\Delta_n} > u,\ X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}} > v) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_n(s)} \int_s^\infty \frac{1-F_{n+1}(t+u+v)}{1-F_{n+1}(t+v)}\, d\,F_n(t+v)\, d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq s)$$

$$(u,v \in \mathbb{R}_0,\ n \in \mathbb{N}).$$

Mit Folgerung 1.12 a) und (1.11) erhält man nämlich

$$P(X_{n+1,\Delta_{n+1}} - X_{n,\Delta_n} > u,\ X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}} > v) =$$

$$P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} + u + v < X_{n,\Delta_n} + u < X_{n+1,\Delta_{n+1}}) =$$

$$\iiint_{s+u+v<t+u<w} d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq s,\ X_{n,\Delta_n} \leq t,\ X_{n+1,\Delta_{n+1}} \leq w) =$$

$$\iiint_{s+u+v<t+u<w} d\,P(X_{n+1,\Delta_{n+1}} \leq w \mid X_{n,\Delta_n} = t) \ldots$$

$$d\,P(X_{n,\Delta_n} \leq t \mid X_{n-1,\Delta_{n-1}} = s)\, d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq s) =$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1_{(s+v,\infty)}(t)}{1-F_n(s)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1_{(t+u,\infty)}(w)}{1-F_{n+1}(t)} \, d\,F_{n+1}(w)\, d\,F_n(t)\, d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq s) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_n(s)} \int_{\mathbb{R}} 1_{(s+v,\infty)}(t) \frac{1-F_{n+1}(t+u)}{1-F_{n+1}(t)} \, d\,F_n(t)\, d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq s) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_n(s)} \int_{s}^{\infty} \frac{1-F_{n+1}(t+u+v)}{1-F_{n+1}(t+v)} \, d\,F_n(t+v)\, d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq s) .$$

Die Aussage des Satzes läßt sich jetzt induktiv zeigen.

Aus der Unabhängigkeit von X_0 und $X_{1,\Delta_1} - X_0$ kann man auf die Existenz eines $\lambda_1 > 0$ schließen, so daß

$$P_{X_{11}}(\,\cdot \mid X_{11} > \zeta) = \mathrm{Exp}(\lambda_1,\zeta) \qquad (\zeta \in \mathbb{R}_{\zeta_0}),$$

wie man dem Induktionsschnitt im Beweis zu Satz 2.5 von $n = 0$ auf $n = 1$ entnehmen kann.

Dies liefert den Induktionsanfang.

Unter der Annahme, daß die Aussage des Satzes für $1 \leqq k \leqq n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen ist, folgt nun mit (2.11)

(2.12) $P(X_{n+1,\Delta_{n+1}} - X_{n,\Delta_n} > u,\ X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}} > v) =$

$$e^{-\lambda_n v} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_n(s)} \int_{s}^{\infty} \frac{1-F_{n+1}(t+u+v)}{1-F_{n+1}(t+v)} \, d\,F_n(t)\, d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq s) =$$

$$e^{-\lambda_n v} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1-F_{n+1}(t+u+v)}{1-F_{n+1}(t+v)} \cdot \frac{1_{(-\infty,t)}(s)}{1-F_n(s)} \, d\,F_n(t)\, d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq s) =$$

$$e^{-\lambda_n v} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1-F_{n+1}(t+u+v)}{1-F_{n+1}(t+v)} \, d\,P(X_{n,\Delta_n} \leqq t \mid X_{n-1,\Delta_{n-1}} = s) \ldots$$

$$d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq s) =$$

$$e^{-\lambda_n v} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1-F_{n+1}(t+u+v)}{1-F_{n+1}(t+v)} \, dP(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq s,\ X_{n,\Delta_n} \leqq t) =$$

$$e^{-\lambda_n v} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1-F_{n+1}(t+u+v)}{1-F_{n+1}(t+v)} \, dP(X_{n,\Delta_n} \leqq t) \qquad (u,v > 0).$$

Die erste Gleichung in (2.12) ergibt sich dabei wegen supp $P_{X_{n-1,\Delta_{n-1}}} \subseteq \mathbb{R}_{\zeta_0}$ aus der für jede borel-meßbare μ_{F_n}-integrierbare Funktion gültigen Beziehung

$$(2.13) \qquad \int\limits_{\mathbb{R}_{\zeta_0}} f(t)\, dF_n(t+v) = e^{-\lambda_n v} \int\limits_{\mathbb{R}_{\zeta_0}} f(t)\, dF_n(t).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist nämlich für $\zeta = \zeta_0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_{\zeta_0}} f(t)\, dF_n(t+v) = (1-F_n(\zeta_0)) \int\limits_{\mathbb{R}_{\zeta_0}} f(t)\, d\, \frac{F_n(t+v) - F_n(\zeta_0)}{1 - F_n(\zeta_0)} =$$

$$(1-F_n(\zeta_0)) \int\limits_{\mathbb{R}_{\zeta_0}} f(t)\, dP(X_{n1} \leqq t+v \mid X_{n1} > \zeta_0) =$$

$$(1-F_n(\zeta_0)) \int\limits_{\mathbb{R}_{\zeta_0}} f(t)\, \lambda_n e^{-\lambda_n (t+v)}\, dt =$$

$$e^{-\lambda_n v} (1-F_n(\zeta_0)) \int\limits_{\mathbb{R}_{\zeta_0}} f(t)\, dP(X_{n1} \leqq t \mid X_{n1} > \zeta_0) =$$

$$e^{-\lambda_n v} (1-F_n(\zeta_0)) \int\limits_{\mathbb{R}_{\zeta_0}} f(t)\, d\, \frac{F_n(t) - F_n(\zeta_0)}{1 - F_n(\zeta_0)} =$$

$e^{-\lambda_n v} \int\limits_{\mathbb{R}_{\zeta_0}} f(t)\, dF_n(t)$, womit (2.13) bewiesen ist.

Aufgrund der Unabhängigkeit von $X_{n+1,\Delta_{n+1}} - X_{n,\Delta_n}$ und $X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}}$ geht nun (2.12) über in

$$(2.14) \quad \int_{\mathbb{R}_{\zeta_0}} \frac{1-F_{n+1}(t+u+v)}{1-F_{n+1}(t+v)}\, dP(X_{n,\Delta_n} \leqq t) = \int_{\mathbb{R}_{\zeta_0}} \frac{1-F_{n+1}(t+u)}{1-F_{n+1}(t)}\, dP(X_{n,\Delta_n} \leqq t)$$

$$(u,v \geqq 0) .$$

Wegen Bemerkung 2.3 a) ist aber nach Induktionsvoraussetzung

$$X_{n,\Delta_n} = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (X_{k,\Delta_k} - X_{k-1,\Delta_{k-1}})$$

eine Summe unabhängiger mit den Parametern (λ_0,ζ_0), $(\lambda_1,0)$, ... , $(\lambda_n,0)$ exponentialverteilter Zufallsvariablen, so daß nach Satz 4.5 (Anhang) folgt:

$$(2.15) \quad \frac{1-F_{n+1}(t+u+v)}{1-F_{n+1}(t+v)} = \frac{1-F_{n+1}(t+u)}{1-F_{n+1}(t)} \qquad (u,v \geqq 0,\ t \in \mathbb{R}_{\zeta_0}) .$$

Setzt man $H_{n+1}(t) = \dfrac{1-F_{n+1}(\zeta+t)}{1-F_{n+1}(\zeta)}$ $\qquad (t \in \mathbb{R}_0,\ \zeta \in \mathbb{R}_{\zeta_0})$,

so folgt aus (2.15) die Funktionalgleichung

$$(2.16) \quad H_{n+1}(u+v) = \frac{1-F_{n+1}(\zeta+u+v)}{1-F_{n+1}(\zeta)} = \frac{1-F_{n+1}(\zeta+v)}{1-F_{n+1}(\zeta)} \cdot \frac{1-F_{n+1}(\zeta+u+v)}{1-F_{n+1}(\zeta+v)}$$

$$= \frac{1-F_{n+1}(\zeta+v)}{1-F_{n+1}(\zeta)} \cdot \frac{1-F_{n+1}(\zeta+u)}{1-F_{n+1}(\zeta)} = H_{n+1}(u)\, H_{n+1}(v)$$

$$(u,v \geqq 0)$$

mit $H_{n+1}(0) = 1$.

Hieraus ergibt sich wie im Beweis zu Satz 2.5 die Existenz eines $\lambda_{n+1} > 0$ mit

$$P_{X_{n+1,1}}(\cdot \mid X_{n+1,1} > \zeta) = \operatorname{Exp}(\lambda_{n+1},\zeta) \qquad (\zeta \in \mathbb{R}_{\zeta_0}) .$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

2.8 Bemerkung:

a) Die Ausführungen in Bemerkung 2.6 gelten entsprechend auch für Satz 2.7.

b) Die Voraussetzung $P_{X_0} = \mathrm{Exp}(\lambda_0, \zeta_0)$ in Satz 2.7 kann nicht durch die schwächere Voraussetzung der strengen Monotonie von F_0 auf $\mathbb{R}_{\zeta_0}$ wie in Satz 2.5 ersetzt werden. Sei dazu $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ und für $x \in \mathbb{R}_0$

$$F_0(x) := \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, 1_{(n,n+1]}(t)\, dt$$

$$F_n(x) := 1 - e^{-x} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \neq 2)$$

$$F_2(x) := 1 - e^{-(2\pi x + \sin 2\pi x)} .$$

Satz 2.1 liefert nun die Unabhängigkeit von

X_0 und $X_{1,\Delta_1} - X_0$ sowie

$X_{n+1,\Delta_{n+1}} - X_{n,\Delta_n}$ und $X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}}$ für $n \geq 3$.

Zum Beweis des letzteren setze man etwa

$X_0^* := X_{2,\Delta_2}$ und

$X_{nk}^* := X_{n+2,k}$ $(n,k \in \mathbb{N})$ und wende Satz 2.1 auf die Familie $X^* = \{X_0^*, \{X_{nk}^*\}_{n,k \in \mathbb{N}}\}$ an.

Für $n = 2$ liefert (2.11)

$$P(X_{3,\Delta_3} - X_{2,\Delta_2} > u,\ X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1} > v) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_2(s)} \int_{s+v}^{\infty} e^{-u}\, d\,F_2(t)\ d\,P\,(X_{1,\Delta_1} \leq s) =$$

$$e^{-u} \int_{\mathbb{R}} \frac{1-F_2(s+v)}{1-F_2(s)}\, d\,P(X_{1,\Delta_1} \leq s) =$$

$$P(X_{3,\Delta_3} - X_{2,\Delta_2} > u)\ P(X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1} > v) \qquad (u,v \in \mathbb{R}_0),$$

also die Unabhängigkeit von $X_{3,\Delta_3} - X_{2,\Delta_2}$ und $X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1}$.

Für n = 1 ergibt (2.11) mit (2.13)

$$P(X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1} > u,\ X_{1,\Delta_1} - X_0 > v) =$$

$$e^{-v} \iint_{0<s<t<\infty} \frac{1-F_2(t+u+v)}{1-F_2(t+v)}\, e^{-(t-s)}\ dt\ d\,F_0(s) =$$

$$e^{-v} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-t}\, \frac{1-F_2(s+t+u+v)}{1-F_2(s+t+v)}\, d\,F_0(s)\,dt =$$

$$e^{-v} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-t}\, \frac{1-F_2(s+t+u+v)}{1-F_2(s+t+v)}\ ds\ dt =$$

$$e^{-v} \int_0^{1} \frac{1-F_2(s+u)}{1-F_2(s)}\ ds = P(X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1} > u)\,P(X_{1,\Delta_1} - X_0 > v)$$

$$(u,v \in \mathbb{R}_0)$$

wegen der 1-Periodizität der Funktion

$$\frac{1 - F_2(\,\cdot + u)}{1 - F_2(\cdot)} = e^{-2(\pi u + \sin(\pi u)\cos(2\pi\,.\, + \pi u))} \qquad (u \in \mathbb{R}_0),$$

also die Unabhängigkeit von $X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1}$ und $X_{1,\Delta_1} - X_0$.

Die Familie $\{X_0, X_{1,\Delta_1} - X_0, X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1}\}$ ist dagegen nicht unabhängig wegen

$$P(X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1} \leq s \mid X_0 = t_0, X_{1,\Delta_1} - X_0 = t_1) = \frac{F_2(s+t_0+t_1) - F_2(t_0+t_1)}{1 - F_2(t_0+t_1)} =$$

$$1 - e^{-2(\pi s + \sin(\pi s)\cos(2\pi(t_0+t_1) + \pi s))} \qquad \lambda^2\text{- fast überall}$$
$$(s, t_0, t_1 \in \mathbb{R}_0),$$

wie man den ersten beiden Gleichungen in Beziehung (2.5) entnehmen kann.

Die Familie X besitzt also sukzessiv unabhängige Zuwächse, ohne daß alle X_{n1} bedingt exponentialverteilt sind $(n \in \mathbb{N})$.

Die Satz 2.5 entsprechende Charakterisierung der geometrischen Verteilung behandelt der folgende

2.9 <u>Satz:</u>

Es sei $\zeta_n \leq \zeta_0 + n$, $\xi_n = \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ und X diskret verteilt auf $\mathbb{Z}$ mit supp $P_{X_0} = \mathbb{Z}_{\xi_0}$. Besitzt dann die Familie $\{X_{n,\Delta_n}\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ unabhängige Zuwächse, so existiert eine Folge $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $0 < p_n < 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und

$$P_{X_{n1}}(\cdot \mid X_{n1} \geq \zeta) = \mathrm{Geo}(p_n, \zeta) \qquad (\zeta \in \mathbb{Z}_{\zeta_0 + n},\ n \in \mathbb{N}),$$

d.h. X_{n1} ist insbesondere bedingt geometrisch verteilt auf $\mathbb{Z}_{\zeta_0}$. Dabei ist notwendig $\zeta_0 > -\infty$.

<u>Beweis:</u>

Es bezeichne G_n wieder die Verteilungsfunktion von $P_{X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Wie im Beweis von (2.6) erhält man nach Voraussetzung

$$(2.17)\quad P(X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq s \mid X_0 = t_0,\ X_{1,\Delta_1} - X_0 = t_1, \ldots$$

$$X_{n-1,\Delta_{n-1}} - X_{n-2,\Delta_{n-2}} = t_{n-1}) =$$

$$\frac{F_n(s + \sum_{k=0}^{n-1} t_k) - F_n(\sum_{k=0}^{n-1} t_k)}{1 - F_n(\sum_{k=0}^{n-1} t_k)} = G_n(s) \quad \rho_{n-1}\text{-fast sicher}$$

$$(s \in \mathbb{Z}_0,\ t_0, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}).$$

Der Beweis des Satzes ergibt sich aus dem folgenden Induktionsbeweis für die Beziehung

$$(2.18)\quad \operatorname{supp} \rho_n = \mathbb{Z}_{\zeta_0} \times \mathbb{N}^n \qquad (n \in \mathbb{Z}_0).$$

Für $n = 0$ ist nach Voraussetzung nichts zu zeigen. Ist nun (2.18) für ein $n-1 \in \mathbb{Z}_0$ gültig, so führt (2.17) mit $t_1 = \ldots = t_{n-1} = 1$ zu der Beziehung

$$(2.19)\quad \frac{F_n(s + t_0 + n-1) - F_n(t_0 + n-1)}{1 - F_n(t_0 + n-1)} = G_n(s) \qquad (t_0 \in \mathbb{Z}_{\zeta_0}, s \in \mathbb{Z}_0),$$

was mit $H_k := 1 - G_k$ $(k \in \mathbb{N})$ übergeht in

$$(2.20)\quad H_n(s+t) = \frac{1-F_n(s+t+t_0+n-1)}{1-F_n(t_0+n-1)} = \frac{1-F_n(s+t_0+n-1)}{1-F_n(t_0+n-1)} \cdot$$

$$\frac{1-F_n(t+(s+t_0)+n-1)}{1-F_n((s+t_0)+n-1)} = H_n(s) \cdot H_n(t) \qquad (t_0 \in \mathbb{Z}_{\zeta_0}, s \in \mathbb{Z}_0)$$

mit $H_n(0) = 1$ (aufgrund der strengen Monotonie der "Record Values").
Wegen $\xi_n = \infty$ und $\zeta_n \leq \zeta_0 + n$ ist nach (2.19)

$0 < G_n(s) < 1$ $(s \in \mathbb{N})$, d.h. $\operatorname{supp} \rho_n = \mathbb{Z}_{\zeta_0} \times \mathbb{N}^n$

wegen $G_n(0) = 0$.

Insbesondere ist also $0 < p_n := G_n(1) < 1$.
Setzt man in (2.20) $t = 1$, so erhält man iterativ

$$H_n(s+k) = H_n(s)\, H_n^k(1) \qquad (s \in \mathbb{Z}_0,\ k \in \mathbb{N})$$

und somit für $s = 0$

$$G_n(k) = 1 - H_n(k) = 1 - H_n^k(1) = 1 - (1-p_n)^k \qquad (k \in \mathbb{Z}_0).$$

(2.19) besagt damit

$$P(X_{n1} \leqq s \mid X_{n1} \geqq \zeta) = \frac{F_n(s) - F_n(\zeta-1)}{1 - F_n(\zeta-1)} = 1 - (1-p_n)^{(s-\zeta+1)}, \text{ also}$$

$$P_{X_{n1}}(\,\cdot \mid X_{n1} \geqq \zeta) = \mathrm{Geo}(p_n,\zeta) \qquad (s \in \mathbb{Z}_\zeta,\ \zeta \in \mathbb{Z}_{\zeta_0+n}).$$

ζ_0 ist hierbei notwendig reell, da sonst $G_n(s) = 0$ $(s \in \mathbb{N})$ aus (2.19) für $t \to -\infty = \zeta_0$ folgen würde.

Der Satz ist damit vollständig bewiesen. □

2.10 Bemerkung:

Fordert man in Satz 2.9 spezieller $\zeta_n = \zeta_0+n$, so gilt unter den Voraussetzungen von Satz 2.9 sogar $P_{X_{n1}} = \mathrm{Geo}(p_n,\zeta_n)$ mit $\zeta_0 > -\infty$ $(n \in \mathbb{N})$. Es braucht dazu nur $\zeta = \zeta_0+n$ gesetzt zu werden.

Die Satz 2.7 entsprechende Charakterisierung der geometrischen Verteilungen ist gegeben durch den folgenden

2.11 Satz:

Es sei $P_{X_0} = \mathrm{Geo}(p_0,\zeta_0)$ mit $0 < p_0 < 1$, $\zeta_0 \in \mathbb{Z}$.
Ferner sei $\zeta_n \leqq \zeta_0+n$, $\xi_n = \infty$ und $\{X_{n1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{Z}$ diskret verteilt. Besitzt dann die Familie $\{X_{n,\Delta_n}\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ sukzessiv unabhängige Zuwächse, so existiert eine Folge $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $0 < p_n < 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und

$$P_{X_{n1}}(\,\cdot \mid X_{n1} \geqq \zeta) = \mathrm{Geo}(p_n,\zeta) \qquad (\zeta \in \mathbb{Z}_{\zeta_0+n},\ n \in \mathbb{N}).$$

Beweis:

Der Beweis ist völlig analog zum Beweis des Satzes 2.7 zu führen. Man hat hierbei nur zu beachten, daß der Beziehung (2.12) die Beziehung

$$(2.21)\quad P(X_{n+1,\Delta_{n+1}} - X_{n,\Delta_n} > u,\ X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}} > v) =$$

$$(1-p_n)^v \sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} \frac{1-F_{n+1}(k+u+v)}{1-F_{n+1}(k+v)}\, P(X_{n,\Delta_n} = k) \qquad (u,v \in \mathbb{N})$$

und der Beziehung (2.13) die Beziehung

$$(2.22)\quad \sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} f(k)\ P(X_{n1} = k+v) = (1-p_n)^v \sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} f(k)\ P(X_{n1} = k) \qquad (v \in \mathbb{N})$$

entspricht.

Wegen der strengen Monotonie der "Record Values" ist nämlich supp $P_{X_{n-1,\Delta_{n-1}}} \subseteq \mathbb{Z}_{\zeta_0+n-1}$, und die Gültigkeit der Beziehung (2.22) ergibt sich aus

$$\sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} f(k)\quad P(X_{n1}= k+v) = P(X_{n1} \geqq \zeta_0+n) \sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} f(k)\ P(X_{n1} = k+v \mid X_{n1} \geqq \zeta_0+n) =$$

$$(1-F_n(\zeta_0+n-1)) \sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} f(k)\ p_n(1-p_n)^{k+v} =$$

$$(1-p_n)^v\ (1-F_n(\zeta_0+n-1)) \sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} f(k)\ p_n(1-p_n)^k =$$

$$(1-p_n)^v\ (1-F_n(\zeta_0+n-1)) \sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} f(k)\ P(X_{n1} = k \mid X_{n1} \geqq \zeta_0+n) =$$

$$(1-p_n)^v \sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} f(k)\ P(X_{n1} = k)\ .$$

Der Funktionalgleichung (2.14) entspricht somit die Funktionalgleichung

$$(2.23)\qquad \sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} \frac{1-F_{n+1}(k+u+v)}{1-F_{n+1}(k+v)}\, P(X_{n,\Delta_n}=k) = \sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} \frac{1-F_{n+1}(k+u)}{1-F_{n+1}(k)}\, P(X_{n,\Delta_n}=k)$$

$$(u,v \in \mathbb{Z}_0),$$

wobei nach Bemerkung 2.3 a)

$$X_{n,\Delta_n} = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (X_{k,\Delta_k} - X_{k-1,\Delta_{k-1}})$$

eine Summe unabhängiger mit den Parametern $(p_0,\zeta_0),(p_1,1),\ldots,(p_n,1)$ geometrisch verteilter Zufallsvariablen darstellt. Mit Satz 4.7 (Anhang) ergibt sich also die Beziehung

$$(2.24)\qquad \frac{1-F_{n+1}(k+u+v)}{1-F_{n+1}(k+v)} = \frac{1-F_{n+1}(k+u)}{1-F_{n+1}(k)} \qquad (u,v \in \mathbb{Z}_0,\ k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0+n}).$$

Setzt man $H_{n+1}(k) := \dfrac{1-F_{n+1}(k+\zeta)}{1-F_{n+1}(\zeta)}$ $\qquad (k \in \mathbb{Z}_0,\ \zeta \in \mathbb{Z}_{\zeta_0+n})$,

so folgt hieraus analog zu (2.16) die Funktionalgleichung

$$(2.25)\qquad H_{n+1}(u+v) = H_{n+1}(u)\cdot H_{n+1}(v) \qquad (u,v \in \mathbb{Z}_0)$$

$$\text{mit } H_n(0) = 1.$$

Damit ergibt sich wie im Beweis zu Satz 2.9 die Existenz eines $0 < p_{n+1} < 1$ mit

$$P_{X_{n+1,1}}(\,\cdot \mid X_{n+1,1} \geqq \zeta) = \mathrm{Geo}(p_{n+1},1) \qquad (\zeta \in \mathbb{Z}_{\zeta_0+n}).\ \square$$

2.12 <u>Bemerkung:</u>

a) Die Ausführungen in Bemerkung 2.10 gelten entsprechend auch für Satz 2.11.

b) Auf die Voraussetzung $P_{X_0} = \mathrm{Geo}(p_0,\xi_0)$ in Satz 2.11 kann nicht ohne weiteres verzichtet werden. Sei dazu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} \quad \text{und}$$

$$P(X_0 = 2k+j) = a_k \qquad (j \in \{0,1\},\ k \in \mathbb{Z}_0).$$

Ferner sei

$$P(X_{n1} = k) = 2^{-k} \qquad (k,n \in \mathbb{N},\ n \neq 2)$$

und

$$P(X_{21} = k) = \begin{cases} 2^{-(\frac{k}{2}+2)} & , \ k \ \text{gerade} \\ 2^{-(\frac{k-1}{2}+2)} & , \ k \ \text{ungerade} \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}_0).$$

Satz 2.2 liefert dann wie in Bemerkung 2.8 b) die Unabhängigkeit von

X_0 und $X_{1,\Delta_1} - X_0$ sowie

$X_{n+1,\Delta_{n+1}} - X_{n,\Delta_n}$ und $X_{n,\Delta_n} - X_{n-1,\Delta_{n-1}}$ für $n \geq 3$.

Für $n = 2$ liefert (2.11)

$$P(X_{3,\Delta_3} - X_{2,\Delta_2} > u,\ X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1} > v) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-F_2(k)} \sum_{j=k+v+1}^{\infty} 2^{-u}\, P(X_{21} = j)\, P(X_{1,\Delta_1} = k) =$$

$$2^{-u} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-F_2(k+v)}{1-F_2(k)}\, P(X_{1,\Delta_1} = k) =$$

$$P(X_{3,\Delta_3} - X_{2,\Delta_2} > u)\, P(X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1} > v) \qquad (u,v \in \mathbb{Z}_0),$$

also die Unabhängigkeit von $X_{3,\Delta_3} - X_{2,\Delta_2}$ und $X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1}$.

Wegen

$$1 - F_2(k) = \begin{cases} 3 \cdot 2^{-(\frac{k}{2} + 2)} & , \text{ k gerade} \\ 2 \cdot 2^{-(\frac{k-1}{2} + 2)} & , \text{ k ungerade,} \quad \text{also} \end{cases}$$

$$(2.26) \quad \frac{1 - F_2(k+m)}{1 - F_2(k)} = \begin{cases} 2^{-\frac{m}{2}} & , \text{ m gerade} \\ \frac{2}{3} \cdot 2^{-(\frac{m-1}{2})} & , \text{ k gerade, m ungerade} \\ \frac{3}{2} \cdot 2^{-(\frac{m+1}{2})} & , \text{ k ungerade, m ungerade} \end{cases}$$

gilt

$$\frac{1 - F_2(2k + j + m)}{1 - F_2(2k + j)} = \frac{1 - F_2(j + m)}{1 - F_2(j)} \qquad (k,m \in \mathbb{Z}_0,\ j \in \{0,1\}).$$

Für n = 1 ergibt dann (2.11) mit (2.22)

$$P(X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1} > u,\ X_{1,\Delta_1} - X_0 > v) =$$

$$2^{-v} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-(i-k)} \frac{1 - F_2(i+u+v)}{1 - F_2(i+v)} P(X_0 = k) =$$

$$2^{-v} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - F_2(k+i+u+v)}{1 - F_2(k+i+v)} P(X_0 = k) =$$

$$2^{-v} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} \{\frac{1 - F_2(2k + i+u+v)}{1 - F_2(2k + i+v)} P(X_0 = 2k) + \ldots$$

$$\frac{1 - F_2(2k + 1+i+u+v)}{1 - F_2(2k + 1+i+v)} P(X_0 = 2k + 1)\} =$$

$$2^{-v} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1} \{\frac{1 - F_2(i+u+v)}{1 - F_2(i+v)} + \frac{1 - F_2(1+i+u+v)}{1 - F_2(1+i+v)}\} =$$

$$\begin{cases} 2^{-v}\, 2^{-\frac{u}{2}} & , \quad u \text{ gerade} \\ 2^{-v}\left(\frac{1}{3}\cdot 2^{-(\frac{u-1}{2})} + \frac{3}{4}\cdot 2^{-(\frac{u+1}{2})}\right), & u \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$(u,v \in \mathbb{Z}_0)$$

wegen (2.26). Damit sind auch $X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1}$ und $X_{1,\Delta_1} - X_0$ unabhängig.

Die Familie X_0, $X_{1,\Delta_1} - X_0$, $X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1}$ ist dagegen nicht unabhängig wegen

$$P(X_{2,\Delta_2} - X_{1,\Delta_1} \leq s \mid X_0 = t_0,\ X_{1,\Delta_1} - X_0 = t_1) =$$

$$\frac{F_2(s+t_0+t_1) - F_2(t_0+t_1)}{1 - F_2(t_0+t_1)} = \begin{cases} 1 - 2^{-\frac{s}{2}} & , \quad s \text{ gerade} \\ 1 - \frac{2}{3}\cdot 2^{-(\frac{s-1}{2})} & , \quad s \text{ ungerade und } t_0 + t_1 \text{ gerade} \\ 1 - \frac{3}{2}\cdot 2^{-(\frac{s+1}{2})} & , \quad s \text{ ungerade und } t_0 + t_1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$(s,\ t_0 \in \mathbb{Z}_0,\ t_1 \in \mathbb{N}),$$

wie man der ersten Gleichung in (2.6) entnehmen kann.

Die Familie X besitzt also sukzessiv unabhängige Zuwächse, ohne daß alle X_{n1} bedingt geometrisch verteilt sind $(n \in \mathbb{N})$.

III. Parametrische Fragestellungen

Die in Kapitel II charakterisierten Verteilungsklassen lassen eine parametrische Betrachtung der "Record Values","Record Times" und "Inter-record Times" zu. Dies ist für praktische Fragestellungen von Bedeutung, da oft nur Realisationen der "Record Values" und "Record Times" bzw. "Inter-record Times" beobachtet werden können und man hieraus Rückschlüsse auf die zugrundeliegenden Verteilungen oder auch zukünftige Beobachtungen ziehen möchte. Unter geeigneten Voraussetzungen lassen sich dann entsprechende (parametrische) Schätz- und Testprobleme formulieren, die mit den üblichen Methoden der mathematischen Statistik gelöst werden können (Beispiel 3.14). Umgekehrt besteht in vielen praktischen Fällen die Möglichkeit, gewisse Kenngrößen im voraus festzulegen. Man ist dann beispielsweise an der Frage interessiert, wie sich "Record Values" und "Record Times" bei - etwa geringfügigen - Änderungen dieser Größen verhalten. Auch hier bietet sich eine parametrische Betrachtungsweise des Problems an.

A) "Record Values", "Record Times" und "Inter-record Times" bei Exponential- und geometrischen Verteilungen

Im folgenden soll unter den Voraussetzungen

$$(3.1) \qquad P_{X_0} = \mathrm{Exp}(\lambda_0, \zeta_0)$$

$$P_{X_{n1}} = \mathrm{Exp}(\lambda_n, \zeta_n) \quad \text{mit} \quad \zeta_n \leqq \zeta_0$$

$$(\lambda_0, \lambda_n > 0, \zeta_0, \zeta_n \in \mathbb{R}\ ,\ n \in \mathbb{N})$$

$f_n(\lambda_0, \ldots, \lambda_n, \zeta_0\,;\,\cdot)$ die stetige λ-Dichte von X_{n,Δ_n} $(n \in \mathbb{Z}_0)$ sowie unter den Voraussetzungen

$$(3.2) \qquad P_{X_0} = \mathrm{Geo}(p_0, \zeta_0)$$

$$P_{X_{n1}} = \mathrm{Geo}(p_n, \zeta_n) \quad \text{mit} \quad \zeta_n \leqq \zeta_0 + n$$

$$(0 < p_0, p_n < 1, \zeta_0, \zeta_n \in \mathbb{Z}\ ,\ n \in \mathbb{N})$$

$g_n(p_0, \dots, p_n, \zeta_0; \cdot)$ die auf $\mathbb{Z}$ definierte $\#$-Dichte von X_{n,Δ_n} $(n \in \mathbb{Z}_0)$ bezeichnen.

Aus Vereinfachungsgründen werden für diese Dichten daneben auch die kürzeren Symbole f_n bzw. g_n verwendet.

3.1 <u>Lemma:</u>

a) Unter den Voraussetzungen (3.1) gilt:

Ist $m_n := |\{\lambda_0, \dots, \lambda_n\}| = |\{\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_{m_n}}\}|$

$(0 \leq j_k \leq n,\ 1 \leq k \leq m_n,\ n \in \mathbb{Z}_0)$ und sind

$r_1, \dots, r_{m_n} \in \{1, \dots, n+1\}$ die Vielfachheiten von

$\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_{m_n}}$, so besitzt die Dichte f_n von X_{n,Δ_n}

die Gestalt

$$(3.3)\quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{m_n} \Big(\sum_{i=0}^{r_k-1} c_{ki}(x-\zeta_0)^i \Big) e^{-\lambda_{j_k}(x-\zeta_0)} \qquad (x \in \mathbb{R}_{\zeta_0}).$$

Die reellen Koeffizienten c_{ki} $(0 \leq i \leq r_k-1,\ 1 \leq k \leq m_n)$ sind dabei i.a. von $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ abhängig.

Im Fall $m_n = 1$ gilt genauer

$$(3.4)\quad f_n(x) = \lambda_0^{n+1} \frac{(x-\zeta_0)^n}{n!} e^{-\lambda_0(x-\zeta_0)},$$

im Fall $m_n = n+1$

$$(3.5)\quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{j=0}^{n} \lambda_j}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (\lambda_j - \lambda_k)} e^{-\lambda_k(x-\zeta_0)} \qquad (x \in \mathbb{R}_{\zeta_0}).$$

Es ist stets

$$(3.6)\quad E(X_{n,\Delta_n}) = \zeta_0 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k}$$

$$\mathrm{Var}(X_{n,\Delta_n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k^2}.$$

b) Unter den Voraussetzungen (3.2) gilt:

Die Dichte g_n von X_{n,Δ_n} $(n \in \mathbb{Z}_0)$ besitzt die Gestalt

$$(3.7)\quad g_n(k) = \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_0 \\ \sum_{i=0}^{n} k_i = k-n-\zeta_0}} \prod_{j=0}^{n} p_j(1-p_j)^{k_j} \qquad (k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0+n}).$$

Es ist

$$(3.8)\quad E(X_{n,\Delta_n}) = \zeta_0 - 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p_k}$$

$$\operatorname{Var}(X_{n,\Delta_n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1-p_k}{p_k^2}\ .$$

<u>Beweis:</u>

a) Gemäß Satz 2.1 ist

$$(3.9)\quad P_{X_{n,\Delta_n}} = P_{\zeta_0 + \sum_{k=0}^{n} Y_k}\ , \text{ wobei}$$

$Y_0, \ldots, Y_n$ unabhängige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sind mit

$$P_{Y_k} = \operatorname{Exp}(\lambda_k, 0) \qquad (0 \leq k \leq n).$$

Nach Lemma 4.4 (Anhang) genügen damit $f_0, \ldots, f_n$ dem homogenen linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} f_0'(x) &= -\lambda_0 f_0(x) \\ f_1'(x) &= \lambda_1 (f_0(x) - f_1(x)) \\ &\vdots \\ f_n'(x) &= \lambda_n (f_{n-1}(x) - f_n(x)) \qquad (x > \zeta_0). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Beziehung (3.3) (siehe etwa Erwe [11], Kapitel IV, Abschnitt 5).

(3.9) impliziert unmittelbar auch die Gültigkeit der Bezie-

hungen (3.6) sowie (3.4) und (3.5)
(Feller [12], Kapitel I.13, Problem 12).

b) Nach Satz 2.2 ist

$$(3.10)\quad P_{X_{n,\Delta_n}} = P_{\zeta_0+n+\sum\limits_{k=0}^{n} Z_k}\,, \quad \text{wobei}$$

$Z_0, \dots, Z_n$ unabhängige Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ sind mit
$P_{Z_k} = \mathrm{Geo}(p_k,0) \quad (0 \leq k \leq n)$.

Dies liefert die Gültigkeit der Beziehung (3.8) sowie

$$g_n(k) = P\Big(\sum_{j=0}^{n} Z_j = k-n-\zeta_0\Big) =$$

$$\sum_{\substack{k_0,\dots,k_n \in \mathbb{Z}_0\\ \sum_{i=0}^{n} k_i = k-n-\zeta_0}} P\Big(\bigcap_{j=0}^{n} \{Z_j = k_j\}\Big) =$$

$$\sum_{\substack{k_0,\dots,k_n \in \mathbb{Z}_0\\ \sum_{i=0}^{n} k_i = k-n-\zeta_0}} \prod_{j=0}^{n} p_j(1-p_j)^{k_j} \qquad (k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0}),$$

also die Gültigkeit der Beziehung (3.7). □

Mit Hilfe von Lemma 3.1 läßt sich nun der folgende wichtige Satz beweisen, der u.a. Aussagen über Erwartungswerte und Varianzen der "Inter-record Times" macht:

3.2 <u>Satz:</u>

Unter den Voraussetzungen (3.1) gilt:

a) Für $|\{\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}\}| = n$ besitzt die Verteilung von Δ_n die Gestalt

$$P(\Delta_n > k) = \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_j} \Big) \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\frac{\lambda_j}{\lambda_n} + 1)}{\Gamma(k + \frac{\lambda_j}{\lambda_n} + 1)} =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\lambda_n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_j)} B(k+1, \frac{\lambda_j}{\lambda_n}) \qquad (n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}_0),$$

wobei Γ die Gamma-Funktion und B die Beta-Funktion bezeichne.

b) $E(\Delta_n)$ existiert genau dann, wenn

$$\lambda_n < \min_{0 \leq j \leq n-1} \{\lambda_j\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

In diesem Fall ist

$$E(\Delta_n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_n} .$$

c) $Var(\Delta_n)$ existiert genau dann, wenn

$$\lambda_n < \frac{1}{2} \min_{0 \leq j \leq n-1} \{\lambda_j\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

In diesem Fall ist

$$Var(\Delta_n) = 2 \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - 2\lambda_n} - \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_n} - \prod_{j=1}^{n-1} \Big(\frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_n}\Big)^2 .$$

<u>Beweis:</u>

a) Es bezeichne $c_j := \dfrac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_j)}$ $\qquad (0 \leq j \leq n-1)$.

Mit der Beziehung (1.12) aus Folgerung 1.12 b) erhält man dann

$$P(\Delta_n > k) = \int_\Omega P(\Delta_n > k \,|\, X_{n-1,\Delta_{n-1}})\,dP = \int_{\mathbb{R}} F_n^k(t)\,dP(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) =$$

$$\int_0^\infty (1-e^{-\lambda_n t})^k \sum_{j=0}^{n-1} c_j\, e^{-\lambda_j t}\, dt =$$

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{j=0}^{n-1} c_j \int_0^1 s^k (1-s)^{\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}-1\right)} ds =$$

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{j=0}^{n-1} c_j\, B\left(k+1, \frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right).$$

Mit den bekannten Beziehungen zwischen Gamma- und Beta-Funktion ergeben sich dann die angegebenen Ausdrücke.

b) Sei zunächst $|\{\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}\}| = n$ und $\lambda_n < \min\limits_{0 \leq j \leq n-1} \{\lambda_j\}$.

Mit der Beziehung (1.13) aus Folgerung 1.12 b), den Bezeichnungen des Beweises zu Teil a) des Satzes und der Beziehung (3.5) folgt dann

$$E(\Delta_n) = \int_\Omega E(\Delta_n \,|\, X_{n-1,\Delta_{n-1}})\,dP = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_n(t)}\,dP(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j \int_0^\infty e^{-(\lambda_j - \lambda_n)t}\, dt = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j}{\lambda_j - \lambda_n} =$$

$$-\frac{1}{\lambda_n}\left(f_n(\zeta_0) - \frac{\prod_{j=0}^{n} \lambda_j}{\prod_{j=0}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_n)}\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_n}$$

wegen $f_k(\zeta_0) = 0 \quad (k \in \mathbb{N})$, wie man etwa dem Beweis des Lemmas 4.4 (Anhang) entnehmen kann.

Sei nun $|\{\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}\}| \leq n$ und $\lambda_n < \min\limits_{0 \leq j \leq n-1} \{\lambda_j\}$. Die unter den obigen stärkeren Voraussetzungen bereits bewiesene Aussage läßt sich dann wie folgt heranziehen:

Für unabhängige Zufallsvariablen $Y_0, \ldots, Y_m \quad (m \in \mathbb{Z}_0)$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$P_{Y_k} = \mathrm{Exp}(1,0) \qquad (0 \leq k \leq m)$ bezeichne

$$S_m(\eta_0, \ldots, \eta_m) := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\eta_k} Y_k \qquad (\eta_0, \ldots, \eta_m > 0).$$

Für jede Wahl von $\lambda_0^*, \ldots, \lambda_{n-1}^*$ mit $|\{\lambda_0^*, \ldots, \lambda_{n-1}^*\}| = n$, $\lambda_j^* \leq \lambda_j \; (0 \leq j \leq n-1)$ und $\lambda_n < \min\limits_{0 \leq j \leq n-1} \{\lambda_j^*\}$ gilt nun

$$(3.11) \qquad S_{n-1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \leq S_{n-1}(\lambda_0^*, \ldots, \lambda_{n-1}^*).$$

Kennzeichnet man die aus dem Modell mit den Parametern $\lambda_0^*, \ldots, \lambda_{n-1}^*, \lambda_n$ abgeleiteten Größen mit dem Symbol $*$, so existiert nach obigem

$$(3.12) \qquad E(\Delta_n^*) = E\left(\frac{1}{1-F_n(X_{n-1}^*, \Delta_{n-1}^*)}\right) = E\left(e^{\lambda_n (X_{n-1}^*, \Delta_{n-1}^* - \zeta_0)}\right) =$$

$$E\left(e^{\lambda_n S_{n-1}(\lambda_0^*, \ldots, \lambda_{n-1}^*)}\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j^*}{\lambda_j^* - \lambda_n},$$

wobei sich die vorletzte Gleichung beispielsweise aus Beziehung (3.9) ergibt.

Wegen (3.11), (3.12) und der Stetigkeit von S_{n-1} in den Parametern $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ liefert nun der Lebesgue'sche Satz von der majorisierten Konvergenz die gewünschte Aussage.

Existiert umgekehrt $E(\Delta_n)$, so folgt nach obigem

$$E(\Delta_n) = E(e^{\lambda_n S_{n-1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})}) \geq$$

$$E(e^{\lambda_n^* S_{n-1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})}) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_n^*}$$

$$(\lambda_n^* \leq \lambda_n, \ \lambda_n^* < \min_{0 \leq j \leq n-1} \{\lambda_j\}).$$

Wegen $\sup\limits_{\lambda_n^* < \min\limits_{0 \leq j \leq n-1} \{\lambda_j\}} \prod\limits_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_n^*} = \infty$ ist also

notwendigerweise $\lambda_n < \min\limits_{0 \leq j \leq n-1} \{\lambda_j\}$.

Damit ist der Teil b) des Satzes bewiesen.

c) Es sei $\lambda_n < \frac{1}{2} \min\limits_{0 \leq j \leq n-1} \{\lambda_j\}$.

Werden die aus dem Modell mit den Parametern $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}, 2\lambda_n$ abgeleiteten Größen mit dem Symbol * gekennzeichnet, so ergibt sich mit den Beziehungen (1.13) und (1.14) aus Folgerung 1.12 b) (Hinderer [25], Aufgabe 26.1)

$$\text{(3.13)} \quad Var(\Delta_n) = E(Var(\Delta_n | X_{n-1,\Delta_{n-1}})) + Var(E(\Delta_n | X_{n-1,\Delta_{n-1}})) =$$

$$E\left(\frac{1 + F_n(X_{n-1,\Delta_{n-1}})}{(1 - F_n(X_{n-1,\Delta_{n-1}}))^2}\right) - E^2(\Delta_n) =$$

$$E(2\, e^{2\lambda_n(X_{n-1,\Delta_{n-1}} - \zeta_0)} - e^{\lambda_n(X_{n-1,\Delta_{n-1}} - \zeta_0)}) - E^2(\Delta_n) =$$

$$2\, E(\Delta_n^*) - E(\Delta_n) - E^2(\Delta_n).$$

Der angegebene Ausdruck folgt nun aus dem Teil b) des Satzes. Existiert umgekehrt $Var(\Delta_n)$, so auch $E(\Delta_n)$ und damit auch $E(\Delta_n^*)$ nach (3.13). Wiederum nach Teil b) des Satzes ergibt sich dann notwendigerweise $2\lambda_n < \min_{0\leq j\leq n-1} \{\lambda_j\}$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

3.3 Bemerkung:

a) Satz 3.2 bleibt auch dann gültig, wenn die Voraussetzungen (3.1) durch die Bedingung

$$F_n = 1 - (1-F)^{\lambda_n} \qquad (\lambda_n > 0,\ n \in \mathbb{Z}_0)$$

ersetzt werden, wobei F eine stetige Verteilungsfunktion bezeichne. Setzt man nämlich $R := -\ell n(1-F)$, so stimmen wegen der Isotonie und Stetigkeit von R die "Record Values" bzw. die "Inter-record Times" der Familie $R(X) := \{R(X_0), \{R(X_{nk})\}_{n,k\in\mathbb{N}}\}$ P - fast sicher mit der Familie $\{R(X_{n,\Delta_n})\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ bzw. der Familie $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ überein. Wegen

$$P_{R(X_0)} = \operatorname{Exp}(\lambda_0, 0)$$

$$P_{R(X_{n1})} = \operatorname{Exp}(\lambda_n, 0) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

liefert Satz 3.2, angewandt auf die Familie R(X), dann die Behauptung.

b) Für n = 1 ergibt Satz 3.2 a)

$$P(\Delta_1 > k) = \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}+1)}{\Gamma(k+1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1})} \qquad (k \in \mathbb{Z}_0),$$

was aus Stetigkeitsgründen auch für $\lambda_0 = \lambda_1$ gültig bleibt. In diesem Fall ist

$$P(\Delta_1 > k) = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}$$

(Chandler [5], Foster und Stuart [13], Rényi [32]).

Ist allgemeiner $\lambda_0 = m\,\lambda_1$ $(m \in \mathbb{N})$, so gilt

$$(3.14)\quad P(\Delta_1 > k) = \frac{k!\ m!}{(k+m)!} = \frac{1}{\binom{k+m}{k}} \qquad (k \in \mathbb{Z}_0).$$

Gemäß Teil a) dieser Bemerkung läßt sich dies auch als die Wahrscheinlichkeit dafür interpretieren, daß in einer Familie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger, identisch stetig verteilter Zufallsvariablen frühestens X_{m+k+1} erstmalig irgendeinen der Werte $X_1, \ldots, X_m$ überschreitet.

Für den Fall geometrischer Verteilungen läßt sich entsprechend zeigen:

3.4 Satz:

Unter den Voraussetzungen (3.2) gilt:

a) $E(\Delta_n)$ existiert genau dann, wenn

$$p_n < \min_{0\leq j\leq n-1} \{p_j\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

In diesem Fall ist

$$E(\Delta_n) = (1-p_n)^n \prod_{j=0}^{n-1} \frac{p_j}{p_j - p_n}.$$

b) $Var(\Delta_n)$ existiert genau dann, wenn

$$p_n < 1 - \sqrt{1 - \min_{0\leq j\leq n-1} \{p_j\}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

In diesem Fall ist

$$Var(\Delta_n) = 2(1-p_n)^{2n} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{p_j}{p_j - (2-p_n)p_n} - (1-p_n)^n \prod_{j=0}^{n-1} \frac{p_j}{p_j - p_n} - \ldots$$

$$(1-p_n)^{2n} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{p_j}{p_j - p_n}\right)^2.$$

Beweis:

a) Sei $p_n < \min_{0\leq j\leq n-1} \{p_j\}$. Mit der Beziehung (1.12) aus Folgerung 1.12 b) und (3.7) aus Lemma 3.1 b) ergibt sich dann

$$E(\Delta_n) = \int_\Omega E(\Delta_n | X_{n-1,\Delta_{n-1}})\, dP = \sum_{k=\zeta_0+n-1}^{\infty} \frac{1}{1-F_n(k)}\, g_{n-1}(k) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-p_n)^{-k} \sum_{\substack{k_0,\dots,k_{n-1} \in \mathbb{Z}_0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} k_i = k}} \prod_{j=0}^{n-1} p_j (1-p_j)^{k_j} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_0,\dots,k_{n-1} \in \mathbb{Z}_0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} k_i = k}} \prod_{j=0}^{n-1} p_j \left(\frac{1-p_j}{1-p_n}\right)^{k_j} =$$

$$\prod_{j=0}^{n-1} p_j \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-p_j}{1-p_n}\right)^{k} = (1-p_n)^n \prod_{j=0}^{n-1} \frac{p_j}{p_j - p_n} .$$

Existiert umgekehrt $E(\Delta_n)$, so folgt wieder mit Folgerung 1.12 b)

$$E(\Delta_n) = E\left(\frac{1}{1-F_n(X_{n-1,\Delta_{n-1}})}\right) = E\left((1-p_n)^{\zeta_0+n-1-X_{n-1,\Delta_{n-1}}}\right) \geq$$

$$E\left((1-p_n^*)^{\zeta_0+n-1-X_{n-1,\Delta_{n-1}}}\right) = (1-p_n^*)^n \prod_{j=0}^{n-1} \frac{p_j}{p_j - p_n^*}$$

$$(p_n^* \leq p_n,\ p_n^* < \min_{0\leq j\leq n-1} \{p_j\}).$$

Wegen $\sup\limits_{p_n^* < \min\limits_{0\leq j\leq n-1}\{p_j\}} \prod\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{p_j}{p_j - p_n^*} = \infty$ ist dann

notwendigerweise $p_n < \min\limits_{0\leq j\leq n-1} \{p_j\}$.

b) Der Beweis läßt sich analog zum Beweis des Teils c) des Satzes 3.2 führen. Man braucht dazu nur die Parameter $\lambda_0, \dots ,\lambda_{n-1},\lambda_n$

bzw. $2\lambda_n$ durch die Parameter $p_0, \ldots, p_{n-1}, p_n$ bzw. $1-(1-p_n)^2$ zu ersetzen und zu beachten, daß dann

$$E\left(\frac{1+F_n(X_{n-1,\Delta_{n-1}})}{1-F_n(X_{n-1,\Delta_{n-1}})^2}\right) = E\left(2(1-p_n)^{2(\zeta_0+n-1-X_{n-1,\Delta_{n-1}})}\right) - \ldots$$

$$E\left((1-p_n)^{(\zeta_0+n-1-X_{n-1,\Delta_{n-1}})}\right)$$

gilt.

Der Bedingung

$\lambda_n < \frac{1}{2} \min\limits_{0 \leq j \leq n-1} \{\lambda_j\}$ entspricht dabei die Bedingung

$1-(1-p_n)^2 < \min\limits_{0 \leq j \leq n-1} \{p_j\}$ bzw. äquivalent dazu

$$p_n < 1 - \sqrt{1 - \min_{0 \leq j \leq n-1} \{p_j\}}.$$

Der Satz ist damit bewiesen. □

Mit Hilfe der Sätze 3.2 und 3.4 lassen sich entsprechende Aussagen für die "Record Times" formulieren:

3.5 <u>Satz:</u>

a) Unter den Voraussetzungen (3.1) bzw. der Bedingung in Bemerkung 3.3 a) gilt:

$E(U_n)$ existiert genau dann, wenn

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

In diesem Fall ist

$$E(U_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_k} .$$

$Var(U_n)$ existiert genau dann, wenn

$$\lambda_0 > 2\lambda_1 > \ldots > 2^n \lambda_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

In diesem Fall ist

$$\mathrm{Var}(U_n) = \sum_{k=1}^{n} \Big(2 \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - 2\lambda_k} - \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_k} - \prod_{j=0}^{k-1} \Big(\frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_k}\Big)^2\Big) + \ldots$$

$$2 \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} \Big(\prod_{i=0}^{j-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - (\lambda_j + \lambda_k)} \prod_{i=j}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_k} - \ldots$$

$$\prod_{i=0}^{j-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_j} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_k} \Big) .$$

b) Unter den Voraussetzungen (3.2) gilt:

$E(U_n)$ existiert genau dann, wenn

$$p_0 > p_1 > \ldots > p_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

In diesem Fall ist

$$E(U_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (1 - p_k)^k \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p_j}{p_j - p_k} .$$

$\mathrm{Var}(U_n)$ existiert genau dann, wenn

$$1 - p_0 < (1 - p_1)^2 < \ldots < (1 - p_n)^{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

In diesem Fall ist

$$\mathrm{Var}(U_n) = \sum_{k=1}^{n} \Big\{ 2(1-p_k)^{2k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p_j}{p_j - (2-p_k)p_k} - (1-p_k)^k \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p_j}{p_j - p_k} - \ldots$$

$$(1-p_k)^{2k} \prod_{j=0}^{k-1} \Big(\frac{p_j}{p_j - p_k}\Big)^2 \Big\} + 2 \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} (1-p_j)^j (1-p_k)^k \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \Big(\prod_{i=0}^{j-1} \frac{p_i}{p_i - (p_j + p_k - p_j p_k)} \prod_{i=j}^{k-1} \frac{p_i}{p_i - p_k} - \ldots$$

$$\prod_{i=0}^{j-1} \frac{p_i}{p_i - p_j} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{p_i}{p_i - p_k} \Big) .$$

Beweis:

Die Aussagen bezüglich $E(U_n)$ in Teil a) und b) des Satzes ergeben sich unmittelbar aus Satz 3.2 bzw. Satz 3.4.

Unter den angegebenen Bedingungen existiert nach denselben Sätzen ferner jeweils $Var(U_n)$, wobei

$$Var(U_n) = Var(\sum_{k=1}^{n} \Delta_k) = \sum_{k=1}^{n} Var(\Delta_k) + 2 \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} Kov(\Delta_j,\Delta_k).$$

Es ist nur noch

$$(3.15) \quad E(\Delta_j \Delta_k) = \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - (\lambda_j+\lambda_k)} \prod_{i=j}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_k}$$

für Teil a) des Satzes und

$$(3.16) \quad E(\Delta_j \Delta_k) = (1-p_j)^j (1-p_k)^k \prod_{i=0}^{j-1} \frac{p_i}{p_i-(p_j+p_k-p_j p_k)} \prod_{i=j}^{k-1} \frac{p_i}{p_i - p_k}$$

für Teil b) des Satzes nachzuweisen $(1 \leqq j < k \leqq n)$.

Hieraus ergeben sich dann - in Verbindung mit den Sätzen 3.2 und 3.4 - die angegebenen Ausdrücke für die Varianzen der "Record Times".

Nach Satz 2.1 bzw. Satz 2.2 ist

$$P_{X_{k,\Delta_k}} = P_{\sum_{i=0}^{k} Y_i} \qquad (0 \leqq k \leqq n-1),$$

wobei $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$ unabhängige Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ sind mit

$P_{Y_0} = Exp(\lambda_0,\zeta_0)$ und

$P_{Y_i} = Exp(\lambda_i,0)$ bzw.

$P_{Y_0} = Geo(p_0,\zeta_0)$ und

$P_{Y_i} = Geo(p_i,1) \qquad (1 \leqq i \leqq n-1).$

Sei nun $1 \leqq j < k \leqq n$. Ersetzt man die Parameter λ_j durch $\lambda_j + \lambda_k$

bzw. p_j durch $p_j+p_k-p_jp_k$, seien die sich auf das so modifizierte Modell beziehenden Größen mit dem Symbol * gekennzeichnet. Für $\zeta_0 = 0$ bzw. $\zeta_0 = 1$ und bei gleichzeitiger Ersetzung von λ_i durch λ_{i+j} bzw. p_i durch p_{i+j} $(0 \leq i \leq k-j-1)$ sei entsprechend des Symbol ** verwendet.

Die bedingte Unabhängigkeit der "Inter-record Times" bei gegebenen "Record Values" nach Folgerung 1.12 b) führt nun mit Breiman [4], Corollary 4.38 zu

$$E(\Delta_j\Delta_k) = \int_\Omega E(\Delta_j\Delta_k \,|X_0,X_{1,\Delta_1}, \ldots ,X_{k-1,\Delta_{k-1}})\,dP =$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1-F_j(s)} \frac{1}{1-F_k(t)}\, dP(X_{j-1,\Delta_{j-1}} \leq s,\ X_{k-1,\Delta_{k-1}} \leq t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1-F_j(s)} \frac{1}{1-F_k(t)}\, dP\Big(\sum_{i=0}^{j-1} Y_i \leq s,\ \sum_{i=0}^{k-1} Y_i \leq t\Big) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1-F_j(s)} \frac{1}{1-F_k(t)}\, dP\Big(\sum_{i=0}^{k-1} Y_i \leq t \,\Big|\, \sum_{i=0}^{j-1} Y_i = s\Big)\, dP\Big(\sum_{i=0}^{j-1} Y_i \leq s\Big) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_j(s)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_k(t)}\, dP\Big(\sum_{i=j}^{k-1} Y_i \leq t - \sum_{i=0}^{j-1} Y_i \,\Big|\, \sum_{i=0}^{j-1} Y_i = s\Big) \ldots$$

$$dP\Big(\sum_{i=0}^{j-1} Y_i \leq s\Big) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_j(s)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_k(t)}\, dP\Big(\sum_{i=j}^{k-1} Y_i \leq t-s\Big)\, dP\Big(\sum_{i=0}^{j-1} Y_i \leq s\Big) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_j(s)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_k(s+t)}\, dP\Big(\sum_{i=j}^{k-1} Y_i \leq t\Big)\, dP\Big(\sum_{i=0}^{j-1} Y_i \leq s\Big) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_j^*(s)}\, dP\Big(\sum_{i=0}^{j-1} Y_i \leq s\Big) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-F_k^{**}(t)}\, dP\Big(\sum_{i=j}^{k-1} Y_i \leq t\Big) =$$

$$\int_\Omega E(\Delta_j^* \mid X_{j-1,\Delta_{j-1}^*}^*)\,dP \int_\Omega E(\Delta_{k-j}^{**} \mid X_{k-j-1,\Delta_{k-j-1}^{**}}^{**})\,dP = E(\Delta_j^*)E(\Delta_{k-j}^{**}),$$

woraus sich mit Satz 3.2 bzw. Satz 3.4 die Beziehungen (3.15) und (3.16) ergeben.

Existiert umgekehrt $\mathrm{Var}(U_n) = \mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{n} \Delta_k)$, so auch $\mathrm{Var}(\Delta_k)$ wegen $\Delta_k > 0 \quad (1 \leq k \leq n)$. Hieraus folgt mit denselben Sätzen die Äquivalenz der angegebenen Bedingungen zur Existenz von $\mathrm{Var}(U_n)$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Wie man den Sätzen 3.2, 3.4 und 3.5 entnehmen kann, existieren $E(\Delta_n)$, $\mathrm{Var}(\Delta_n)$, $E(U_n)$ und $\mathrm{Var}(U_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ nicht für jede Wahl der möglichen Parameter. Der nachfolgende Satz 3.7 und Folgerung 3.8 zeigen jedoch, daß dies für $\ln \Delta_n$ und $\ln U_n$ $(n \in \mathbb{N})$ stets zutrifft. Die entsprechenden Erwartungswerte und Varianzen lassen sich dabei aber nicht mehr explizit angeben, sondern nur abschätzen. Exakte Beziehungen ergeben sich jedoch, wenn man statt des natürlichen Logarithmus die damit in engem Zusammenhang stehenden Partialsummen der harmonischen Reihe verwendet:

3.6 <u>Satz:</u>

Es sei $S_1(k) := \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}$, $S_2(k) := \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j^2}$ $\qquad (k \in \mathbb{N})$.

Dann gilt unter den Voraussetzungen (3.1) bzw. (3.2): $E(S_1(\Delta_n))$ und $\mathrm{Var}(S_1(\Delta_n))$ existieren für alle $n \in \mathbb{N}$, und es ist

a) $E(S_1(\Delta_n)) = \lambda_n\, E(X_{n-1,\Delta_{n-1}} - \zeta_0) = \lambda_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k}$ und

$$\mathrm{Var}(S_1(\Delta_n)) = \lambda_n^2\, \mathrm{Var}(X_{n-1,\Delta_{n-1}} - \zeta_0) + E(S_2(\Delta_n)) =$$

$$\lambda_n^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^2} + E(S_2(\Delta_n))$$

unter den Voraussetzungen (3.1),

b) $E(S_1(\Delta_n)) = -\ln(1-p_n)\; E(X_{n-1,\Delta_{n-1}} - (\zeta_0 + n-1)) =$

$$-\ln(1-p_n) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1-p_j}{p_j} \quad \text{und}$$

$\mathrm{Var}(S_1(\Delta_n)) = \ln^2(1-p_n)\; \mathrm{Var}(X_{n-1,\Delta_{n-1}} - (\zeta_0 + n-1)) + E(S_2(\Delta_n)) =$

$$\ln^2(1-p_n) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1-p_j}{p_j^2} + E(S_2(\Delta_n))$$

unter den Voraussetzungen (3.2).

In beiden Fällen gilt

$$\frac{\pi^2}{6} - 2\, E\left(\frac{1}{\Delta_n}\right) \leq E(S_2(\Delta_n)) \leq \frac{\pi^2}{6} .$$

<u>Beweis:</u>

Wegen Beziehung (1.12) aus Folgerung 1.12 b) ist in beiden Fällen

$$E(S_1(\Delta_n)) = \sum_{k=1}^{\infty} S_1(k)\; P(\Delta_n = k) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} S_1(k)\,(F_n^{k-1}(t) - F_n^k(t))\; d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} (S_1(k+1) - S_1(k))\; F_n^k(t)\, d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, F_n^k(t)\, d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) = \int_{\mathbb{R}} -\ln(1-F_n(t))\; d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) .$$

Unter den Voraussetzungen (3.1) ist dann

$$(3.17) \quad E(S_1(\Delta_n)) = \lambda_n \int_{\mathbb{R}} (t-\zeta_0)\, d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) = \lambda_n\, E(X_{n-1,\Delta_{n-1}} - \zeta_0) ,$$

unter den Voraussetzungen (3.2) dagegen

(3.18) $E(S_1(\Delta_n)) = -\ln(1-p_n) \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} = k + \zeta_0 + n-1) =$

$$-\ln(1-p_n)\, E(X_{n-1,\Delta_{n-1}} - (\zeta_0 + n-1)).$$

Mit Lemma 3.1 ergeben sich dann die angegebenen Ausdrücke für $E(S_1(\Delta_n))$ unter a) und b).

Folgerung 1.12 b) impliziert auch

$$E(S_1^2(\Delta_n)) = \sum_{k=1}^{\infty} S_1^2(k)\; P(\Delta_n = k) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} S_1^2(k)\,(F_n^{k-1}(t) - F_n^k(t)) \ldots$$

$$d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} (S_1^2(k+1) - S_1^2(k))\; F_n^k(t)\,d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(S_1(k+1) + S_1(k))\; F_n^k(t)\,d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) =$$

$$2\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, S_1(k)\; F_n^k(t)\,d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) + \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\, F_n^k(t) \ldots$$

$$d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\Big(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} + \frac{1}{k-j}\Big)\; F_n^k(t)\,d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) + \ldots$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} (S_2(k+1) - S_2(k))\,F_n^k(t)\,d\,P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j(k-j)} F_n^k(t)\, d\, P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq t) + \ldots$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} S_2(k)\,(F_n^{k-1}(t) - F_n^k(t))\, d\, P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} F_n^k(t)\Big)^2 d\, P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq t) + \sum_{k=1}^{\infty} S_2(k) P(\Delta_n = k) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \ell n^2(1-F_n(t))\, d\, P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq t) + E(S_2(\Delta_n)).$$

Unter den Voraussetzungen (3.1) ist dann

$$\int_{\mathbb{R}} \ell n^2(1-F_n(t))\, dP(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq t) = \lambda_n^2 \int_{\mathbb{R}} (t-\zeta_0)^2 d\, P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq t) =$$

$$\lambda_n^2\, E(X_{n-1,\Delta_{n-1}} - \zeta_0)^2,$$

unter den Voraussetzungen (3.2) dagegen

$$\int_{\mathbb{R}} \ell n^2(1-F_n(t))\, d\, P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq t) = \ell n^2(1-p_n) \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} = k + \zeta_0 + n - 1) =$$

$$\ell n^2(1-p\ )\, E(X_{n-1,\Delta_{n-1}} - (\zeta_0 + n-1))^2 .$$

Mit den Beziehungen (3.17), (3.18) und Lemma 3.1 ergeben sich dann die übrigen Aussagen unter a) und b).

Wegen

$$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leqq \int_{k-1}^{\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{k-1} \leqq \frac{2}{k} \qquad (k \in \mathbb{Z}_2) \quad \text{und}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6} < 2 \quad \text{ist in beiden Fällen}$$

$$\frac{\pi^2}{6} - 2\,E(\frac{1}{\Delta_n}) \leq \frac{\pi^2}{6} - E(\sum_{j=\Delta_n}^{\infty} \frac{1}{j^2}) = E(S_2(\Delta_n)) \leq \frac{\pi^2}{6} .$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Mit Hilfe von Satz 3.6 lassen sich nun die angekündigten Abschätzungen für die Erwartungswerte und Varianzen der logarithmierten "Inter-record Times" angeben:

3.7 <u>Satz:</u>

Unter den Voraussetzungen (3.1) bzw. (3.2) gilt:

$E(\ln\Delta_n)$ und $\mathrm{Var}(\ln\Delta_n)$ existieren für alle $n \in \mathbb{N}$,

und es ist

a) $E(S_1(\Delta_n)) - C \leq E(\ln\Delta_n) \leq E(S_1(\Delta_n)) - C + E(\frac{1}{\Delta_n})$

b) $\mathrm{Var}(S_1(\Delta_n)) - 2\,E(S_1(\Delta_n))\,E(\frac{1}{\Delta_n}) - E^2(\frac{1}{\Delta_n}) \leq \mathrm{Var}(\ln\Delta_n) \leq$

$$\mathrm{Var}(S_1(\Delta_n)) + 4\,E(\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}) ,$$

wobei C die Euler'sche Konstante bezeichne und $E(S_1(\Delta_n))$ sowie $\mathrm{Var}(S_1(\Delta_n))$ Satz 3.6 zu entnehmen sind.

<u>Beweis:</u>

Gemäß Lemma 4.8 (Anhang) ist

$$S_1(\Delta_n) \leq \ln\Delta_n + C \leq S_1(\Delta_n) + \frac{1}{\Delta_n} ,$$

woraus a) unmittelbar folgt.
Nach demselben Lemma ist ferner

$$S_1^2(\Delta_n) \leq (\ln\Delta_n + C)^2 \leq S_1^2(\Delta_n) + \frac{4}{\sqrt{\Delta_n}} .$$

Mit der Abschätzung unter a) ergibt sich dann

$$\mathrm{Var}(S_1(\Delta_n)) - 2\,E(S_1(\Delta_n))\,E(\tfrac{1}{\Delta_n}) - E^2(\tfrac{1}{\Delta_n}) =$$

$$E(S_1^2(\Delta_n)) - (E(S_1(\Delta_n) + E(\tfrac{1}{\Delta_n}))^2 \leqq E(\ell n\Delta_n + C)^2 - E^2(\ell n\Delta_n + C) =$$

$$\mathrm{Var}(\ell n\Delta_n) \leqq E(S_1^2(\Delta_n)) - E^2(S_1(\Delta_n)) + E(\tfrac{4}{\sqrt{\Delta_n}}) =$$

$$\mathrm{Var}(S_1(\Delta_n)) + E(\tfrac{4}{\sqrt{\Delta_n}}) .$$

Dies ist die Abschätzung unter b). □

3.8 <u>Folgerung:</u>

Unter den Voraussetzungen (3.1) bzw. (3.2) existieren $E(\ell n\ U_n)$ und $\mathrm{Var}(\ell n\ U_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis:</u>

Wegen der für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_0$ gültigen Beziehung

$$1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \leqq \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \quad \text{ist}$$

$$\ell n\ U_n = \ell n(1 + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i) \leqq \ell n \prod_{i=1}^{n} (1 + \Delta_i) = \sum_{i=1}^{n} \ell n(1 + \Delta_i) \leqq$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ell n(2\Delta_i) = n\ \ell n\ 2 + \sum_{i=1}^{n} \ell n\ \Delta_i ,$$

woraus mit Satz 3.7 die Existenz von $E(\ell n\ U_n)$ und $\mathrm{Var}(\ell n\ U_n)$ folgt. □

Die Bedeutung des Satzes 3.7 ist insbesondere im Zusammenhang mit den Beziehungen (0.1) bis (0.3) zu sehen. Während diese Beziehungen im Fall identischer stetiger Verteilung nur grobe asymptotische Aussagen der Art

$$E(\ell n\Delta_n) \sim E(\ell n\ U_n) \sim n$$

$$\mathrm{Var}(\ell n\Delta_n) \sim \mathrm{Var}(\ell n\ U_n) \sim n \qquad (n \to \infty)$$

zulassen, ermöglicht Satz 3.7 wesentlich genauere Abschätzungen:

3.9 <u>Satz:</u>

Im Fall identischer stetiger Verteilung gilt:

$$E(\ln \Delta_n) = n - C + O(\tfrac{n}{2^n}) \quad \text{und}$$

$$\mathrm{Var}(\ln \Delta_n) = n + \frac{\pi^2}{6} + O((\tfrac{2}{3})^n) \qquad (n \to \infty),$$

wobei C wieder die Euler'sche Konstante bezeichne.

<u>Beweis:</u>

Wegen der Unabhängigkeit von der zugrundeliegenden Verteilung kann o.B.d.A. $P_{X_0} = P_{X_{n1}} = \mathrm{Exp}(1,0)$ $(n \in \mathbb{N})$ gewählt werden. Um nun Satz 3.7 zum Beweis heranziehen zu können, werden die folgenden Ungleichungen benötigt:

$$(3.19) \qquad \frac{n}{2^{n+1}} \leq E(\frac{1}{\Delta_n}) \leq \frac{n+2}{2^{n+1}}$$

$$(3.20) \qquad E(\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}) \leq 3(\tfrac{2}{3})^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Wegen Beziehung (1.12) aus Folgerung 1.12 b) folgt mit Beziehung (3.4) aus Lemma 3.1 a)

$$E(\frac{1}{\Delta_n}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} P(\Delta_n = k) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(1-F_n(t))F_n^{k-1}(t)\, d\, P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leq t) =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-2t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(1-e^{-t})^{k-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-2t} \frac{t}{1-e^{-t}} dt.$$

Die für $t > 0$ gültige Beziehung

$t \leq \dfrac{t}{1-e^{-t}} \leq t+1$ liefert dann

$$\frac{n}{2^{n+1}} \leq \int_0^\infty \frac{t^n}{(n-1)!} e^{-2t}\, dt \leq E(\frac{1}{\Delta_n}) \leq \int_0^\infty \frac{t^n + t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-2t}\, dt = \frac{n+2}{2^{n+1}} .$$

Dies ist die Beziehung (3.19).

Der Beweis der Beziehung (3.20) stützt sich auf die folgende Ungleichung:

$$(3.21) \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{k}} q^{k-1} \leq 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-q}} \qquad (0 < q < 1).$$

Dies sieht man so:

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{\sqrt{k}} q^{k-1} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{k+1}} q^k \leq \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t+1}} e^{-t\,\ln\frac{1}{q}}\, dt \leq$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t\,\ln\frac{1}{q}}\, dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{-\ln q}} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-q}} .$$

Damit ist aber analog zu obigem

$$E(\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}) = \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-2t} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{k}}(1-e^{-t})^{k-1}\, dt \leq$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-2t} (1 + \sqrt{\pi}\, e^{\frac{t}{2}})\, dt = \frac{1}{2^n} + \sqrt{\pi}\, (\frac{2}{3})^n < 3(\frac{2}{3})^n .$$

Dies ist die Beziehung (3.20).

Gemäß Satz 3.6 ist nun

$$E(S_1(\Delta_n)) = n \quad \text{und}$$

$$Var(S_1(\Delta_n)) = n + \frac{\pi^2}{6} + O(\frac{n}{2^n}) \quad \text{wegen (3.19).}$$

Zusammen mit (3.19) und (3.20) liefert Satz 3.7 die Aussage des Satzes. ▭

Für $\ln U_n$ $(n \in \mathbb{N})$ lassen sich mittels Satz 3.7 keine entsprechenden Abschätzungen herleiten. Unter Verwendung einer auf Williams [54] zurückgehenden Darstellung für die Familie $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ läßt sich jedoch zeigen:

3.10 Satz:

Im Fall identischer stetiger Verteilung gilt:

$$n \leq E(\ln U_n) \leq n + \ln 2 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Beweis:

Nach Williams [54] (siehe auch Westcott [50]) ist folgende Darstellung für die Familie $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ möglich:

Ist $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie unabhängiger Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ mit

$P_{Y_n} = \operatorname{Exp}(1,0)$ $(n \in \mathbb{N})$ und ist die Familie $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ definiert durch

$$V_0 := 1$$

$$V_{n+1} := 1 + \operatorname{Int}(V_n\, e^{Y_{n+1}}) \qquad (n \in \mathbb{Z}_0),$$

so ist die Familie $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ verteilungsgleich mit der Familie $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$.

Es gilt daher

$$\prod_{k=1}^{n} e^{Y_k} \leq V_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{\sum_{i=1}^{k} Y_{n-i+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}), \quad \text{also}$$

$$(3.22) \quad \sum_{k=1}^{n} Y_k \leq \ln V_n \leq \sum_{k=1}^{n} Y_k + \ln\Big(1 + \sum_{k=1}^{n} e^{-\sum_{i=1}^{k} Y_i}\Big).$$

Wegen

$$E\left(e^{-\sum_{i=1}^{k} Y_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{k} e^{-Y_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} E\left(e^{-Y_i}\right) = \frac{1}{2^k} \qquad (1 \leq k \leq n)$$

und der Konkavität des Logarithmus folgt aus (3.22) mit der Jensen'schen Ungleichung dann

$$n = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k) \leq E(\ln V_n) = E(\ln U_n) \leq n + \ln\left(1 + \sum_{k=1}^{n} E\left(e^{-\sum_{i=1}^{k} Y_i}\right)\right) =$$

$$n + \ln\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right) \leq n + \ln 2 \,.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

3.11 Bemerkung:

a) Die Sätze 3.9 und 3.10 tragen insbesondere der Tatsache Rechnung, daß wegen

$$U_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k \quad \text{stets} \quad \ln U_n > \ln \Delta_n \quad \text{und}$$

damit auch $E(\ln U_n) > E(\ln \Delta_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ sein muß. Unter Beachtung der Beziehung (3.19) ist ja

$$E(\ln \Delta_n) \leq n - C + \frac{n+2}{2^{n+1}} < n \leq E(\ln U_n) \quad (n \geq 2) \quad \text{mit}$$

$$C \leq \lim_{n\to\infty} (E(\ln U_n) - E(\ln \Delta_n)) \leq C + \ln 2 \,.$$

b) Mit Hilfe des Satzes 3.9 erhält man gegenüber (0.2) weit bessere Approximationen der Verteilung von Δ_n insbesondere für "kleine" n. In der folgenden Tabelle sind vergleichsweise exakte Werte der Verteilungsfunktion von Δ_n für $2 \leq n \leq 5$ (nach Chandler [5]) sowie Approximationen nach (0.2) und Satz 3.9 aufgeführt:

n	k	$P(\Delta_n \leq k)$	$\Phi(\frac{\ln k - n}{\sqrt{n}})$	$\Phi(\frac{\ln k - (n-C)}{\sqrt{n + \frac{\pi^2}{6}}})$
2	1	0,2500	0,0786	0,2281
	2	0,3889	0,1777	0,3512
	3	0,4792	0,2619	0,4326
	4	0,5433	0,3322	0,4924
	5	0,5917	0,3912	0,5389
	10	0,7255	0,5847	0,6775
	20	0,8264	0,7593	0,7950
	50	0,9114	0,9118	0,9039
3	1	0,1250	0,0416	0,1305
	2	0,2126	0,0915	0,2111
	5	0,3755	0,2110	0,3529
	10	0,5147	0,3436	0,4778
	20	0,6455	0,4990	0,6048
	50	0,7839	0,7007	0,7552
	100	0,8582	0,8230	0,8444
4	1	0,0625	0,0228	0,0748
	5	0,2209	0,1160	0,2227
	10	0,3325	0,1980	0,3186
	20	0,4577	0,3078	0,4287
	50	0,6186	0,4825	0,5816
	100	0,7223	0,6189	0,6906
	500	0,8837	0,8659	0,8800
5	1	0,0313	0,0127	0,0431
	5	0,1234	0,0647	0,1376
	10	0,2002	0,1138	0,2054
	20	0,2992	0,1850	0,2899
	50	0,4494	0,3133	0,4215
	100	0,5631	0,4299	0,5282
	500	0,7782	0,7065	0,7565
	1000	0,8426	0,8032	0,8325

In dem parametrischen Modell besteht ein weiterer interessanter Zusammenhang zwischen der Verteilung des (verallgemeinerten) in

Bemerkung 1.13 b) definierten Zählprozesses und den Dichten der "Record Values":

3.12 <u>Satz:</u>

Für den zu der Familie X gehörigen "Record Value" - Zählprozeß $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, der durch

$$N_t := \#\{n \in \mathbb{Z}_0 \mid X_{n,\Delta_n} \leq t\} = \min\{n \in \mathbb{Z}_0 \mid X_{n,\Delta_n} > t\} \quad (t \in \mathbb{R})$$

definiert ist, wobei wieder $\min(\emptyset) = \infty$ zu setzen ist, gilt:

a) Unter den Voraussetzungen (3.1) ist

$$(3.23)\quad P(N_t=n) = \frac{1}{\lambda_n} f_n(\lambda_0, \ldots, \lambda_n, \zeta_0; t) \qquad (n\in\mathbb{Z}_0,\ t\in\mathbb{R}_{\zeta_0}).$$

Ist speziell $\lambda_n = \lambda_0$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist

$$(3.24)\quad P(N_t=n) = \frac{\lambda_0^n (t-\zeta_0)^n}{n!} e^{-\lambda_0(t-\zeta_0)} \qquad (n\in\mathbb{Z}_0,\ t\in\mathbb{R}_{\zeta_0})$$

(Shorrock [39]), also N_t Poisson-verteilt

mit $E(N_t) = \lambda_0(t-\zeta_0) \qquad (t \in \mathbb{R}_{\zeta_0})$.

Ist speziell $\lambda_n = (n+k)\lambda_0$ $(n \in \mathbb{Z}_0)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist

$$(3.25)\quad P(N_t=n) = \binom{k+n-1}{k-1} e^{-\lambda_0 k(t-\zeta_0)} \left(1-e^{-\lambda_0(t-\zeta_0)}\right)^n$$

$$(n \in \mathbb{Z}_0,\ t \in \mathbb{R}_{\zeta_0}),$$

also N_t negativ-binomialverteilt mit

$$E(N_t) = k\left(e^{\lambda_0(t-\zeta_0)} - 1\right) \qquad (t \in \mathbb{R}_{\zeta_0}).$$

b) Unter den Voraussetzungen (3.2) ist

$$(3.26)\quad P(N_k=n) = \frac{1}{p_n} g_n(p_0, \ldots, p_n, \zeta_0; k+1)$$

$$(0 \leq n \leq k+1-\zeta_0,\ k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0}).$$

Ist speziell $p_n = p_0 \quad (n \in \mathbb{N})$, so ist

$$(3.27)\quad P(N_k=n) = \binom{k+1-\zeta_0}{n} p_0^n (1-p_0)^{k+1-\zeta_0-n}$$

$$(0 \leqq n \leqq k+1-\zeta_0,\ k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0}),$$

also N_k binomialverteilt mit

$$E(N_k) = (k+1-\zeta_0)p_0 \qquad (k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0}).$$

Beweis:

a) Unter den Voraussetzungen (3.1) ist wegen der strengen Monotonie der "Record Values" und Lemma 4.4 (Anhang)

$$P(N_t=n) = P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} \leqq t < X_{n,\Delta_n}) = P(X_{n,\Delta_n} > t) - \dots$$

$$P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} > t) =$$

$$\frac{1}{\lambda_n}\int_t^\infty \lambda_n(f_n(s) - f_{n-1}(s))ds = -\frac{1}{\lambda_n}\int_t^\infty f_n'(s)ds = \frac{1}{\lambda_n} f_n(t)$$

$$(n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}_{\zeta_0});$$

entsprechend für $n = 0$.
Dies liefert die Beziehung (3.23).

Hieraus ergibt sich mit der Beziehung (3.4) aus Lemma 3.1 a) unmittelbar auch Beziehung (3.24).
Die Beziehung (3.25) ergibt sich mit (3.23) und (3.5) so:

$$P(N_t=n) = \frac{1}{\lambda_n} f_n(t) = \frac{1}{(n+k)\lambda_0} \sum_{j=0}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{n}(i+k)\lambda_0}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}(i-j)\lambda_0} e^{-(j+k)\lambda_0(t-\zeta_0)} =$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{k+n-1}{k-1}\binom{n}{j} e^{-k\lambda_0(t-\zeta_0)} e^{-j\lambda_0(t-\zeta_0)} =$$

$$\binom{k+n-1}{k-1} e^{-k\lambda_0(t-\zeta_0)} (1-e^{-\lambda_0(t-\zeta_0)})^n .$$

b) Unter den Voraussetzungen (3.2) ist wegen Lemma 4.6 (Anhang) analog zu a)

$$P(N_k = n) = P(X_{n,\Delta_n} > k) - P(X_{n-1,\Delta_{n-1}} > k) =$$

$$\frac{1}{p_n} \sum_{j=k+1}^{\infty} p_n(g_n(j) - g_{n-1}(j)) = - \frac{1}{p_n} \sum_{j=k+1}^{\infty} (g_n(j+1) - g_n(j)) =$$

$$\frac{1}{p_n} g_n(k+1) \qquad (k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0+n-1},\ n \in \mathbb{N}).$$

Dies liefert die Beziehung (3.26).

Hieraus ergibt sich mit der Beziehung (3.7) aus Lemma 3.1 b)

$$P(N_k = n) = \frac{1}{p_n} g_n(k+1) = \frac{1}{p_0} \sum_{\substack{k_0,\dots,k_n \in \mathbb{Z}_0 \\ \sum_{i=0}^{n} k_i = k+1-\zeta_0-n}} p_0^{n+1} (1-p_0)^{k+1-\zeta_0-n} =$$

$$\binom{k+1-\zeta_0}{n} p_0^n (1-p_0)^{k+1-\zeta_0-n} \qquad (0 \leq n \leq k+1-\zeta_0,\ k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0}).$$

Dies ist die Beziehung (3.27).

Damit ist der Satz bewiesen. □

3.13 <u>Bemerkung:</u>

Aus Satz 3.12 geht hervor, daß auch unter den Voraussetzungen in Bemerkung 1.13 b) $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_0}$ i.a. keinen Poisson-Prozeß bildet. Dies sieht man beispielsweise an der Beziehung (3.25), wenn $\zeta_0 = 0$ gesetzt wird. Die Funktion

$$a(t) := E(N_t) = k(e^{\lambda_0 t} - 1) \qquad (t \in \mathbb{R}_0)$$

ist nämlich stetig in t, und es ist

$$P(N_{\cdot} = n) = \binom{k+n-1}{k-1} e^{-\lambda_0 k \cdot} (1 - e^{-\lambda_0 \cdot})^n \neq \frac{e^{-a} a^n}{n!} .$$

Mit Çinlar [6], Proposition (7.9) ergibt sich daher wegen $N_0 = 0$ P - fast sicher die Behauptung.

Zum Abschluß dieses Teils des Kapitels III soll anhand eines Beispiels noch kurz auf einige statistische Fragestellungen eingegangen werden, die sich aus der parametrischen Betrachtungsweise des Modells ergeben können.

3.14 <u>Beispiel:</u>

Ein pharmazeutisches Präparat wird bezüglich seiner Wirkung auf eine spezielle Bakterienart untersucht. Es wird angenommen, daß die Überlebensdauer einer Testkolonie eine exponentialverteilte Zufallsgröße ist, deren Erwartungswert sich umgekehrt proportional zur applizierten Präparatmenge verhält. Pro Versuchsreihe werden solange Testkolonien mit dem Präparat behandelt, bis eine Kolonie eine größere als bis dahin erreichte Überlebensdauer aufweist, wobei in der ersten Versuchsserie von einer Testkolonie ausgegangen wird. In jeder folgenden Versuchsserie wird die verwendete Dosis um $c \cdot 100\%$ der Ausgangsdosis erhöht, wobei $c > 0$ eine vorher festgelegte Konstante ist. Beobachtet werden also die "Record Values" einer Familie X mit

$$P_{X_0} = \mathrm{Exp}(\lambda_0, 0) \quad \text{und}$$

$$P_{X_{n1}} = \mathrm{Exp}((1 + n\,c)\,\lambda_0, 0) \qquad (\lambda_0 > 0,\ n \in \mathbb{N})$$

wobei $\frac{1}{\lambda_0}$ die (unbekannte) erwartete Überlebensdauer der Ausgangskolonie ist.

Ist man nun an Aussagen über den (unbekannten) Parameter λ_0 interessiert, so kann man beispielsweise auf die von $X_0, X_{1,\Delta_1}, \ldots, X_{n,\Delta_n}$ $(n \in \mathbb{Z}_0)$ abhängige Maximum-Likelihoodschätzung $\hat{\lambda}_0$ für λ_0 zurückgreifen. Wegen Folgerung 1.9 d) besitzt $(X_0, \ldots, X_{n,\Delta_n})$ die stetige λ^{n+1}-Dichte

$$(3.28)\quad f_{\sigma_n}(\lambda_0, c; t_0, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} e^{(1+i\,c)\lambda_0 t_{i-1}} \cdot \ldots$$

$$\prod_{i=0}^{n} (1+i\,c)\,\lambda_0\, e^{-(1+i\,c)\lambda_0 t_i} =$$

$$\lambda_0^{n+1} \prod_{i=0}^{n} (1+i\,c)\, e^{-\lambda_0 t_0} \prod_{i=1}^{n} e^{-(1+i\,c)\lambda_0 (t_i - t_{i-1})}$$

$$(0 \leqq t_0 < t_1 < \ldots < t_n),$$

woraus sich

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{n+1}{(1+n\,c)X_{n,\Delta_n} - c \sum_{i=0}^{n-1} X_{i,\Delta_i}} \quad \text{ergibt.}$$

$\hat{\lambda}_0$ ist (etwa nach dem Neyman-Kriterium) suffizient für λ_0, und $\frac{1}{\hat{\lambda}_0}$ ist eine erwartungstreue und konsistente Schätzung für $\frac{1}{\lambda_0}$.

Ist λ_0 - z.B. aufgrund früherer Untersuchungen - bekannt, so läßt sich beispielsweise auch ein statistischer Test zur Entscheidung dafür angeben, ob die Erhöhung der Präparat-Dosis einen signifikanten Einfluß auf die Überlebensdauer der Testkolonien hat oder nicht. Legt man dementsprechend die Verteilungsklasse mit den Dichten

$\mathfrak{F}_n := \{f_{\sigma_n}(\lambda_0, \vartheta) \mid \vartheta > 0\}$ gemäß (3.28) für die "Record Values" $(X_0, \ldots, X_{n,\Delta_n})$ zugrunde, so lauten die Hypothesen

$H: \;\vartheta = 0 \qquad$ gegen $\qquad K: \;\vartheta = c$.

Mit Hilfe der Neyman-Pearson'schen Theorie läßt sich dann leicht ein auf den "Record Values" basierender bester Test zum Niveau $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ für H gegen K angeben.

B) Zusammenhänge zur "klassischen" Extremwertstatistik

Wie die Untersuchungen von Resnick ([33] und [34]) zeigen, besitzen die "Record Values" bei identischer stetiger Verteilung ein anderes Grenzverhalten als die Maxima (oder andere Ordnungsstatistiken) entsprechender unabhängiger Zufallsvariablen (vgl. dazu Seite 4 der Einleitung). Durch geeignete Wahl der Parameter kann in dem hier betrachteten Modell jedoch ein entsprechender Bezug hergestellt werden, wobei die in Kapitel II behandelten Charakterisierungen der Exponentialverteilungen eine wesentliche Rolle spielen:

3.15 <u>Satz:</u>

Sei F eine stetige Verteilungsfunktion,

$\lambda_n := n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und

$$F_n := 1 - (1-F)^{\lambda_n} \qquad (n \in \mathbb{Z}_0).$$

Dann ist

$$P(X_{n,\Delta_n} \leq t) = \sum_{j=n+1}^{n+k} \binom{n+k}{j} F^j(t)(1-F(t))^{n+k-j} \qquad (t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_0),$$

d.h. X_{n,Δ_n} ist verteilt wie die (n+1)-te Ordnungsstatistik $Y_{(n+1)}$ einer Familie $\{Y_1, \ldots, Y_{n+k}\}$ unabhängiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$$P_{Y_j} = \mu_F \qquad (1 \leq j \leq n+k).$$

<u>Beweis:</u>

Entsprechend der Bemerkung 3.3 a) genügt es, die Behauptung für

$$\mu_F = \mathrm{Exp}(1,0), \quad \text{also} \quad \mu_{F_n} = \mathrm{Exp}(\lambda_n, 0) \qquad (n \in \mathbb{Z}_0)$$

nachzuweisen.

Bekanntlich (siehe etwa Hinderer [25], Lemma 28.8) besitzt die Familie $\{Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n+k)}\}$ unabhängige Zuwächse mit

$$P_{Y_{(j)} - Y_{(j-1)}} = \mathrm{Exp}(n+k-j+1,\ 0) \qquad (1 \leq j \leq n+k) \quad \text{und}$$

$$P_{Y_{(1)}} = \mathrm{Exp}(n+k,\ 0).$$

Gemäß Satz 2.1 besitzt ebenfalls die Familie $\{X_0, X_{1,\Delta_1}, \ldots, X_{n,\Delta_n}\}$ unabhängige Zuwächse mit

$$P_{X_{j,\Delta_j} - X_{j-1,\Delta_{j-1}}} = \mathrm{Exp}(j+k,0) \qquad (1 \leqq j \leqq n) \quad \text{und}$$

$$P_{X_0} = \mathrm{Exp}(k,0)\ .$$

Damit ist aber

$$P_{X_{n,\Delta_n}} = P_{X_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} (X_{j,\Delta_j} - X_{j-1,\Delta_{j-1}})} = P_{Y_{(1)} + \sum\limits_{j=2}^{n+1} Y_{(j)} - Y_{(j-1)}} = P_{Y_{(n+1)}}\ .$$

Der angegebene Ausdruck ergibt sich nun beispielsweise aus Hinderer [25], Lemma 11.2 und Satz 24.5. □

3.16 <u>Folgerung:</u>

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.15 gilt:

$\{X_{n,\Delta_n}\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ besitzt für $n \to \infty$ eine Grenzverteilung vom Typ

$\wedge_1^{(k)}, \wedge_2^{(k)}$ oder $\wedge_3^{(k)}$, wobei

$$\wedge_1^{(k)}(x) = (1 - \Gamma_k(x^{-\alpha}))\ 1_{(0,\infty)}(x)$$

$$\wedge_2^{(k)}(x) = (1 - \Gamma_k(-x)^{\alpha})\ \ 1_{(-\infty,0]}(x) + 1_{(0,\infty)}(x)$$

$$\wedge_3^{(k)}(x) = (1 - \Gamma_k(e^{-x})) \qquad (\alpha > 0)$$

und $\Gamma_m(x) := \int\limits_0^x \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\, e^{-t}\, dt$ die unvollständige

Gamma-Funktion mit dem Parameter $m \in \mathbb{N}$ bezeichne.

Die Charakterisierung der Anziehungsbereiche sowie die Wahl der normierenden Konstanten werden dabei durch die bekannten Sätze von Gnedenko [22] und Smirnov [43] gegeben.

IV. Anhang

4.1 Lemma:

X,Y seien unabhängige reelle Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ mit den Verteilungsfunktionen F_X und F_Y. Dann gilt:

$$P(X \leq Y) = \int_{\mathbb{R}} F_X(t)\,d\,F_Y(t).$$

Beweis:

$$P(X \leq Y) = \int_{\Omega} 1_{(-\infty,Y]}(X)\,d\,P = \int_{\mathbb{R}^2} 1_{(-\infty,t]}(s)\,d\,F_X(s)\,d\,F_Y(t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} F_X(t)\,d\,F_Y(t). \quad \square$$

4.2 Lemma:

X sei eine reelle und Y eine $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ $(n \in \mathbb{N})$ sowie $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine bijektive Abbildung, die samt ihrer Umkehrabbildung g^{-1} Borel-meßbar sei. Dann gilt:

$$E(X \mid g(Y) = t) = E(X \mid Y = g^{-1}(t)) \qquad P_{g\circ Y}\text{- fast sicher}$$

$$(t \in \mathbb{R}^n).$$

Beweis:

Sei $h(t) = E(X \mid Y = t)$ $\qquad P_Y$ - fast sicher

$k(t) = E(X \mid g(Y) = t)$ $\qquad P_{g\circ Y}$ - fast sicher $\qquad (t \in \mathbb{R}^n)$.

Dann ist

$$\int_C k\,d\,P_{g\circ Y} = \int_{(g\circ Y)^{-1}(C)} X\,d\,P = \int_{Y^{-1}(g^{-1}(C))} X\,d\,P =$$

$$\int_{g^{-1}(C)} h\,d\,P_Y = \int_C h\circ g^{-1}\,d(P_Y)_g = \int_C h\circ g^{-1}\,d\,P_{g\circ Y}$$

$$(C \in \mathfrak{B}^n),$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. $\square$

4.3 <u>Satz:</u>

$\{Y_n, T_n\}_{n \in \mathbb{Z}_0}$ sei ein Markoff-Erneuerungsprozeß auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ gemäß Definition 1.10. Dann gilt

a) $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{Z}_0}$ ist eine Markoff-Kette.

b) $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}_0}$ besitzt bedingt unabhängige Zuwächse, genauer:

$$(4.1) \quad P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{T_i - T_{i-1} \in A_i\} \,|\, Y_0, \ldots, Y_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P(T_i - T_{i-1} \in A_i \,|\, Y_{i-1}, Y_i) \quad P\text{-fast sicher}$$

$$(A_i \in \mathfrak{B},\ 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N}).$$

<u>Beweis:</u>

a) Dies folgt aus Definition 1.10 für $A = \mathbb{R}$.

b) Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.
Für n = 1 ist nichts zu zeigen.
Es gelte also (4.1) für ein $n \in \mathbb{N}$.
Unter Verwendung von a), der Eigenschaften regulärer bedingter Verteilungen, Definition 1.10, Bauer [2], Lemma 54.3 sowie Lemma 4.2 folgt dann für $A_{n+1}, C_0, \ldots, C_{n+1} \in \mathfrak{B}$:

$$\int\limits_{\times_{i=0}^{n+1} C_i} \prod_{i=1}^{n+1} P(T_i - T_{i-1} \in A_i \,|\, Y_{i-1} = t_{i-1}, Y_i = t_i) \ldots$$
$$d\,P(Y_0 \leq t_0, \ldots, Y_{n+1} \leq t_{n+1}) =$$

$$\int\limits_{\times_{i=0}^{n} C_i} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} T_i - T_{i-1} \in A_i \,|\, Y_0 = t_0, \ldots, Y_n = t_n\right) \ldots$$

$$\int\limits_{C_{n+1}} P(T_{n+1} - T_n \in A_{n+1} \,|\, Y_n = t_n, Y_{n+1} = t_{n+1}) \ldots$$
$$d\,P(Y_{n+1} \leq t_{n+1} \,|\, Y_n = t_n)\, d\,P(Y_0 \leq t_0, \ldots, Y_n \leq t_n) =$$

$$\int\limits_{\substack{n\\ \times C_i\\ i=0}} P(\bigcap_{i=1}^{n}\{T_i - T_{i-1} \in A_i\} \mid Y_0 = t_0, \ldots, Y_n = t_n) \ldots$$

$$P(T_{n+1} - T_n \in A_{n+1}, Y_{n+1} \in C_{n+1} \mid Y_n = t_n) \ldots$$

$$d\,P(Y_0 \leqq t_0, \ldots, Y_n \leqq t_n) =$$

$$\int\limits_{\bigcap_{i=0}^{n}\{Y_i^{-1}(C_i)\}} E(\prod_{i=1}^{n} 1_{A_i}(T_i - T_{i-1}) \mid Y_0, \ldots, Y_n) E(1_{A_{n+1}}(T_{n+1} - T_n) \ldots$$

$$1_{C_{n+1}}(Y_{n+1}) \mid Y_0, \ldots, Y_n)\,d\,P =$$

$$\int\limits_{\bigcap_{i=0}^{n}\{Y_i^{-1}(C_i)\} \cap \bigcap_{i=1}^{n}\{(T_i - T_{i-1})^{-1}(A_i)\}} P(T_{n+1} - T_n \in A_{n+1}, Y_{n+1} \in C_{n+1} \mid T_1 - T_0, \ldots, \ldots$$

$$T_n - T_{n-1}, Y_0, \ldots, Y_n)\,d\,P =$$

$$P(\bigcap_{i=1}^{n+1} \{T_i - T_{i-1} \in A_i\} \cap \bigcap_{i=0}^{n+1} \{Y_i \in C_i\}) =$$

$$\int\limits_{\substack{n+1\\ \times C_i\\ i=0}} P(\bigcap_{i=1}^{n+1} \{T_i - T_{i-1} \in A_i\} \mid Y_0 = t_0, \ldots, Y_{n+1} = t_{n+1}) \ldots$$

$$d\,P(Y_0 \leqq t_0, \ldots, Y_{n+1} \leqq t_{n+1}).$$

Aus der Gleichheit des ersten und letzten Integrals ergibt sich somit die Gültigkeit von (4.1) für $n+1$, womit b) bewiesen ist. □

4.4 Lemma:

$\{Y_n\}_{n \in \mathbb{Z}_0}$ sei eine Familie unabhängiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$P_{Y_0} = \mathrm{Exp}(\lambda_0, \zeta_0)$ und

$P_{Y_k} = \mathrm{Exp}(\lambda_k, 0)$ $\qquad (\lambda_0, \lambda_k > 0,\ k \in \mathbb{N},\ \zeta_0 \in \mathbb{R}).$

f_n bezeichne die stetige λ-Dichte von $\sum_{k=0}^{n} Y_k \qquad (n \in \mathbb{Z}_0)$.

Dann genügt f_{n+1} der Differentialgleichung

$$f'_{n+1}(x) = \lambda_{n+1}(f_n(x) - f_{n+1}(x)) \qquad (n \in \mathbb{Z}_0, x > \zeta_0).$$

Beweis:

Nach der Faltungsformel (Hinderer [25], (24.1)) gilt für $x > \zeta_0$

$$f_{n+1}(x) = \int_{\zeta_0}^{x} f_n(y)\ \lambda_{n+1}\ e^{-\lambda_{n+1}(x-y)} dy \ , \text{ also}$$

$$f'_{n+1}(x) = -\int_{\zeta_0}^{x} f_n(y)\ \lambda_{n+1}^2\ e^{-\lambda_{n+1}(x-y)} dy + \lambda_n f_n(x) =$$

$$\lambda_{n+1}(f_n(x) - f_{n+1}(x)). \ \square$$

4.5 Satz:

Sei $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ und g eine auf $\mathbb{R}_{\zeta_0}$ beschränkte rechtsseitig stetige Funktion. Ferner sei

$$I_n(y) := \int_{\mathbb{R}_{\zeta_0}} g(x+y) f_n(x) dx \qquad (y \in \mathbb{R}_0, n \in \mathbb{Z}_0),$$

wobei f_n die Bedeutung wie in Lemma 4.4 besitze. Dann gilt:

Ist $I_n(y) = I_n(0)$ für alle $y > 0$, so ist notwendig $g(x) = g(\zeta_0)$ für alle $x > \zeta_0$.

Beweis:

Für $n = 0$ ist

$$I_0(y) = \int_{\zeta_0}^{\infty} g(x+y) f_0(x) dx = \int_{y}^{\infty} g(x+\zeta_0)\ f_0(x+\zeta_0 - y) dx =$$

$$\lambda_0\ e^{\lambda_0 y} \int_{y}^{\infty} g(x+\zeta_0)\ e^{-\lambda_0 x} dx \qquad (y \in \mathbb{R}_0).$$

Nach Voraussetzung folgt

$$0 = I_0'(y) = \lambda_0 I_0(y) - \lambda_0\, g(\zeta_0 + y) = \lambda_0 (I_0(0) - g(\zeta_0 + y))$$

λ - fast überall,

also $g(\zeta_0 + y) = \text{const}$ λ - fast überall $(y \in \mathbb{R}_0)$.

Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von g ergibt dies die Behauptung.

Unter der Annahme, daß die Gültigkeit des Satzes für ein $n \in \mathbb{Z}_0$ bewiesen ist, folgt mit Lemma 4.4

$$I_{n+1}(y) = \int_{\zeta_0}^{\infty} g(x+y) f_{n+1}(x)\, dx = \int_{y}^{\infty} g(x+\zeta_0) f_{n+1}(x+\zeta_0-y),$$

also nach Voraussetzung

$$0 = I_{n+1}'(y) = -\int_{y}^{\infty} g(x+\zeta_0) f_{n+1}'(x+\zeta_0-y)\,dx - g(y+\zeta_0)\underbrace{f_{n+1}(\zeta_0)}_{=0} =$$

$$- \lambda_{n+1} \int_{y}^{\infty} g(x+\zeta_0)(f_n(x+\zeta_0-y) - f_{n+1}(x+\zeta_0-y))\,dx =$$

$$- \lambda_{n+1}(I_n(y) - I_{n+1}(y)) \qquad \lambda\text{ - fast überall},$$

also wegen der Stetigkeit von I_n

$$I_n(y) = I_{n+1}(y) = \text{const} \qquad (y \in \mathbb{R}_0) .$$

Nach Voraussetzung folgt somit

$$g(x) = g(\zeta_0) \qquad (x \in \mathbb{R}_{\zeta_0}),$$

so daß nach dem Prinzip der vollständigen Induktion der Satz bewiesen ist. □

4.6 <u>Lemma:</u>

$\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ sei eine Familie unabhängiger Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ mit

$$P_{Y_0} = \mathrm{Geo}(p_0, \zeta_0) \quad \text{und}$$

$$P_{Y_k} = \mathrm{Geo}(p_k, 1) \qquad (0 < p_0, p_k < 1,\ k \in \mathbb{N},\ \zeta_0 \in \mathbb{Z}).$$

g_n bezeichne die $\#$-Dichte von $\sum_{k=0}^{n} Y_k$ $\quad (n \in \mathbb{Z}_0)$.

Dann genügt g_{n+1} der Differenzengleichung

$$g_{n+1}(k+1) - g_{n+1}(k) = p_{n+1}(g_n(k) - g_{n+1}(k)) \qquad (k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0+n}).$$

Beweis:

Für $k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0+n+1}$ $\quad (n \in \mathbb{Z}_0)$ gilt

$$g_{n+1}(k) = \sum_{j=\zeta_0+n}^{k-1} g_n(j)\, p_{n+1}(1 - p_{n+1})^{k-j-1}, \quad \text{also}$$

$g_{n+1}(k+1) = (1 - p_{n+1})g_{n+1}(k) + p_{n+1}\, g_n(k),$ woraus die Behauptung folgt. Wegen

$$g_m(m + \zeta_0) = \prod_{i=0}^{k} p_i \quad \text{und} \quad g_{m+1}(m + \zeta_0) = 0 \qquad (m \in \mathbb{Z}_0)$$

erhält man für $k = \zeta_0 + n$ die entsprechende Aussage. □

4.7 Satz:

Sei $\zeta_0 \in \mathbb{Z}$ und $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0+n}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Ferner sei

$$J_n(m) := \sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} a_{k+m}\, g_n(k) \qquad (m,n \in \mathbb{Z}_0),$$

wobei g_n die Bedeutung wie in Lemma 4.6 besitze. Dann gilt:

Ist $J_n(m) = J_n(0)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, so ist notwendig $a_k = a_{\zeta_0+n}$ für alle $k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0+n+1}$.

Beweis:

Für $n = 0$ ist

$$J_0(m+1) = \sum_{k=\zeta_0+1}^{\infty} a_{k+m}\, p_0 (1-p_0)^{k-\zeta_0-1}, \quad \text{also}$$

$$J_0(m) = (1-p_0)\, J_0(m+1) + p_0\, a_{\zeta_0+m} \qquad (m \in \mathbb{Z}_0).$$

Nach Voraussetzung folgt

$$0 = J_0(m+1) - J_0(m) = p_0 (J_0(m+1) - a_{\zeta_0+m}), \quad \text{also}$$

$$a_{\zeta_0+m} = \text{const} \qquad (m \in \mathbb{Z}_0).$$

Unter der Annahme, daß die Gültigkeit des Satzes für ein $n \in \mathbb{Z}_0$ bewiesen ist, folgt mit Lemma 4.6 nach Voraussetzung

$$0 = J_{n+1}(m+1) - J_{n+1}(m) =$$

$$\sum_{k=\zeta_0+n+1}^{\infty} a_{k+m+1}\, g_{n+1}(k) - \sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} a_{k+m+1}\, g_{n+1}(k+1) =$$

$$\sum_{k=\zeta_0+n} a_{k+m+1} (g_{n+1}(k) - g_{n+1}(k+1)) =$$

$$p_{n+1} \sum_{k=\zeta_0+n}^{\infty} a_{k+m+1} (g_{n+1}(k) - g_n(k)) =$$

$$p_{n+1} (J_{n+1}(m+1) - J_n(m+1)), \quad \text{also}$$

$$J_n(m+1) = J_{n+1}(m+1) = \text{const} \qquad (m \in \mathbb{Z}_0).$$

Nach Voraussetzung folgt somit

$$a_k = a_{\zeta_0+n+1} \qquad (k \in \mathbb{Z}_{\zeta_0+n+2}),$$

so daß nach dem Prinzip der vollständigen Induktion der Satz bewiesen ist. □

4.8 **Lemma:**

Es sei $S(k) := \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \qquad (k \in \mathbb{N}).$

Dann gilt:

a) $S(k) \leq \ln k + C \leq S(k) + \frac{1}{k}$

b) $S^2(k) \leq (\ln k + C)^2 \leq S^2(k) + \frac{4}{\sqrt{k}} \qquad (k \in \mathbb{N})$,

wobei C die Euler'sche Konstante bedeute.

Beweis:

Nach Erwe [10], VI, Abschnitt 5 gilt

$$\ln k + C = S(k) + \frac{1}{2k} - \int_{k-1}^{\infty} \frac{x - \mathrm{Int}(x) - \frac{1}{2}}{(1+x)^2}\, dx \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

woraus wegen

$$\left| \int_{k-1}^{\infty} \frac{x - \mathrm{Int}(x) - \frac{1}{2}}{(1+x)^2}\, dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{k-1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\, dx = \frac{1}{2k}$$

die Aussage unter a) folgt.

Durch Quadrieren auf beiden Seiten ergibt sich damit

$$S^2(k) \leq (\ln k + C)^2 \leq S^2(k) + \frac{2}{k} S(k) + \frac{1}{k^2} \leq$$

$$S^2(k) + \frac{2}{k}(\ln k + C) + \frac{1}{k^2} \leq S^2(k) + \frac{4}{k}(\sqrt{k} - 1) + \frac{2C}{k} + \frac{1}{k^2} \leq$$

$$S^2(k) + \frac{4}{\sqrt{k}} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

mit der für alle $x > 0$ gültigen Beziehung

$\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1)$.

Das Lemma ist damit bewiesen. □

LITERATURVERZEICHNIS

[1] D.E. BARTON and C.L. MALLOWS:
Some aspects of the random sequence, Ann. Math. Statist. 36(1965), 236 - 260

[2] H. BAUER:
Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, de Gruyter, Berlin 1974

[3] R.W. BIONDINI and M.M. SIDDIQUI:
Record values in Marcov sequences, Proceedings of the Summer Research Institute on Statistical Inference for Stochastic Processes, Bloomington July 31 - August 9, 1975, Vol. 2, in:
Statistical Inference and Related Topics, Ac. Press, New York, 1975, pp. 291 - 352

[4] L. BREIMAN:
Probability, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968

[5] K.N. CHANDLER:
The distribution and frequency of record values, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 14(1952), 220 - 228

[6] E. ÇINLAR:
Introduction to Stochastic Processes, Prentice-Hall, New Jersey, 1975

[7] F.N. DAVID and D.E. BARTON:
Combinatorial Chance, Hafner, New York, 1962, pp. 178 - 183

[8] L. DE HAAN and S.I. RESNICK:
Almost sure limit points of record values, J. Appl. Prob. 10(1973), 528 - 542

[9] M. DWASS:
Extremal processes, Ann. Math. Statist. 35(1964), 1718 - 1725

[10] F. ERWE:
Differential- und Integralrechnung, Band 2, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1972

[11] F. ERWE:
Gewöhnliche Differentialgleichungen, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1973

[12] W. FELLER:
An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II, Wiley, New York, 1966, pp. 15 - 16, 39 - 40

[13] F.G. FOSTER and A. STUART:

Distribution - free tests in time - series based on the breaking of records, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 16(1954), 1 - 22

[14] F.G. FOSTER and D. TEICHROEW:

A sampling experiment on the powers of the record tests for trend in a time series, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 17(1955), 115 - 121

[15] W. FREUDENBERG and D. SZYNAL:

Limit laws for a random number of record values, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 24(1976), 193 - 199

[16] W. FREUDENBERG and D. SZYNAL:

On the domains of attraction of record value distributions, Coll. Math. (to appear)

[17] J. GALAMBOS:

The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, Wiley, New York, 1978, pp. 290 - 313

[18] J. GALAMBOS and E. SENETA:

Record times, Proc. Amer. Math. Soc. 50(1975), 383 - 387

[19] D.P. GAVER:

Random record models, J. Appl. Prob. 13(1976), 538 - 547

[20] T. GERGELY and I.I. YEZHOV:

On a construction of ordinary Poisson processes and their modelling, Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. 27(1973), 215 - 232

[21] N. GLICK:

Breaking records and breaking boards, Amer. Math. Monthly 85(1) (1978), 2 - 26

[22] B. GNEDENKO:

Sur la distribution limite du terme maximum d'une sêrie alêatoire, Ann. Math. 44(1943), 423 - 453

[23] G.L. GUTHRIE and P.T. HOLMES:

On record and inter - record times for a sequence of random variables defined on a Marcov chain, Adv. Appl. Prob. 7(1975), 195 - 214

[24] D. HAGHIGHI - TALAB and C. WRIGHT:

On the distribution of records in a finite sequence of observations, J. Appl. Prob. 10(1973), 556 - 571

[25] K. HINDERER:

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer, Berlin 1972

[26] P.T. HOLMES and W.E. STAWDERMAN:
A note on the waiting times between record observations, J. Appl. Prob. 6(1969), 711 - 714

[27] S. KARLIN:
A First Course in Stochastic Processes, Ac. Press, New York, 1966, pp. 266 - 268, 487 - 488

[28] M. NEUTS:
Waiting times between record observations, J. Appl. Prob. 4(1967), 206 - 208

[29] M. NEUTS:
Probability,Allyn & Bacon, Boston, 1973, pp. 299 - 300, 432

[30] D. PFEIFER:
An application of record values to stochastic simulation, Op. Res. Verf. XXIX(1978), Verlag Anton Hain, Meisenheim, 738 - 749

[31] J. PICKANDS:
The two - dimensional Poisson process and extremal processes, J. Appl. Prob. 8(1971), 745 - 756

[32] A. RÉNYI:
Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations, Colloquium on Combinatorial Methods in Probability Theory (1962), 104 - 117, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Denmark

[33] S.I. RESNICK:
Limit laws for record values, Stoch. Proc. and Their Appl. 1(1973), 67 - 82

[34] S.I. RESNICK:
Record values and maxima, Ann. Prob. 1(1973), 650 - 662

[35] S.I. RESNICK:
Extremal processes and record value times, J. Appl. Prob. 10(1973), 864 - 868

[36] S.I. RESNICK:
Inverses of extremal processes, Adv. Appl. Prob. 6(1974), 392 - 406

[37] S.I. RESNICK:
Weak convergence to extremal processes, Ann. Prob. 3(1975), 951 - 960

[38] R.W. SHORROCK:
A limit theorem for inter - record times, J. Appl. Prob. 9(1972), 219 - 223. Correction on p. 877

[39] R.W. SHORROCK:

On record values and record times, J. Appl. Prob. 9(1972), 316 - 326

[40] R.W. SHORROCK:

Record values and inter - record times, J. Appl. Prob. 10(1973), 543 - 555

[41] R.W. SHORROCK:

On discrete time extremal processes, Adv. Appl. Prob. 6(1974), 580 - 592

[42] M.M. SIDDIQUI and R.W. BIONDINI:

The joint distribution of record values and inter - record times, Ann. Prob.3(1975), 1012 - 1013

[43] N.V. SMIRNOV:

Limit distributions for the terms of a variational series, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 1, No. 67(1952)

[44] W.E. STRAWDERMAN and P.T. HOLMES:

On the law of the iterated logarithm for inter - record times, J. Appl. Prob. 7(1970), 432 - 439

[45] M.N. TATA:

On outstanding values in a sequence of random variables, Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. 12(1969), 9 - 20

[46] W. VERVAAT:

Limit theorems for records from discrete distributions, Stoch. Proc. and Their Appl. 1(1973), 317 - 334

[47]. W. VERVAAT:

Success epochs in a sequence of Bernoulli trials, Adv. Appl. Prob. 5(1973), 35 - 36

[48] W. VERVAAT:

Limit theorems for partial maxima and records, Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, 1973, reprinted 1978 at Department of Mathematics, Catholic University, Toernooiveld, Nijmegen, The Netherlands

[49] W. VERVAAT:

On records, maxima and a stochastic difference equation, Report 7702(1977), Mathematisch Instituut Katholieke Universiteit Toernooiveld, Nijmegen, The Netherlands

[50] M. WESTCOTT:

The random record model, Proc. R. Soc. Lond. A, 356(1977), 529 - 547

[51] M. WESTCOTT:

A note on record times, J. Appl. Prob. 14(1977), 637 - 639

[52] M. WESTCOTT:

Records and random record processes, 7th Conference On Stochastic Processes And Applications, Twente Univ. of Technology, Enschede, August 15 - 19, 1977, The Netherlands

[53] M. WESTCOTT:

On the tail behaviour of record - time distributions in a random record process, Ann. Prob. (submitted)

[54] D. WILLIAMS:

On Rényi's 'record' problem and Engel's series, Bull. Lond. Math. Soc. 5(1973), 235 - 237

[55] M.C.K. YANG:

On the distribution of the inter - record times in an increasing population, J. Appl. Prob. 12(1975), 148 - 154

Lebenslauf

17. 3. 1953	geboren in Wuppertal-Elberfeld als Sohn des Steuerinspektors Edgar Pfeifer und seiner Frau Ilse, geb. Buchholz
1959 - 1963	Besuch der Gustav-Adolf-Schule in Duisburg
1963 - 1966	Besuch des Steinbart-Gymnasiums in Duisburg
1966 - 1971	Besuch des Konrad-Heresbach-Gymnasiums in Mettmann bis zum Abitur am 24. 5. 1971
1971 - 1977	Studium der Mathematik mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften an der RWTH Aachen und Diplomhauptprüfung für Mathematik am 4. 4. 1977
15. 4. 1977 - 30. 6. 1978	Verwalter der Stelle eines Wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik der RWTH Aachen
Seit dem 1. 7. 1978	Wissenschaftlicher Assistent an demselben Institut