

Einblicke

Wissenschaft und Forschung an der
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg



● Das Kölner Dom-Mosaik als Kunstwerk und Dokument ● Adelsmacht und Bauernwirtschaft
● Biblische und afrikanische Weisheit im Sprichwort ● Vegetationsstreß früh erkennen

Nr. 14

● Sanierung industrieller Altlasten am Beispiel Povel/Nordhorn ● Forschungsprogramm Subjektive Theorien ● Tschernobyl aus der Sicht der Mathematik DM 3,-

Tschernobyl und die Folgen aus der Sicht der Mathematik

von Dietmar Pfeifer

Als ich Ende April 1986 mit meiner Familie im Garten unserer belgischen Freunde in der Nähe unseres damaligen Wohnsitzes Aachen bei strahlendem Wetter einen unbeschwernten Nachmittag verbrachte, war mir noch nicht klar, welche verheerenden Auswirkungen die Reaktorkatastrophe von Tschernobyl nicht nur in der Sowjetunion selbst, sondern flächendeckend in großen Teilen Europas haben sollte. Damals war es für mich unvorstellbar, daß ein Unfall in einem Kernkraftwerk in über 2000 km Entfernung derartig gravierende Konsequenzen für das alltägliche Leben haben konnte: Verzicht oder starke Einschränkung von bestimmten Lebensmitteln wie Milch und Gemüse, Spielverbot für Kinder in Sandkästen oder Außenanlagen von Schulen, eingeschränkter Aufenthalt im Freien bei regnerischem Wetter... . Tägliche Meldungen von Belastungen des Bodens und der Nahrungsmittel in Becquerel pro m^2 oder kg oder Liter wurden bald zur Gewohnheit. Eigene Messungen der Kontamination des Bodens mit Geräten von Kollegen des physikalischen Instituts der RWTH Aachen bestätigten die Meldungen in vollem Umfang: Mehrere Tausend Bq/ m^2 auf dem Spielplatz hinter dem Haus, den Nutzpflanzen in den Gärten der Nachbarschaft, dem Gelände des städtischen Kindergartens, den unsere Tochter damals besuchte. Die anfängliche Beunruhigung über langfristig mögliche Folgeschäden wie eine Zunahme von Krebserkrankungen, oder schlimmer noch - da nicht kalkulierbar - genetischer Veränderungen bei künftigen Generationen, hat sich mittlerweile allerdings gelegt. Erst die anlässlich des fünften Jahrestages der Katastrophe auflebende Berichterstattung in Zeitungen und Fernsehen läßt wieder aufhorchen: da gibt es Dörfer in der Nähe des Unfallorts, die sogar von höchsten politischen Stellen für die nächsten 700 Jahre als unbewohnbar angesehen werden; über 88000 umgesiedelte Menschen haben keine Heimat mehr; Wissenschaftler sprechen allein für die Sowjetunion von über 5000 Toten als unmittelbare Konsequenz der Katastrophe. Der für ursprünglich auf mindestens 30 Jahre Schutz ausgelegte Sarkophag der Ruine des Reaktors droht bereits jetzt zusammenzubrechen - eine zweite Verbreitungswelle höchst radioaktiven Staubes könnte Westeuropa erneut bedrohen.

Ein mathematisches Modell des radioaktiven Zerfalls

Von den zahlreichen bei dem Reaktorunfall von Tschernobyl freigewordenen Spaltprodukten sind in erster Linie die flüchtigen radioaktiven Isotope ^{131}I (Jod), ^{137}Cs (Cäsium) und ^{90}Sr (Strontium) mit Halbwertszeiten von ca. 8 Tagen bzw. 30,2 bzw. 28,5 Jahren Hauptverursacher der hohen flächendeckenden Kontamination. Nach dem bereits vor 25 Jahren erschienenen vierbändigen Chemie-Lexikon von Römpp ist ^{137}Cs eines der potentiell gefährlichsten Radionuclide, da es vom Magen-Darm-Trakt vollständig resorbiert wird und beim Menschen eine Halbwertszeit (bezogen auf die Verweildauer im Körper) von 100 bis 150 Tagen aufweist. ^{131}I , das sich bevorzugt in der Schilddrüse

anreichert, liegt hier etwa im selben zeitlichen Bereich, während ^{90}Sr beim Menschen eine Halbwertszeit von mehreren Jahren besitzt, wodurch es wegen der Einlagerung im Knochenmark besonders gefährlich wird.

Im folgenden wollen wir ein einfaches mathematisches Modell vorstellen, welches das Langzeitverhalten radioaktiver Stoffe hinreichend genau beschreibt, wobei spezifische physikalische Besonderheiten (z.B. Wechselwirkungen mit anderen Elementarteilchen, Kaskadenprozesse) vernachlässigt werden können, ohne die tatsächlichen Gegebenheiten qualitativ oder quantitativ wesentlich zu verändern. An den Beispielen Jod (kurzlebig) und Cäsium (langlebig) können wir dabei zwei statistisch grundlegend verschiedene Gesichtspunkte des Zerfalls modellmäßig erfassen.

In der Physik geht man im allgemeinen davon aus, daß der Zerfall eines radioaktiven Teilchens spontan, d.h. ohne erkennbare äußere Wirkung geschieht. Den zufälligen Charakter dieses Vorgangs kann man dann mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie dadurch modellieren, daß man für die Lebensdauer X_i eines individuellen Teilchens i eine sogenannte Exponentialverteilung annimmt, d.h. es gilt

$$P(X_i > x) = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0. \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet P das Symbol für Wahrscheinlichkeit (lat.: probabilitas) und λ eine positive Materialkonstante, die von der Halbwertszeit des Isotops abhängt. Der in (1) angegebene Ausdruck ist die formelmäßige Beschreibung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen i länger als x Zeiteinheiten überlebt. Die Annahme einer solchen Exponentialverteilung ist mathematisch zwingend, wenn die Spontaneität des Zerfalls gleichgesetzt wird mit der Beziehung

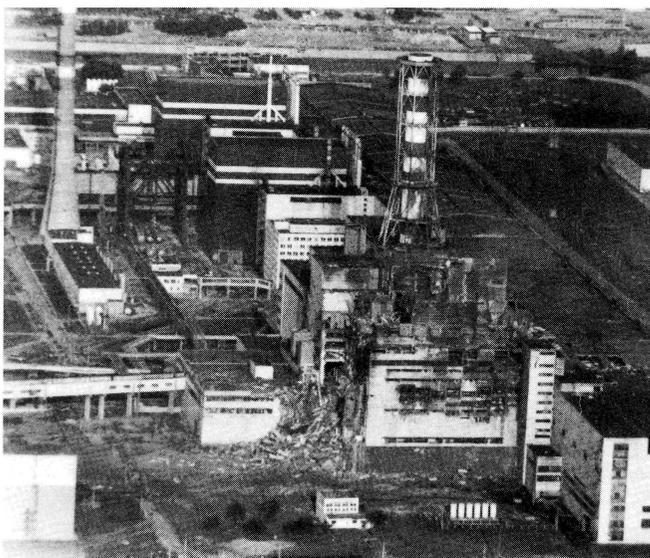
$$P(X_i > x + y \mid X_i > y) = P(X_i > x), \quad x, y \geq 0, \quad (2)$$

d.h. die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen i weitere x Zeiteinheiten überlebt, wenn es bereits y Zeiteinheiten

Abstract

We present a statistical model of radioactive decay which allows for an exhaustive study of the radiation time for a source of nuclear particles. The results are in particular applied to the nuclear power plant accident of Chernobyl in 1986.

überlebt hat, unabhängig von y ist und gerade genau so groß wie die - unbedingte - Wahrscheinlichkeit dafür, daß es überhaupt x Zeiteinheiten überlebt. Man sagt auch, die Exponentialverteilung



Kernreaktor Tschernobyl: Verheerende Folgen für Europa

sei *gedächtnislos*: für einen externen Beobachter spielt es keine Rolle, ab wann er das Verhalten des Teilchens studiert - solange es vorhanden ist, verhält es sich bezüglich seines Zerfallszeitpunktes verteilungsmäßig stets gleich. Offensichtlich erfüllt der in (1) angegebene Ausdruck auch Beziehung (2); mit tiefliegenden mathematischen Argumenten läßt sich umgekehrt zeigen, daß die Funktionalgleichung (2) als Wahrscheinlichkeiten auch nur - und damit genau - die Lösungen der Form (1) besitzt.

Eine weitere natürliche Annahme, die sich aus der Spontaneität des Zerfalls ergibt, ist die der (stochastischen) Unabhängigkeit der Zerfallszeitpunkte, wenn die Strahlungsquelle insgesamt gleichartige Atome $1, 2, \dots, n$ umfaßt, d.h. es gilt

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i > x_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i > x_i). \quad (3)$$

Dabei können die Relationszeichen „größer“ auch durch „kleiner oder gleich“ ersetzt werden. Beziehung (3) modelliert in der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie gerade das gegenseitige Nicht-Beeinflussen der Zerfallszeitpunkte der einzelnen Atome.

Wie steht es nun mit dem vermeintlich deterministischen Gesetz der exponentiellen Abnahme der Menge radioaktiver Atome mit der Zeit, wie es üblicherweise in der elementaren Physik gelehrt wird? Die Antwort hierauf gibt das berühmte *Gesetz der großen Zahlen*: fixiert man einen positiven Zeitpunkt x und betrachtet die Zufallsgrößen I_1, \dots, I_n , definiert durch

$$I_i = \begin{cases} 1, & X_i > x \\ 0, & X_i \leq x, \end{cases} \quad (4)$$

d.h. I_i gibt an, ob das Teilchen i noch existiert ($I_i = 1$) oder schon zerfallen ist ($I_i = 0$), so sind die abgeleiteten Größen I_1, \dots, I_n , wieder unabhängig und jeweils binomialverteilt mit

$$p := P(I_i = 1) = P(X_i > x) = e^{-\lambda x}, \quad (5)$$

insbesondere ist dann die Summe S_n der I_1, \dots, I_n ebenfalls binomialverteilt mit Erwartungswert $E(S_n) = np$ und Varianz

$\text{Var}(S_n) = np(1-p)$. S_n gibt also die Anzahl der noch existierenden Teilchen zur Zeit x an. Die Größe S_n/n , also die *relative* Anzahl der verbleibenden Teilchen zur Zeit x , strebt aber nach dem schon Jakob Bernoulli im 17. Jahrhundert bekannten Gesetz der großen Zahlen gegen p , wobei die Abweichung vom Grenzwert noch durch die *Tschebyscheff-Ungleichung* präzisiert werden kann:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2\epsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}, \quad (6)$$

unabhängig von p bzw. vom Zeitpunkt x .

Um einen Eindruck von der Größenordnung des Approximationsfehlers in (6) zu bekommen, braucht man sich nur zu überlegen, daß ein Mol eines Isotops (d.h. sein Molekulargewicht in g) nach dem Avogadro'schen Gesetz stets gleich viele, nämlich ca. $6 \cdot 10^{23}$ Atome enthält - die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die relative Anzahl S_n/n der noch existierenden Atome zur Zeit x um mehr als z.B. $\epsilon = 10^{-10}$ von der Größe p abweicht, beträgt also weniger als 0.00005! Dies bedeutet, daß die Ausgangsmenge des radioaktiven Materials 'praktisch' deterministisch mit der Zeit x exponentiell abnimmt.

Damit wird auch die Bedeutung der Materialkonstanten λ deutlich: die Halbwertszeit h des betreffenden Isotops ist nämlich durch die Beziehung

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda h}, \quad \text{also} \quad \lambda = \frac{\log 2}{h} \quad (7)$$

gegeben.

Die Zerfallsintensität $Z(x)$ zur Zeit x läßt sich nun aus den Beziehungen (1) und (7) wie folgt ableiten: die Wahrscheinlichkeit dafür, daß innerhalb von Δ Zeiteinheiten nach x das Teilchen i zerfällt, beträgt

$$P(x < X_i \leq x + \Delta) = e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda\Delta}) \approx \Delta\lambda e^{-\lambda x}, \quad (8)$$

wenn die positive Zeitspanne Δ klein genug ist. Wählt man analog zu (4) die Größen J_i gemäß

$$J_i = \begin{cases} 1, & x < X_i \leq x + \Delta \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (9)$$

so gibt die wieder binomialverteilte Größe T_n der Summe der J_1, \dots, J_n entsprechend die Anzahl der innerhalb von Δ Zeiteinheiten nach x zerfallenen Atome an. Wählt man die Zeitskala in Sekunden sowie $\Delta = 1$ [sec], so ergibt sich die Zerfallsintensität zur Zeit x - in Becquerel (Bq) - zu

$$Z(x) = E(T_n) \approx n \cdot \lambda e^{-\lambda x}. \quad (10)$$

Für $x = 0$ ergibt sich hieraus die anfängliche Zerfallsintensität $Z(0)$ und damit $\lambda = Z(0)/n$ als anfängliche *relative*

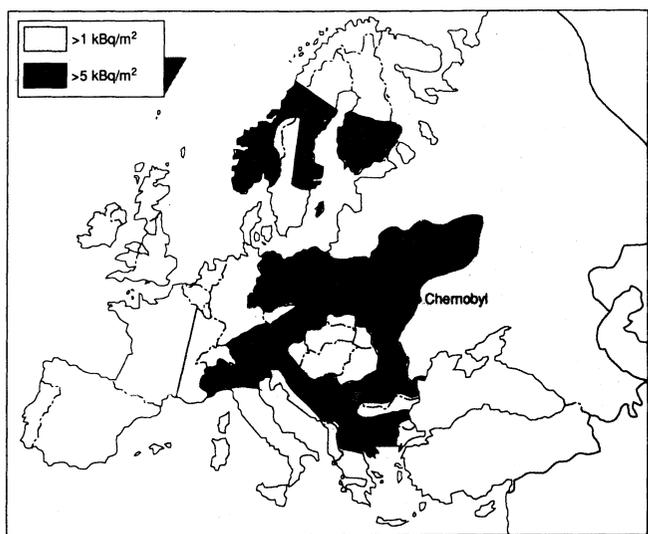
Zerfallsintensität, was die Bedeutung von λ noch einmal aus anderer Sicht erklärt.

Bezieht man die Zerfallsintensität auf ein Mol (also $n = 6 \cdot 10^{23}$) und mißt die Halbwertszeit h sowie die Zeit x in Jahren (1 Jahr entspricht $3.1536 \cdot 10^7$ sec), ergibt sich demnach

$$Z(x) \approx \frac{1.32 \cdot 10^{16}}{h 2^{x/h}} [Bq]. \quad (11)$$

Für die Isotope ^{131}J und ^{137}Cs bedeutet dies, daß eine Ausgangsmenge von 131 g bzw. 137 g dieses Stoffes eine anfängliche Zerfallsintensität von ca. $3.85 \cdot 10^{19}$ Bq bzw. $4.37 \cdot 10^{14}$ Bq besitzt.

Die Größenordnung der anfänglichen Zerfallsintensität von ^{131}J wird deutlich, wenn man sich vor Augen hält, daß durch atmosphärische Verdriftung eine annähernd kreisförmige Fläche von ca. 2000 km Radius um Tschernobyl mit mindestens 1000 Bq/m² kontaminiert wurde - das entspricht etwa 12.5 Millionen km². Aufgrund zahlreicher Messungen von Bodenproben kann man ziemlich sicher davon ausgehen, daß ca. 95% der anfänglichen Kontamination in Westeuropa durch Jod (der Rest überwiegend durch Cäsium, in geringerem Umfang durch Strontium) verursacht wurde. Man erhält so mit dem unteren Grenzwert von 1000 Bq/m² rechnerisch eine anfängliche Zerfallsintensität für ^{131}J in einer Größenordnung von etwa 10^{16} Bq, was einer Ausgangsmenge im Grammbereich entspricht. Die Gesamtmenge des radioaktiven Fallouts in der Nahzone des Reaktors sowie den etwas entfernteren Gebieten betrug im Vergleich hierzu am 5.5.1986 etwa $3 \cdot 10^7$ Ci (Curie) = $1.11 \cdot 10^{18}$ Bq.



Kontamination nach dem Unfall von Tschernobyl

Eine Modellstudie der Aktivitätsdauer

Eine wichtige Frage, die sich seit 1986 stellt, ist die nach der möglichen Dauer der durch die flächendeckende Kontamination verursachten radioaktiven Belastung bzw. der dadurch verursachten Wirkungen auf den menschlichen Körper. Das oben vorgestellte mathematische Modell erlaubt eine einfache stochastische Analyse dieses Problems z.B. im Rahmen der

Extremwertstatistik. In erster Näherung kann man sich dabei an der 'deterministischen' exponentiellen Abnahme der Aktivität orientieren, also an der Lösung der Gleichung

$$n_g = n \cdot e^{-\lambda x} \quad \text{oder} \quad x = -\frac{\log(n_g/n)}{\lambda} = h \frac{\log(n/n_g)}{\log 2}, \quad (12)$$

wobei wieder n die Anzahl der anfänglich vorhandenen Atome und n_g die vorgegebene Grenzmenge bezeichnet. Aufgrund des stochastischen Charakters des radioaktiven Zerfalls zeigt eine genauere Analyse jedoch, daß dieser so berechnete Zeitpunkt x selbst zufällig ist, also insbesondere eine Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzt, deren Varianz mit dem Abnehmen von n_g wächst. Wir wollen hier speziell zwei Zeiträume nennen, die sich bezüglich der angesprochenen Verteilungsstruktur wesentlich voneinander unterscheiden:

1. die gesamte Aktivitätsdauer bis zum vollständigen Zerfall, d.h. $n_g = 0$;
2. die Aktivitätsdauer bis zu einem festen positiven Grenzwert n_g kleiner als n .

Wenn wir wieder wie oben die - exponentialverteilten - Lebensdauern der einzelnen Atome mit X_1, \dots, X_n bezeichnen, wird die gesamte Aktivitätsdauer beschrieben durch die maximale Lebensdauer aller Teilchen, also die Zufallsgröße $M_n := \max(X_1, \dots, X_n)$. Aus der Unabhängigkeitsannahme (3) folgt dann für die Verteilung von M_n die Beziehung

$$\begin{aligned} P(M_n \leq x) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq x\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = (1 - e^{-\lambda x})^n, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Durch Zentrieren erhält man aus (13) die Gleichung

$$\begin{aligned} P(\lambda(M_n - \log n) \leq x) &= (1 - e^{-(x + \log n)})^n \\ &= \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \rightarrow G(x) := e^{-e^{-x}}; \end{aligned} \quad (14)$$

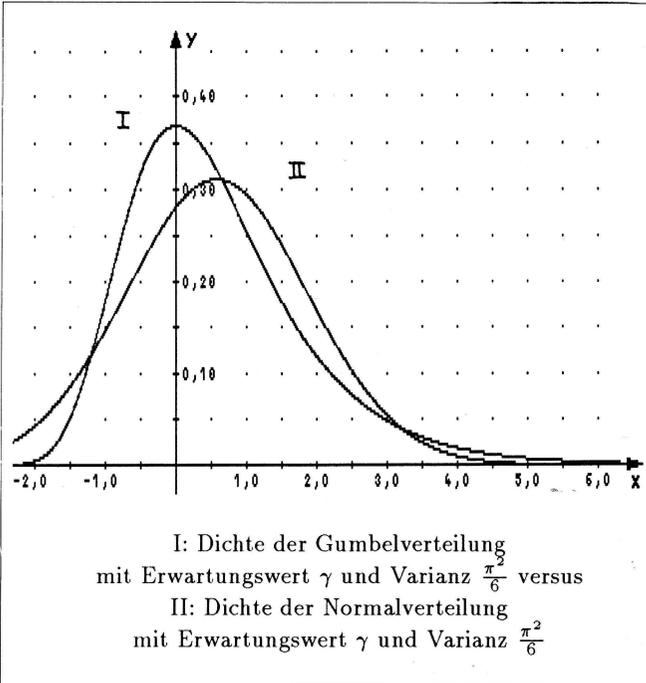
die sich so ergebende Grenzverteilung mit der Verteilungsfunktion G heißt sinngemäß *doppelte Exponentialverteilung*, Gumbelverteilung oder auch Extremwertverteilung vom Typ I. (Diese Verteilung spielt z.B. auch eine Rolle bei der Untersuchung der maximalen SO_2 -Konzentration in der Luft.) Die durch (14) beschriebene Verteilung besitzt den Erwartungswert $\gamma = 0.5772\dots$ (sog. Euler'sche Konstante) sowie die Varianz $\pi^2/6 = 1.6449\dots$. Hieraus ergibt sich für die mittlere Aktivitätsdauer $E(M_n)$ sowie deren Varianz bzw. Standardabweichung:

$$\begin{aligned} E(M_n) &\approx \frac{\log n + \gamma}{\lambda} = h \frac{\log n + \gamma}{\log 2}, \\ \sigma_n^2 &\approx \frac{\pi^2}{6\lambda^2} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_n \approx h \frac{\pi}{\sqrt{6} \log 2} = 1.85 h. \end{aligned} \quad (15)$$

Rechnet man mit einer bei dem Reaktorunfall insgesamt freigesetzten Menge Jod ^{131}J in Höhe von 1 g (entsprechend

$n = 4.6 \cdot 10^{21}$), erhält man also für die gesamte mittlere Aktivitätsdauer dieser Jod-Atome zusammengenommen approximativ 1.6 Jahre mit einer Standardabweichung von 14.8 Tagen; der Einfluß von Jod ist damit inzwischen praktisch vollständig verschwunden.

Bei einer lokalen Betrachtung (z.B. bezogen auf 1 m² Boden) ergibt sich analog für eine Menge Jod, die eine anfängliche Zerfallsintensität von 5000 Bq besitzt ($n = 5 \cdot 10^9$): mittlere Aktivitätsdauer = 264.4 Tage, Standardabweichung = 14.8 Tage.



Allgemeiner zeigt die obige Rechnung, daß für ein radioaktives Isotop mit einer Halbwertszeit h (in Jahren) und einer anfänglichen Zerfallsintensität b [Bq] die Beziehung

$$E(M_n) \approx \frac{\log(hb) + 18.21}{\log 2} h, \quad \sigma_n \approx 1.85 h \quad (16)$$

mit $n = 4.55 \cdot 10^7 \cdot h \cdot b$ und einer entsprechend zentrierten doppelten Exponentialverteilung als approximativer Verteilung gilt. Ähnlich wie in Beziehung (6) läßt sich auch hier zeigen, daß der entsprechende Approximationsfehler wie $1/n$ mit wachsendem n (=Anzahl der Atome) abnimmt, also für die hier betrachteten konkreten Fälle hinreichend klein ist.

Messungen von 1990 in der nördlichen Ukraine haben ergeben, daß die durchschnittlichen Zerfallsintensitäten immer noch in der Größenordnung von 10^8 Bq/m² liegen. Dies zeigt, daß nach dem Jod nunmehr die langlebigen Isotope ¹³⁷Cs und ⁹⁰Sr Hauptverursacher der noch bestehenden Kontamination sind. Wir wollen deshalb jetzt das Verteilungsverhalten der Aktivitätsdauer in der zweiten Situation für diese Stoffe untersuchen. Hierbei ist es zweckmäßig, die sogenannten Ordnungsstatistiken (order statistics) der Zerfallszeitpunkte X_1, \dots, X_n zu betrachten, d.h. die der Größe nach geordneten Werte $\min(X_1, \dots, X_n) = X_{1:n}, \dots, X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$. Diese geben zugleich die natürliche Reihenfolge an, in der die Zerfallszeitpunkte der einzelnen Atome z.B. in einem physikalischen Meßgerät regi-

striert werden. Die Aktivitätsdauer bis zum Erreichen der Grenzmenge n_g bei anfänglich n Atomen ist dann gegeben durch die Ordnungsstatistik mit Index $n - n_g + 1$, welche wir hier mit $Y_{n,g}$ abkürzen wollen. Es gilt für Erwartungswert und Varianz dieser Größe

$$E(Y_{n,g}) \approx h \frac{\log(n/n_g)}{\log 2}, \quad \text{Var}(Y_{n,g}) \approx \frac{h^2}{n_g \log^2 2}, \quad (17)$$

falls n_g positiv, aber klein gegenüber n ist. Der Approximationsfehler bewegt sich auch hier wieder in Größenordnungen von $1/n$.

Bezieht man Erwartungswert und Standardabweichung nicht auf Absolutzahlen n und n_g , sondern auf die entsprechenden Zerfallsintensitäten b und g , ergibt sich entsprechend

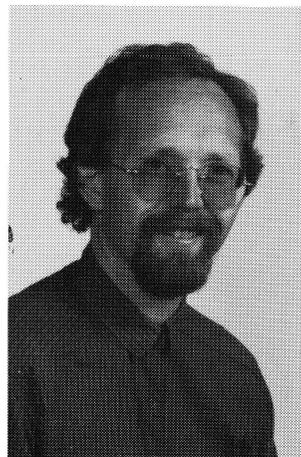
$$E(Y_{n,g}) \approx h \frac{\log(b/g)}{\log 2}, \quad \sigma_{n,g} \approx 2.14 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}. \quad (18)$$

Für große Werte von n_g bzw. g stimmt also die mittlere Aktivitätsdauer ziemlich genau mit den in (12) angegebenen Werten überein, da die zugehörige Standardabweichung in den praktisch relevanten Situationen im allgemeinen sehr klein ausfällt. Im Gegensatz zur ersten Situation kann man hierfür die betrachteten Größenordnungen von n_g bzw. g die Aktivitätsdauer approximativ als normalverteilt mit den durch (18) gegebenen Parametern ansehen.

Für die in der Ukraine gemessenen Werte ergibt sich mit $b=10^8$, $g = 1000$ im Fall des Cäsiums der Erwartungswert 501.6 mit Standardabweichung 0.07. Wenn man eine längerfristige radioaktive Belastung über 1000 Bq/m² für die Bevölkerung für unzumutbar hält, bleibt diese Gegend also notgedrungen für die nächsten 500 Jahre unbewohnbar....

Einige Informationen zu den physikalischen Aspekten der hier dargestellten Zusammenhänge hat freundlicherweise mein Kollege Wolfgang Ebenhöf beigetragen, wofür ich ihm an dieser Stelle besonders danken möchte.

Der Autor



Prof. Dr. Dietmar Pfeifer (38) wurde 1987 auf die Professur für Mathematisierung der Wirtschaftswissenschaften berufen. Pfeifer studierte an der Technischen Hochschule Aachen Mathematik und Wirtschaftswissenschaften. Nach der Promotion 1980 und seiner Habilitation 1984 an der TH Aachen wurde er Gastprofessor an der University of North Carolina, Chapel Hill. Ein Heisenberg-Stipendium und eine weitere Gastprofessur an der University of California, Santa Barbara, waren Stationen seiner wissenschaftlichen Laufbahn, bevor er nach Oldenburg kam. Pfeifers Forschungsgebiet ist die Stochastik.