Wahldebakel: BUSH + GORE + CHAOS = RUEGE?

Anmerkungen zu einer mathematischen Denksportaufgabe

DIETMAR PFEIFER, OLDENBURG UND MICHAEL NAATZ, BERLIN

Zusammenfassung: *Stochastische Such- und Optimierungsalgorithmen lassen sich oft effizienter zur Lösung konkreter mathematischer Aufgaben einsetzen als „klassische" numerische oder enumerative Verfahren. Dies soll an dem Beispiel einer Denksportaufgabe aus dem Stern-Magazin, dem die obige Rätsel-Gleichung entstammt, veranschaulicht werden.*

1. Das Problem und seine Herkunft

In der Ausgabe 2 des Stern-Magazins vom 4.1.2001 findet sich unter der Rubrik *Rätsel* auf Seite 71 unter dem Stichwort *Wahldebakel* die folgende mathematische Denksportaufgabe:

„Das Chaos bei der Bush-und/oder-Gore-Wahl verdient sicherlich eine Rüge, so sehen es zumindest Vertreter der Politomathematik. Ihre Formel

$$BUSH + GORE + CHAOS = RUEGE$$

lässt sich in eine schlüssige Gleichung verwandeln, indem ihre Buchstaben durch Ziffern – gleiche Buchstaben durch gleiche, verschiedene durch verschiedene Ziffern – ersetzt werden. Unter den sechs möglichen Lösungen wird diejenige gesucht, bei der das CHAOS am größten ist"

- wobei im doppeldeutigen Sinne hier die numerisch größte Lösung gemeint ist. Durch geschicktes Überlegen lassen sich natürlich auf Anhieb einige Beziehungen zwischen den zehn Unbekannten herstellen; so gilt etwa H + S = 10. Die Beziehung zwischen C und R ist dagegen nicht so einfach wegen der drei Summanden auf der linken Seite; hier ist sowohl R = C+1 als auch R = C+2 denkbar, und beide Möglichkeiten kommen auch in der Lösungsmenge vor. Ansonsten ist man wohl mehr oder weniger auf eine geeignete Rate-Strategie angewiesen.

Wenn man darauf verzichten will, bleibt eigentlich zunächst nur die Alternative einer systematischen Abzählung aller denkbaren Fälle (hier: Permutationen der Ziffern 0 bis 9 ohne Wiederholung), das sind im vorliegenden Fall maximal 10! = 3 628 800 Möglichkeiten (wegen B > 0, G > 0, C > 0 und R > 0 reduzieren sich diese aber faktisch noch um 4×9! = 1 451 520 Möglichkeiten auf insgesamt 2 177 280 Möglichkeiten). Die Programmierung geeigneter Algorithmen ist aus schulischer Sicht allerdings aufwendig, auch wenn hier die schnellsten Verfahren nur wenig mehr als die theoretisch minimale Größenordnung von 10! Schritten erfordern (vgl. z.B. Pruesse/Ruskey (1994) oder Canfield / Williamson (1995).) Erstaunlicherweise bietet hier nun die Stochastik einen interessanten und effizienten Ausweg aus diesem Dilemma, indem man die oben angedeutete *vollständige Enumeration* aller sinnvollen Fälle durch eine *zufällige Enumeration* ersetzt. Dabei macht man sich die Tatsache zunutze, dass jede Permutation [σ(0),...,σ(9)] der zehn Ziffern [0,...,9] durch eine Verkettung von paarweisen Vertauschungen erreicht werden kann. Dies sei exemplarisch an dem Beispiel der Permutation [2,4,1,7,5,3,0,6,8,9] veranschaulicht:

[0,**1**,**2**,3,4,5,6,7,8,9]
[**0**,**2**,1,3,4,5,6,7,8,9]
[2,0,1,**3**,**4**,5,6,7,8,9]
[2,0,**1**,**4**,3,5,6,7,8,9]
[2,**0**,**4**,1,3,5,6,7,8,9]
[2,4,**0**,**1**,3,5,6,7,8,9]
[2,4,1,0,3,5,**6**,**7**,8,9]
[2,4,1,0,3,**5**,**7**,6,8,9]
[2,4,1,0,**3**,**7**,5,6,8,9]
[2,4,1,**0**,**7**,3,5,6,8,9]
[2,4,1,7,0,**3**,**5**,6,8,9]
[2,4,1,7,**0**,**5**,3,6,8,9]
[2,4,1,7,5,**0**,**3**,6,8,9]
[2,4,1,7,5,3,0,6,8,9]

Dabei sind die im nächsten Schritt zu vertauschenden Ziffern jeweils fett markiert, die schon richtig positionierten Ziffern unterstrichen. Das Prinzip ist offensichtlich: man „schiebt" die jeweils nächste Ziffer aus dem noch nicht richtig angeordneten „Rest" von rechts nach links durch sukzessives Vertauschen mit dem jeweiligen linken Nachbarn an die richtige Position. Ein solcher Vertauschungsschritt ist als *Einzelschritt* einfach zu programmieren, eine systematische Erfassung aller möglichen bzw. sinnvollen Fälle ist jedoch erheblich aufwendiger und mit schulischen Mitteln ohne tiefere Kenntnisse in Informatik wohl kaum zu bewerkstelligen.

2. Das Verfahren der zufälligen Enumeration

Die zentrale Idee einer zufälligen Enumeration besteht darin, dass man die zu den verschiedenen Permutationen führenden Ziffernvertauschungen nicht systematisch, sondern durch einen Zufallsgenerator gesteuert vornimmt, wobei jedes Mal zwei verschieden positionierte Ziffern zufällig ausgewählt werden. Im Laufe des Verfahrens werden dabei mehr und mehr verschiedene Permutationen generiert, so dass die Wahrscheinlichkeit, eine oder mehrere Lösungen des Problems zu finden, stetig zunimmt. Formal ist dieses Problem einfach zu beschreiben; es ist auch unter dem Stichwort „Belegungsproblem" bekannt (vgl. Beispiel 2.3.9 in Pfanzagl (1991)):

„n Kugeln werden derart auf N Fächer verteilt, dass jede Kugel mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jedes Fach kommen kann, unabhängig davon, ob dieses Fach bereits besetzt ist oder nicht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P(N,n), dass alle Fächer belegt sind?"

Bezogen auf unser Problem spielen die N Fächer die Rolle der verschiedenen Permutationen der Ziffern 0 bis 9, n spielt die Rolle der durchgeführten zufälligen Enumerationsschritte (d.h. die jeweils durchgeführte zufallsgesteuerte Vertauschung zweier Ziffern). 1–P(N,n) gibt dann die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass man mit n Suchschritten noch nicht alle Permutationen generiert hat, wobei sinnvollerweise $n \geq N$ zu wählen ist (anderenfalls ist offensichtlich P(N,n) = 0). Die Wahrscheinlichkeit P(N,n) kann mit Hilfe der Formel von Sylvester (vgl. Barth / Haller (1998), Satz 66.1 bzw. Pfanzagl (1991), Kapitel 2.3) – manchmal auch Einschluß-Ausschluß-Formel genannt – exakt bestimmt werden. Dazu bezeichne A_i für i=1,...,N das Ereignis, dass bei n Versuchen Fach Nummer i leer bleibt. 1–P(N,n) entspricht damit der Wahrscheinlichkeit, dass bei n Versuchen *mindestens ein* Fach leer bleibt. Es folgt

$$1 - P(N,n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+1} \sum_{k_1<k_2<\ldots<k_i} P\left(\bigcap_{j=1}^{i} A_{k_j}\right)$$

und damit

$$(1) \qquad P(N,n) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \binom{N}{i} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^n$$

(vgl. Pfanzagl (1991), S. 40). Dabei ist nur zu beachten, dass $\bigcap_{j=1}^{i} A_{k_j}$ das Ereignis beschreibt, dass in n Versuchen genau die Fächer $k_1<k_2<\ldots<k_i$ leer bleiben. Für die Auswahl dieser Indices gibt es gerade $\binom{N}{i}$ Möglichkeiten, und alle Ereignisse $\bigcap_{j=1}^{i} A_{k_j}$ sind gleichwahrscheinlich mit $P\left(\bigcap_{j=1}^{i} A_{k_j}\right) = \left(1 - \frac{i}{N}\right)^n$.

In unserem Anwendungsfall ist die Wahrscheinlichkeit P(N,n) bei N=10! und n > N nicht einfach numerisch zu berechnen. Es genügt hier aber auch eine einfache Abschätzung nach unten, die man aus den ersten beiden Summanden in (1) wie folgt erhält:

$$(2) \qquad \begin{aligned} P(N,n) &= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{N} P(A_i) \\ &= 1 - N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \geq 1 - N \exp\left(-\frac{n}{N}\right). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde dabei von der auch aus dem schulischen Unterricht (Analysis) bekannten Ungleichung $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$ Gebrauch gemacht, die für alle reellen Zahlen $x \geq -n$ gültig ist, mit $x = -\frac{n}{N}$. Man vergleiche etwa die Diskussion in Baierlein et al. (1984), Kapitel 4.2.

Will man etwa mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \varepsilon$ in n Suchschritten alle N Permutationen generiert haben, so leistet dies sicher die Wahl

$$(3) \qquad n \geq N \ln\left(\frac{N}{\varepsilon}\right),$$

da dann

$$P(N,n) \geq 1 - N \exp\left(-\frac{n}{N}\right) \geq 1 - N \exp\left(-\ln\left(\frac{N}{\varepsilon}\right)\right) = 1 - \frac{N}{\left(\frac{N}{\varepsilon}\right)} = 1 - \varepsilon$$

folgt.

Wählt man z.B. $\varepsilon = 0.01$, so folgt $n \geq 71\,522\,134$.

Eine andere interessante Frage ist die nach der erwarteten Anzahl von Suchschritten, bis zum ersten Mal alle N Permutationen generiert (bzw. alle Fächer belegt) worden sind. In Engel (1991) wird dieses Problem in Abschnitt 40 unter der Überschrift

Warten auf einen vollständigen Satz behandelt, in Athen et al. (1995) findet man es auf S. 142 als *Mittlere Wartezeit auf eine vollständige Serie*. Bezeichnet man mit X die zugehörige Zufallsvariable, so gilt offensichtlich

$$P(X > n) = 1 - P(N, n) \text{ für } n=0,1,2,...$$

Zur Berechnung des Erwartungswertes E(X) lässt sich diese Beziehung oft recht einfach verwenden; es gilt nämlich im vorliegenden Fall

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$$

(vgl. Krengel (2000), S. 59, Aufgabe 2 oder Mathar / Pfeifer (1990), Lemma 2.2.2. d). Formal lässt sich dies zeigen durch Umordnen der Reihe

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\ P(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} P(X = n) \\ &= \sum_{0\le k<n} P(X = n) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n>k} P(X = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k). \end{aligned}$$

Leider lässt sich damit selbst unter Verwendung der Beziehung (1) der Erwartungswert E(X) nicht auf einfache Weise in geschlossener Form angeben; der durch Vertauschung der Summationsreihenfolge mit der Formel für die geometrische Reihe resultierende Ausdruck

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+1} \binom{N}{i} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^n \\ &= \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+1} \binom{N}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^n = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+1} \binom{N}{i} \frac{N}{i} \end{aligned}$$

(erlaubt wegen absoluter Konvergenz der äußeren Reihe) lässt sich nämlich nicht unmittelbar elementar vereinfachen. Auf die explizite Lösung, die auch in Athen et al. (1995) und Engel (1987, 1991) zu finden ist, gehen wir später noch einmal gesondert ein. Man kann sich aber auch hier mit einer einfacher herzuleitenden Abschätzung für E(X) nach oben begnügen: wegen

$$P(X > n) = 1 - P(N, n) \le \min\left\{1, N \exp\left(-\frac{n}{N}\right)\right\}$$

nach (2) erhält man sofort

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) \le \sum_{n=0}^{\infty} \min\left\{1, N \exp\left(-\frac{n}{N}\right)\right\}.$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks überlegen wir uns, für welche Werte von n das in der Reihe auftretende Minimum kleiner als 1 wird:

$$N \exp\left(-\frac{n}{N}\right) < 1 \Leftrightarrow n > N \ln(N).$$

Setzen wir hier $n_0 := \lceil N \ln(N) \rceil$, womit die nach oben ganzzahlig aufgerundete Größe gemeint ist, so erhalten wir nun

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) \le 1 + n_0 + N \sum_{n>n_0} \exp\left(-\frac{n}{N}\right) \\ &= 1 + n_0 + N \exp\left(-\frac{n_0}{N}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n}{N}\right) \\ &\le 1 + n_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\exp\left(-\frac{1}{N}\right)\right\}^n \\ &= 1 + n_0 + \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{1}{N}\right)} \le 1 + n_0 + N + 1, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus einem Spezialfall der schon erwähnten Ungleichung

$$e^x \ge 1 + x \quad \text{bzw.} \quad e^{-x} \le \frac{1}{1+x}$$

für x > 0 resultiert (man setze x = 1/N). Insgesamt folgt damit die Abschätzung

$$\text{(4)} \qquad E(X) \le N\left(1 + \ln(N)\right) + 3;$$

dies ist in derselben Größenordnung wie (3). In unserem konkreten Rätselbeispiel ergibt sich etwa $E(X) \le 58\,439\,695$.

Ein Vergleich mit einer *systematischen* Erzeugung *aller* Permutationen, die im besten Fall größenordnungsmäßig mit etwa N Schritten auskommt, zeigt, dass der erwartete Aufwand bei zufälliger Enumeration nur etwa um den Faktor $\ln(N)$ größer ist.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir uns noch einmal mit der angekündigten einfacheren Darstellung von E(X) beschäftigen. Es gilt nämlich

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} E(X) &= N \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \le N\left(\ln(N) + \gamma + \frac{1}{2N}\right) \\ &= N\left(\gamma + \ln(N)\right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

mit der Euler'schen Konstanten γ=0.577216 ... (vgl. Engel (1991), S. 150 und S. 209 ff). Die elementare Abschätzung (4) ist also bereits recht nahe an dem exakten Wert!

Zur Herleitung betrachten wir das Polynom

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+1} \binom{N}{i} \frac{x^i}{i}$$

sowie dessen Ableitung

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+1} \binom{N}{i} x^{i-1} = \frac{1}{x}\left(1 - \sum_{i=0}^{N} (-1)^{i} \binom{N}{i} x^{i}\right)$$
$$= \frac{1-(1-x)^N}{x} = \frac{1-(1-x)^N}{1-(1-x)} = \sum_{i=0}^{N-1} (1-x)^i,$$

wobei die zweite Gleichheit formal nur für $x \neq 0$ gültig ist (mit stetiger Ergänzung gilt die Gleichungskette aber für alle reellen x). Neben dem binomischen Lehrsatz wurde dabei in der letzten Gleichheit von der Formel für die (endliche) geometrische Reihe Gebrauch gemacht. Es folgt wegen $f(0) = 0$:

$$f(1) = \int_0^1 f'(u)\,du = \int_0^1 \sum_{i=0}^{N-1} (1-u)^i\,du = \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^1 (1-u)^i\,du$$
$$= -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{(1-u)^{i+1}}{i+1}\Bigg|_{u=0}^{u=1} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}$$

und damit

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+1} \binom{N}{i} \frac{N}{i} = N\,f(1) = N \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i},$$

wie behauptet. Für die weitere Abschätzung in (5) verweisen wir auf Engel (1991), S. 209 ff.

Die Ungleichung (5) liefert bezogen auf das Ausgangsproblem hier noch die Abschätzung $E(X) = 54\,810\,894$, was nur relativ geringfügig kleiner ist als die aus (4) gewonnene Abschätzung.

Wer sich an dieser Stelle mit einer intuitiv einfacheren, dafür aber mathematisch nicht ganz strengen Argumentation begnügen möchte, sei auf die Ausführungen in Athen et al. (1995), S. 142 verwiesen.

3. Die programmtechnische Umsetzung

Von den vielen Möglichkeiten, das Ausgangsproblem in ein funktionierendes Computer-Programm umzusetzen, soll im folgenden eine Version für BASIC vorgestellt werden. Es kann aber leicht auch in jede beliebige andere Programmiersprache wie Pascal, Delphi oder C übertragen werden; vgl. etwa Engel (1991), Abschnitt 47.1. Der eigentliche Programmkern mit dem zufälligen Enumerationsschritt ist in Fett hervorgehoben, der Rest dient dazu, nur die voneinander *verschiedenen* gefundenen Lösungen auszugeben.

```
cls
dim x(10)
for i=1 to 9
x(i)=i
next i
dim bush(100)
dim gore(100)
dim chaos(100)
j=5
locate 3,1
print " BUSH + GORE + CHAOS = RUEGE"
randomize timer
0 locate 1,1
print z&;"Suchschritte durchgeführt"
z&=z&+1
i=int(10*rnd)
1 k=int(10*rnd)
if i=k then goto 1
swap x(i),x(k)
if (x(0)=0 or x(4)=0 or x(8)=0 or
       x(6)=0) then goto 0
bush=1000*x(0)+100*x(1)+10*x(2)+x(3)
gore=1000*x(4)+100*x(5)+10*x(6)+x(7)
chaos=10000*x(8)+1000*x(3)+100*x(9)+
       10*x(5)+x(2)
ruege=10000*x(6)+1000*x(1)+100*x(7)+
       10*x(4)+x(7)
x=bush+gore+chaos-ruege
if (x>0 or x<0) then goto 0
y=1
for m=0 to r
y=y*min(1,abs(bush-bush(m)))
       *min(1,abs(gore-gore(m)))
       *min(1,abs(chaos-chaos(m)))
next m
if y=0 then goto 0
r=r+1
bush(r)=bush
gore(r)=gore
chaos(r)=chaos
locate j,1
print bush;"+";gore;"+";chaos;"=";
        ruege;" (";r;")"
j=j+1
goto 0
```

Im Gegensatz zu den Angaben im Stern-Magazin fand das Programm regelmäßig folgende 10 (!) verschiedene Lösungen, wobei in den meisten Fällen nicht mehr als 80 Millionen Suchschritte bis zum Auffinden dieser Lösungen benötigt wurden (Lösung mit maximalem CHAOS in Fett):

```
BUSH + GORE + CHAOS = RUEGE
6728 + 1350 + 48932 = 57010 (1)
5346 + 1792 + 86074 = 93212 (2)
9537 + 8041 + 27603 = 45181 (3)
4173 + 2860 + 53987 = 61020 (4)
2364 + 7195 + 84016 = 93575 (5)
2819 + 6045 + 39701 = 48565 (6)
8419 + 7056 + 39201 = 54676 (7)
8637 + 1259 + 47023 = 56919 (8)
3764 + 9025 + 14806 = 27595 (9)
5073 + 1492 + 83647 = 90212 (10)
```

Mit einem handelsüblichen PC, Ausstattung Pentium II mit 233 MHz Taktfrequenz, benötigte das (kompilierte) Programm dabei in keinem Fall mehr als 5 Minuten bis zum Auffinden dieser Lösungen.

[Die Wahrscheinlichkeit, dass es außer den gefundenen noch weitere Lösungen gibt, ist mit testweise insgesamt über 200 Millionen durchgeführten Suchschritten nach (2) kleiner als 10^{-17} ...]

4. Diskussion

Das angesprochene Problem eignet sich m.E. sehr gut für eine Diskussion im Zusammenhang mit dem Computereinsatz in der Schule. Im Gegensatz zu bekannten Computer-Algebra-Systemen wie DERIVE, MATHEMATICA oder MAPLE müssen sich die Schüler hier ein problemorientiertes Lösungskonzept selbst überlegen, da keines der genannten Programme über geeignete Module verfügt, die hier direkt einsetzbar wären. [Eine theoretisch denkbare Auflistung aller 10! Permutationen in einem Feld oder einer Datei ist mit diesen Systemen zwar technisch möglich, aufgrund des riesigen Umfangs und der damit verbundenen Rechenzeit aber nicht praktikabel.] Hinzu kommt der denksportliche Ehrgeiz, eine Lösung der auf den ersten Blick vielleicht einfach erscheinenden Aufgabe zu finden und dabei noch der Rätsel-Redaktion eines großen Wochenmagazins Fehler nachzuweisen! Die benötigten Kenntnisse aus der Stochastik gehen dabei über elementare Kombinatorik bzw. die diskrete Gleichverteilung nicht hinaus, zeigen aber durchaus moderne Anwendungen der Stochastik auf, die vor allem in der Informatik und der Numerik zunehmend an Bedeutung gewinnen (Stichwort: Simulated Annealing, vgl. Mathar / Pfeifer (1990), Kapitel 3.3).

Eine kompilierte Fassung des Programms kann bei Interesse auch direkt von den Autoren per e-mail bezogen werden.

Literatur

Athen, H.; Griesel, H.; Postel, H. (1995): Mathematik heute. Leistungskurs Stochastik. Schroedel Schulbuchverlag, Hannover.

Baierlein, M.; Bath,F.; Greifenegger, U.; Krumbacher, G. (1984): Anschauliche Analysis II. Leistungskurs. Ehrenwirth Verlag, München.

Barth, F.; Haller, R. (1998): Stochastik Leistungskurs. Oldenbourg Verlag, München.

Canfield, E.R.; Williamson, S.G. (1995): A Loop-Free Algorithm for Generating the Linear Extensions of a Poset. Order 12 No.1, 57-75.

Engel, A. (1987): Stochastik. Ernst Klett Schulbuch-Verlag, Stuttgart.

Engel, A. (1991): Mathematisches Experimentieren mit dem PC. Ernst Klett Schulbuch-Verlag, Stuttgart.

Krengel, U. (2000): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Für Studium, Berufspraxis und Lehramt. 5. Aufl., Vieweg, Braunschweig und Wiesbaden.

Mathar, R.; Pfeifer, D. (1990): Stochastik für Informatiker. Leitfäden und Monographien der Informatik. Teubner, Stuttgart.

Pfanzagl, J. (1991): Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2. Aufl., Walter de Gruyter, Berlin.

Pruesse, G.; Ruskey, F. (1994): Generating Linear Extensions Fast, SIAM J. Comp. 23, 373-386.

Stern-Magazin Nr. 2 vom 4.1.2001, Gruner+Jahr AG&Co., Hamburg.

Anschriften der Verfasser:

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Fachbereich Mathematik
Postfach 2503
26111 Oldenburg
pfeifer@mathematik.uni-oldenburg.de

Dipl.-Math. Michael Naatz
Technische Universität Berlin
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin
naatz@math.tu-berlin.de