

## **Solvency II: neue Herausforderungen an Schadenmodellierung und Risikomanagement?**

Dietmar Pfeifer  
Institut für Mathematik  
Universität Oldenburg

erschienen in: Risikoforschung und Versicherung -  
Festschrift für Elmar Helten zum 65. Geburtstag, Ver-  
lag Versicherungswirtschaft (2004), 467 - 481.

### **I. Einleitung**

In den "Allgemeinen Überlegungen zur Form eines neuen EU-Aufsichtssystems" (kurz: "Solvency II"), die von der Europäischen Kommission, GD Binnenmarkt im März 2003 veröffentlicht wurden, finden sich einige grundsätzliche Ausführungen, die in Auszügen lauten:

"Das neue System soll den Aufsichtsbehörden geeignete qualitative und quantitative Werkzeuge zur Verfügung stellen, um die "Gesamtsolvabilität" eines Versicherungsunternehmens zu beurteilen. Dies bedeutet, dass das System nicht nur aus einer Reihe quantitativer Koeffizienten und Indikatoren bestehen sollte, sondern auch qualitative Aspekte einbeziehen sollte, die Einfluss auf die Risiko-Bonität eines Unternehmens haben (Management, interne Risikokontrolle, Wettbewerbslage usw.). Ein in diesem weiteren Sinne definiertes Solvabilitätssystem könnte auf einer an die Bedürfnisse der Versicherungsaufsicht angepassten Drei-Säulen-Struktur des Typs Basel aufbauen. Die Entscheidung für eine solche Struktur würde bedeuten, dass dem Zusammenspiel der verschiedenen Säulen der quantitativen und qualitativen Beaufsichtigung sowie der Rolle der Offenlegung besondere Aufmerksamkeit gewidmet wird. In Säule II wäre die Bedeutung der Überprüfung durch die Aufsichtsbehörden hervorzuheben. Die nachstehenden vorläufigen Empfehlungen der Kommissionsdienststellen orientieren sich an einer Drei-Säulen-Struktur. Das Solvabilitätssystem sollte die Versicherungsunternehmen ermutigen und ihnen Anreize dafür geben, ihre Risiken zu erfassen und einzudämmen. Hierzu sollten gemeinsame EU-Grundsätze für Risikoverwaltung und Überprüfung durch die Aufsichtsbehörden entwickelt werden. Darüber hinaus sollten die quantitativen Solvabilitätsvorschriften die wichtigsten Risiken einbeziehen, denen ein Versicherungsunternehmen ausgesetzt ist. Dieses auf die Risiken abgestimmte Konzept würde zur (teilweisen oder vollständigen) Anerkennung interner Modelle führen, sofern diese die Risikoverwaltung des Unternehmens verbessern und sein tatsächliches Risikoprofil besser wiedergeben als eine Standardformel."

Diese oben mehrfach angesprochenen "internen Modelle" sind aus Sicht der mathematischen Risikotheorie und aktuariellen Statistik besonders reizvoll, da sie aufgrund der hohen Komplexität und der zahlreichen gegenseitigen Abhängigkeiten und Verflechtungen der verschiedenen Einzelrisiken eines Versicherungsunternehmens auch theoretisch eine große Herausforderung bedeuten. In diesem Beitrag sollen deshalb einige Aspekte dieser neuen Aufgabenstellung aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet werden.

### **II. Geophysikalische Simulationsmodelle**

Insbesondere im Bereich der Elementargefahren Sturm, Hochwasser und Erdbeben nutzen große Erst- und Rückversicherer, aber zunehmend auch Rückversicherungsmakler und andere Consulting-Firmen professionelle Software-Werkzeuge, die möglichst realitätsgerecht eine Vielzahl verschiedener Szenarien generieren. Diese beruhen zwar in erster Linie auf historischen Datenbanken ("Historic Event Sets"); durch stochastische Perturbationen der hinterlegten geophysikalischen Parameter wie Windrichtung und Zugbahn, Windgeschwindigkeit, Sturmdauer usw. lassen sich hieraus aber leicht repräsentative virtuelle Szenarien generieren ("Stochastic Event Sets"), die mühelos 50000 und mehr Einträge umfassen können. Wählt

man unter diesen Szenarien diejenigen aus, die ein bestimmtes Versicherungsportfolio tangieren, lassen sich auf diese Weise in vitro viele Hundert oder Tausend Schadenjahre simulieren und so wichtige Informationen über die Einzel- wie Gesamtschadenverteilung erhalten. Diese Produkte bilden daher eine sehr sinnvolle Ergänzung zu den üblichen statistischen Analysen der in der Praxis doch eher kurzen Daten-Zeitreihen – typischerweise mit Zeiträumen zwischen 20 und 30 Jahren. Insofern entspricht diese Herangehensweise genau der Philosophie der von der Europäischen Kommission geforderten "internen Modelle".

Dennoch beruhen auch diese, der Absicht nach durchaus auf die individuellen Bedürfnisse eines Versicherungsunternehmens zugeschnittenen Modelle auf gewissen mathematischen Annahmen. Diese erleichtern zwar auf der einen Seite die notwendigen Berechnungen innerhalb des Modells, müssen aber vor allem mit Fortschreiten der mathematischen Theorie von Zeit zu Zeit hinterfragt werden. Dies betrifft im Augenblick vor allem die aktuelle Diskussion über die Möglichkeiten, stochastische Abhängigkeitsstrukturen in solche Modelle zu integrieren, die über die üblichen Parameter wie Korrelation oder Kovarianz hinausgehen.

Zum besseren Verständnis dieser Diskussion sollen hier zunächst die üblichen mathematischen Grundlagen der geophysikalischen Simulationsmodelle vorgestellt werden, vor allem auch darum, weil detaillierte Dokumentationen solcher Produkte nicht leicht zugänglich und auch nicht in letzter Konsequenz "mathematisch" sind (vgl. etwa DONG (2001), KHATER AND KUZAK (2002) oder KUZAK, CAMPBELL AND KHATER (2004)).

Die hier besprochenen Modelle beruhen alle auf einem klassischen "Grundmodell", dem so genannten kollektiven Modell der Risiko-Theorie, das folgendermaßen charakterisiert werden kann:

- Die Anzahl  $N$  der Schäden innerhalb einer bestimmten Periode ist eine nicht-negative, ganzzahlige Zufallsvariable. Die Einzelwahrscheinlichkeiten seien mit den Größen  $p_n = P(N = n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  bezeichnet.
- Die in dieser Periode anfallenden Einzelschadenhöhen  $X_1, X_2, \dots$  sind stochastisch unabhängige, identisch verteilte, *positive* Zufallsvariablen, die auch von  $N$  stochastisch unabhängig sind. Die zugehörige Verteilungsfunktion sei mit  $F$  bezeichnet.

Unter dem *Gesamtschaden* (für die betrachtete Periode) versteht man dann die Zufallsvariable

$$S := \sum_{k=1}^N X_k$$

mit der Konvention, dass die "leere Summe" als Null verstanden wird.

Die Verteilung des Gesamtschadens lässt sich damit auf folgende Weise ausdrücken:

Für die Verteilungsfunktion  $F_S$  des Gesamtschadens gilt:

$$P(S \leq z) = F_S(z) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n F^{n*}(z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Dabei bezeichne  $F^{n*}$  die  $n$ -fache Faltung von  $F$ , der Verteilungsfunktion der Einzelschadenhöhen. Ein Beweis dieser Beziehung ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
P(S \leq z) &= F_S(z) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{N = n\} \cap \left\{\sum_{k=1}^n X_k \leq z\right\}\right) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n P\left(\sum_{k=1}^n X_k \leq z\right) \\
&= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n F^{n*}(z), \quad z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

In den geophysikalischen Simulationsmodellen bildet nun jedes einzelne Szenario  $i$  ein solches kollektives Modell. Wenn dabei  $n$  die Anzahl der für das Portfolio relevanten Szenarien bezeichnet und wir mit  $N_1, N_2, \dots, N_n$  die als voneinander unabhängig angenommenen Ereignisfrequenzen sowie mit  $X_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $j \in \mathbb{N}$  die ebenfalls als unabhängig angenommenen positiven Einzelschadenhöhen bezeichnen, wobei alle  $X_{i\cdot}$  dieselbe Verteilung  $Q_i$  (die von  $i$  abhängen dürfen) besitzen mögen, so erhalten wir folgende Summenschäden:

$$\begin{aligned}
S_i &:= \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{Ereignis-Gesamtschaden, } \textit{Scenario Loss}) \\
S &:= \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij} \quad (\text{Jahres-Gesamtschaden, } \textit{Aggregate Loss}).
\end{aligned}$$

Eine ganz typische Grundannahme in solchen Modellen ist, dass die Frequenzen durch Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$  modelliert werden können. Der wesentliche Grund hierfür liegt darin, dass aufgrund eines wohlbekannten Satzes (vgl. HIPPE UND MICHEL (1990), Kapitel 1) der Jahres-Gesamtschaden dann aufgefasst werden kann als Summenschaden aus unabhängigen, identisch wie  $\tilde{X}$  verteilten Zufallsvariablen, die der Mischverteilung  $\tilde{Q} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\tilde{\lambda}} Q_i$  mit  $\tilde{\lambda} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  genügen, mit einer einzigen Frequenzvariablen

$N$ , die ihrerseits wieder Poisson-verteilt ist mit Parameter  $\tilde{\lambda}$ . Es ist damit möglich, das ursprünglich sehr viel komplexere Modell durch ein einfacheres, klassisches kollektives Modell der Risiko-Theorie darzustellen.

Neben dem jeweiligen Ereignis-Gesamtschaden ist in den geophysikalischen Modellen auch der Ereignis-*Maximalschaden*  $M_i := \max\{X_{ij} \mid 1 \leq j \leq N_i\}$  von Interesse (DONG (2001) und andere bezeichnen diesen unglücklicherweise mit *Occurrence Loss*, was bei Anwendern, die mathematisch weniger geübt sind, leicht zu Missverständnissen führen kann). Seine Verteilung kann in einem Poisson-Modell ebenfalls recht einfach berechnet werden. Allgemein gilt hier folgendes:

Im kollektiven Modell der Risikotheorie sei mit

$$M := \max\{X_i \mid 1 \leq i \leq N\}$$

der *Maximalschaden* bezeichnet. Dann gilt:

$$P(M \leq z) = F_M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^n(z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Ein einfacher Beweis dieser Beziehung ergibt sich durch

$$\begin{aligned} P(M \leq z) = F_M(z) &= P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{N = n\} \cap \{\max\{X_k \mid 1 \leq k \leq n\} \leq z\}\right) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq z\}\right) \\ &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n F^n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^n(z), \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Der Unterschied zwischen der Verteilung des Gesamt- und des Maximalschadens ist also lediglich der, dass im ersten Fall *Faltungspotenzen*, im zweiten Fall *gewöhnliche* Potenzen der Verteilungsfunktionen auftreten.

Für das Poisson-Modell, wo die Schadenfrequenz  $N$  Poisson-verteilt ist mit Parameter  $\lambda > 0$ , bedeutet dies gerade:

$$\begin{aligned} P(M \leq z) = F_M(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^n(z) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} F^n(z) = e^{-\lambda} \exp\{\lambda F(z)\} \\ &= e^{-\lambda\{1-F(z)\}} = e^{\lambda\{F(z)-1\}}, \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Für die geophysikalischen Simulationsmodelle bedeutet dies, dass der maximale Ereignisschaden  $M_i$  die folgende Verteilungsfunktion besitzt:

$$P(M_i \leq z) = F_{M_i}(z) = e^{-\lambda_i\{1-F_i(z)\}}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Hiermit lässt sich wegen der angenommenen Unabhängigkeit aller Einzelschäden sofort auch die Verteilungsfunktion des Jahres-Maximalschadens  $M = \max\{M_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  angeben:

$$\begin{aligned} P(M \leq z) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \{M_i \leq z\}\right) = \prod_{i=1}^n P(M_i \leq z) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i\{1-F_i(z)\}} = \exp\left\{-\sum_{i=1}^n [\lambda_i\{1-F_i(z)\}]\right\} \\ &= \exp\left\{-\tilde{\lambda}[1-\tilde{F}(z)]\right\}, \quad z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{F}(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\tilde{\lambda}} F_i(z), \quad z \in \mathbb{R}$$

die Verteilungsfunktion zur Mischverteilung  $\tilde{Q}$  bezeichnet.

In der Basisversion aller geophysikalischen Simulationsmodelle wird zunächst angenommen, dass die simulierten Schadenhöhen deterministisch sind, d.h. dass die Verteilungen  $Q_i$  Einpunktverteilungen mit Massen  $\varpi_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  darstellen. Für die nachfolgenden Überlegungen wollen wir o.B.d.A. annehmen, dass diese strikt der Größe nach geordnet sind, d.h. dass gilt

$$\varpi_1 < \varpi_2 < \dots < \varpi_n.$$

Es ist dann  $F_i(\varpi_k) = 1$  für  $1 \leq i \leq k$  und  $F_i(\varpi_k) = 0$  für  $i > k$ , so dass hieraus

$$P(\tilde{X} \leq \varpi_k) = \tilde{F}(\varpi_k) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\tilde{\lambda}} F_i(\varpi_k) = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\tilde{\lambda}}, \quad k = 1, \dots, n$$

folgt. Für die Verteilung des Jahres-Maximalschadens  $M$  bedeutet dies:

$$P(M > \varpi_k) = 1 - \exp\left\{-\tilde{\lambda}[1 - \tilde{F}(\varpi_k)]\right\} = 1 - \exp\left\{-\sum_{i=k+1}^n \lambda_i\right\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Die sich so ergebende Funktion wird in der geophysikalischen Modellierungswelt auch als OEP curve (Occurrence Loss Exceeding Probability) bezeichnet. Der Vorteil dieser Form der OEP curve besteht in ihrer Einfachheit, allerdings müssen dazu vorher die entsprechenden  $\varpi_i$  der Größe nach geordnet werden.

Für den Jahres-Gesamtschaden  $S$  erhält man für das geophysikalische Poisson-Modell entsprechend

$$P(S \leq z) = F_S(z) = e^{-\tilde{\lambda}} + e^{-\tilde{\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}^n}{n!} \tilde{F}^{n*}(z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Die sich hieraus ergebende Abbildung  $P(S > \varpi_k) = 1 - F_S(\varpi_k)$  für  $k = 1, \dots, n$  heißt analog AEP curve (Aggregate Loss Exceeding Probability) (vgl. DONG (2001), S. 16). Für die Berechnung der Faltungspotenzen gibt es geeignete Algorithmen, die meist auf einer geeigneten Diskretisierung der Schäden beruhen. Populär sind beispielsweise Rekursionsverfahren vom Panjer-Typ (vgl. HIPPE UND MICHEL (1990), Kapitel 3) oder die diskrete Fourier-Transformation (vgl. KLUGMAN ET AL. (1998)). Mit Hilfe moderner Computer-Algebra-Systeme kann man aber auch die zugehörigen wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen direkt in Potenzreihen mit "vielen" Termen entwickeln, so dass umständliche Rechnungen heutzutage nicht mehr nötig sind. Alternativ ist auch eine statistische Bestimmung der AEP curve mittels Monte-Carlo-Simulation möglich, indem eine große Zahl von zufälligen Beobachtungen aus dem Modell gezogen und die zugehörige *empirische Verteilung* bestimmt wird. Allerdings sind hier je nach Parameter-Situation bis zu einigen 100000 Stichproben notwendig.

Neben den bereits genannten Schadentypen ist zumindest prinzipiell auch der *Typical Loss* von Interesse, z.B. für Rückversicherungsverträge vom XL-Typ. Er entspricht einem zufällig ausgewählten unter den vielen Einzelschäden des Modells, den man mathematisch folgendermaßen definieren kann:

$$L := \sum_{k=1}^{\min\{N,1\}} \tilde{X}_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } N = 0 \\ \tilde{X}_1, & \text{falls } N > 0, \end{cases}$$

wobei die  $\tilde{X}_k$  Schäden aus der obigen Mischverteilung  $\tilde{Q}$  repräsentieren. Mit ähnlichen Überlegungen wie zuvor gelangt man auch hier zu Aussagen über die zugehörige Verteilung:

$$P^L = e^{-\tilde{\lambda}}\varepsilon_0 + (1 - e^{-\tilde{\lambda}})\tilde{Q} = e^{-\tilde{\lambda}}\varepsilon_0 + (1 - e^{-\tilde{\lambda}})\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\tilde{\lambda}} Q_i, \quad \text{mit } \tilde{\lambda} = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Dabei bezeichnet  $\varepsilon_0$  die Einpunkt-Verteilung im Nullpunkt. Die zugehörige Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$F_L(z) = P(L \leq z) = e^{-\tilde{\lambda}} + (1 - e^{-\tilde{\lambda}})\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\tilde{\lambda}} F_i(z) = e^{-\tilde{\lambda}} + (1 - e^{-\tilde{\lambda}})\tilde{F}(z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

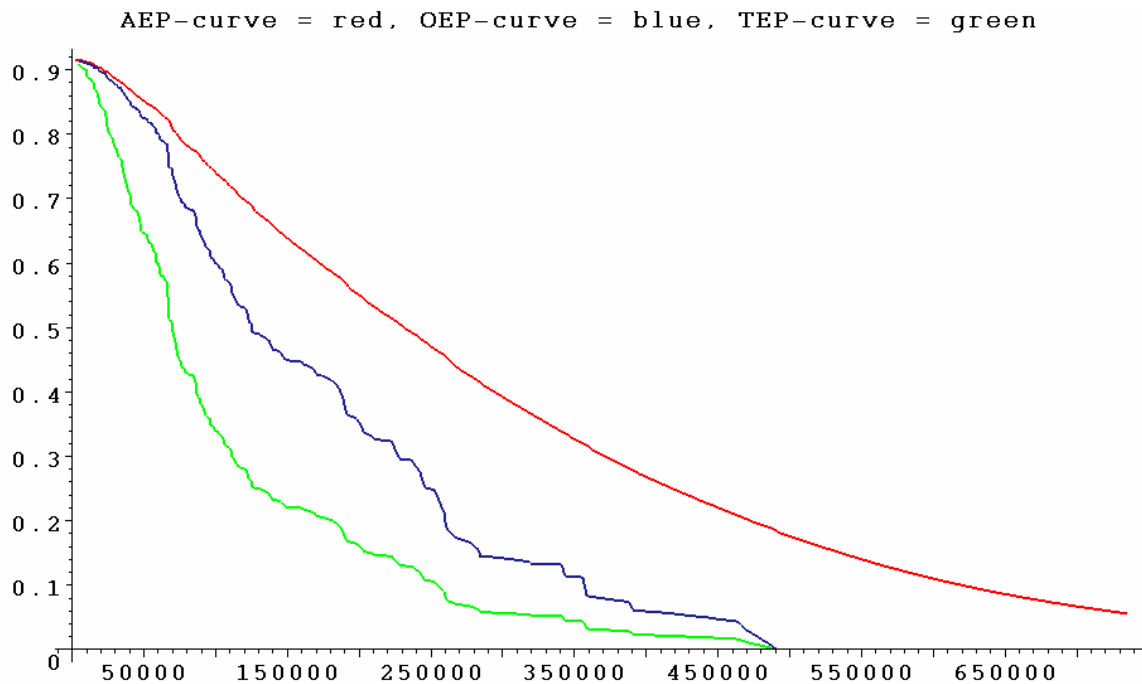
Die obigen Formeln zeigen, dass auch der Einbezug von so genannten secondary uncertainties, also der Berücksichtigung von tatsächlich zufälligen Einzelschäden, ausgedrückt durch die  $X_{i\cdot}$  bzw. durch  $\tilde{X}$ , nichts Wesentliches an der Darstellung ändert. Wir fassen diese allgemeineren Darstellungen hier noch einmal abschließend zusammen (vgl. DONG (2001), S. 46ff):

$$\begin{aligned}
 P(L > z) &= 1 - e^{-\tilde{\lambda}} - (1 - e^{-\tilde{\lambda}})\tilde{F}(z) = (1 - e^{-\tilde{\lambda}})\sum_{i=k+1}^n \frac{\lambda_i}{\tilde{\lambda}}, & \varpi_k \leq z < \varpi_{k+1} & \quad \text{(TEP-curve)} \\
 P(M > z) &= 1 - \exp\{-\tilde{\lambda}[1 - \tilde{F}(z)]\} = 1 - \exp\left\{-\sum_{i=k+1}^n \lambda_i\right\}, & \varpi_k \leq z < \varpi_{k+1} & \quad \text{(OEP-curve)} \\
 P(S > z) &= 1 - e^{-\tilde{\lambda}} - e^{-\tilde{\lambda}}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}^n}{k!} \tilde{F}^{n*}(z), & z \in \mathbb{R} & \quad \text{(AEP-curve)}.
 \end{aligned}$$

Hierbei ist wie oben

$$\tilde{\lambda} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{und} \quad \tilde{F}(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\tilde{\lambda}} F_i(z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Die folgende Graphik, die mit dem Computer-Algebra-System MAPLE erzeugt wurde, zeigt drei solcher Kurven für ein virtuelles Beispiel mit 300 Szenarien und  $\tilde{\lambda} = 2,465$ . Der maximale Einzelschaden beträgt hier  $\varpi_{300} = 489909$ . Für die Berechnung der AEP-curve wurde eine Diskretisierung der Schäden mit Schrittweite  $\Delta = 2500$  gewählt. Man beachte, dass alle Kurven mit einem Wert von  $1 - e^{-\tilde{\lambda}} = 0,915$  im Nullpunkt beginnen.



### III. Modellierung von Abhängigkeitsstrukturen

Die Grundannahme stochastischer Unabhängigkeiten bei Schadenfrequenzen und Schadenhöhen war lange Zeit Standard in der Risiko-Theorie. Allerdings zeigt die Praxis immer wieder, dass diese Annahme faktisch nicht gerechtfertigt ist. Statistisch nachweisbare Abhängigkeiten entstehen im Versicherungsbereich auf natürliche Weise etwa zwischen ähnlichen Sparten wie in der Hausrat- und Gebäudeversicherung, aufgrund räumlicher Benachbarkeit wie bei Hochwasser- und Sturmschäden oder durch gemeinsame auslösende Faktoren, z.B. klimatische Ereignisse in der Gebäudeversicherung bei Sturm- und/oder Hagelschäden. Lange Zeit wurde in Ermangelung anderer Konzepte – zumindest auf Seiten der Anwender – eine solche Abhängigkeit mit „Korrelation“ gleichgesetzt, zumal die ökonomische Theorie der Kapitalmärkte (Stichwort: CAPM – Capital Asset Pricing Model) strukturell linear ist und damit in Bezug auf die Modellierung des Zufalls der Welt der Normalverteilung offen steht. Bekanntlich ist eine mehrdimensionale Normalverteilung – in Zeichen:  $N(\mu, \Sigma)$  – charakterisiert durch ihren Erwartungswertvektor  $\mu$  und ihre Varianz-Kovarianzmatrix  $\Sigma = [\sigma_{ij}]$ , welche ihrerseits mit der Korrelationsmatrix  $K = [\rho_{ij}]$  in Zusammenhang steht über die Beziehung

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii} \cdot \sigma_{jj}}}$$

Die Angabe des Erwartungswertvektors  $\mu$  sowie der paarweisen Korrelationen  $\rho_{ij}$  zwischen den Risiken  $i$  und  $j$ , zusammen mit deren Einzelvarianzen legt also unter Normalverteilungsannahme die gemeinsame Verteilung aller Risiken eindeutig fest. In jüngerer Zeit wird jedoch von verschiedenen Autoren immer wieder darauf hingewiesen, dass der Rückzug auf die "Korrelation" trügerisch ist und nicht nur im Finanzsektor, sondern auch in versicherungstechnischen Anwendungen zu krassen Fehlern führen kann (vgl. BLUM, DIAS AND EMBRECHTS (2002), EMBRECHTS, STRAUMANN AND MCNEIL (2000) oder EMBRECHTS, MCNEIL AND STRAUMANN (2002)), vor allem dann, wenn eine Normalverteilungsannahme für die Einzelrisiken nicht gerechtfertigt ist. Insbesondere im Bereich der schon angesprochenen Großschäden ist die Betrachtung strukturell anderer Abhängigkeitsmaße als die Korrelation

angezeigt und möglich. Beispiele für Diskrepanzen in diesem Bereich findet man außer in den gerade genannten Quellen z.B. auch in PFEIFER (2003).

Eine elegante Möglichkeit, um das Problem stochastischer Abhängigkeiten mathematisch allgemeiner zu behandeln, liegt in dem Konzept der *Copula*, auf dem praktisch alle zur Zeit verfolgten Ansätze zur Modellierung multivariater Risiken fußen. Die Grundidee ist einfach und beruht auf einer geschickten Trennung der Randverteilungsproblematik von der Abhängigkeitsstruktur. Sind die  $n$  Einzelrisiken  $X_i$  nämlich stetig verteilt, so kann man diese durch Transformation mit der zugehörigen (Rand-)Verteilungsfunktion  $F_i$  in Zufallsgrößen  $Y_i = F_i(X_i)$  überführen, die dadurch über dem Intervall  $[0,1]$  stetig gleichverteilt sind. Die ursprüngliche Abhängigkeitsstruktur lässt sich dann eindeutig durch die gemeinsame Verteilungsfunktion  $C$  der  $Y_i$  rekonstruieren:

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \text{ für alle } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Die Verteilungsfunktion  $C$  der transformierten Risiken ist gerade die zugehörige Copula. Ihre wesentlichen Vorteile liegen auf der Hand:

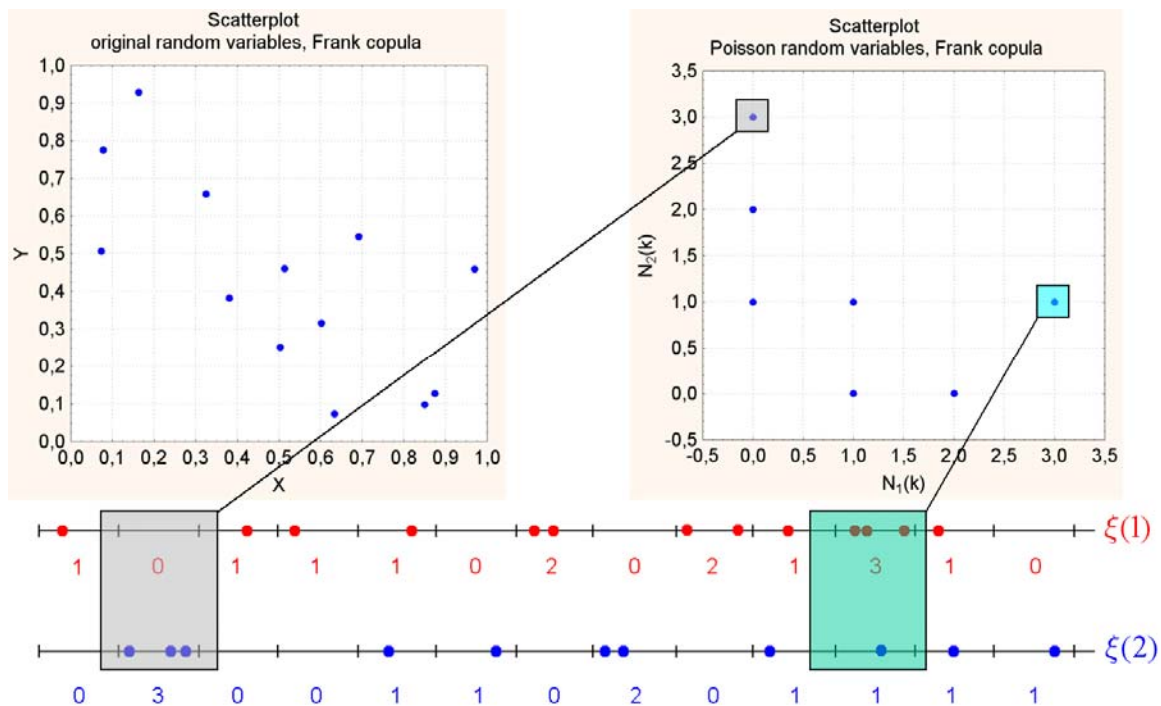
- Die Copula hängt nicht von den Randverteilungen der Einzelrisiken ab.
- Die Copula charakterisiert bei Stetigkeit der Randverteilungen die gemeinsame Abhängigkeitsstruktur der Einzelrisiken eindeutig.
- Die Copula ist invariant gegen alle monotonen Transformationen der Einzelrisiken, insbesondere nichtlineare.
- Paarweise Korrelationen zwischen den Einzelrisiken können über die Copula ausgedrückt werden, aber nicht umgekehrt.

Für weitere Details sei hier auf die obigen Quellen oder die Übersichtarbeit von PFEIFER UND NESLEHOVA [2] (2004) verweisen.

Während für die Situation, in der die involvierten Zufallsvariablen stetige Verteilungsfunktionen besitzen, die Copula eindeutig bestimmt ist, entstehen in einem diskreten Umfeld leider unangenehme Komplikationen. Diese Tatsache rückt erst in jüngerer Zeit in das Bewusstsein der mathematischen Forschung und ist z.B. gerade in der Dissertation von NESLEHOVA (2004) ausgiebig untersucht worden. Das Thema ist in Bezug auf den obigen zweiten Abschnitt deshalb von Interesse, weil das dort zu Grunde liegende Poisson-Modell mit den typischen, massiven Unabhängigkeitsannahmen sicher dann zu hinterfragen ist, wenn viele artverwandte Szenarios, die z.B. aus demselben historischen Datensatz generiert wurden, oder in größerem Umfang benachbarte betroffene Gebäude im betrachteten Portfolio enthalten sind. Es stellt sich dann die Frage, wie z.B. Abhängigkeiten zwischen den Frequenzen modelliert werden können, und das führt zwangsläufig zu einer diskreten Situation mit den angedeuteten Schwierigkeiten. Dabei sind aber auch gegenteilige Effekte, die einen Ausgleich im Kollektiv bewirken und daher Risiko-mindernd wirken können, zu beachten. Solche Effekte können in geophysikalischen Modellen z.B. dann eintreten, wenn sich gewisse Szenarios gegenseitig ausschließen, z.B. Stürme aufgrund ihrer räumlichen oder klimatischen Entstehungsgeschichte. Neue Ansätze, die außer in der genannten Dissertation auch in der Arbeit von PFEIFER UND NESLEHOVA [1] (2004) zu finden sind, beruhen in diesem Zusammenhang auf einem Punktprozess-Zugang (vgl. KINGMAN (1993)), der einige der Schwierigkeiten der klassischen Risiko-Theorie, die hier meist mit Stochastischen Prozessen in der Zeit arbeitet (vgl. ROLSKI ET AL. (1998)), überwinden hilft. Die folgende Darstellung ist der Arbeit von PFEIFER UND NES-



LEHOVA [1] (2004) entnommen und soll verdeutlichen, wie über geeignete Copula-Modelle z.B. Schadenzahl-Prozesse gekoppelt werden können, die Risiko-mindernde Effekte besitzen.



Die Schadenzahl-Prozesse  $\xi(1)$  und  $\xi(2)$  werden hier über Poisson-verteilte Zufallsvariablen, die in diesem Beispiel aus einer Frank-Copula mit starker negativer Abhängigkeitsstruktur stammen, als Punktprozesse modelliert. Ein Intervall entspricht hier einem Zeitraum von einem Jahr; die Punkte auf der Zeitachse entsprechen dabei den Zeitpunkten, zu denen Schäden, z.B. aus Stürmen unterschiedlicher Szenarien, entstehen. Es ist deutlich an den hervorgehobenen "Zeitfenstern" sichtbar, dass hohe Frequenzen des einen Prozesses mit niedrigen Frequenzen des anderen Prozesses einhergehen und umgekehrt, also der Risiko-mindernde Effekt in der Modellierung gut zum Ausdruck kommt.

#### IV Zusammenfassung und Ausblick

Die neuen Solvabilitätsvorschriften der Europäischen Kommission werden in Zukunft erhöhte Anforderungen an die Entwicklung und Pflege von "internen Modellen" stellen, die zur Bewertung der komplexen Risiken von Versicherungsunternehmen geeignet sind und von den Aufsichtsbehörden auch als adäquate Instrumente zugelassen werden. Die vorigen Ausführungen zeigen, dass Werkzeuge, die schon heute vielfach in der DFA (Dynamic Financial Analysis) oder in einem IRM (Integrated Risk Management) – zumindest im Sachversicherungsbereich – eingesetzt werden, zwar den individuellen Bedürfnissen an eine unternehmensgerechte Risiko-Modellierung Rechnung tragen, aber aus mathematischer Sicht noch nicht optimal funktionieren, weil die modellmäßige Abbildung der Verflechtungen aller Unternehmens-Risiken, auch in Bezug auf den Kapitalmarkt, noch nicht ausreichend gut theoretisch untermauert ist. Hier besteht in nächster Zukunft noch erhöhter Forschungsbedarf.

## Literatur

- BLUM, P., DIAS, A. AND EMBRECHTS, P. (2002): *The ART of dependence modelling: the latest advances in correlation analysis*. In: M. Lane (ed.): *Alternative Risk Strategies*, Risk Books, London, 339 – 356.
- DONG, W. (2001): *Building a More Profitable Portfolio*. Modern Portfolio Theory with Application to Catastrophe Insurance. Reactions Publishing Group, London.
- EMBRECHTS, P., STRAUMANN, D. AND MCNEIL, A.J. (2000): *Correlation: pitfalls and alternatives*. In: P. Embrechts (ed.): *Extremes and Integrated Risk Management*. Risk Books, London, 71 – 76.
- EMBRECHTS, P., MCNEIL, A.J. AND STRAUMANN, D. (2002): *Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls*. In: M.A.H. Dempster (ed.): *Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 176 – 223.
- HIPP, CH. UND MICHEL, R. (1990): *Risikotheorie: Stochastische Modelle und Statistische Methoden*. Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Verlag VVW. Karlsruhe.
- KHATER, M. AND KUZAK, D.E. (2002): *Natural catastrophe loss modelling*. In: *Alternative Risk Strategies*, M. Lane, Ed. RISK Books, London, 271 – 299.
- KINGMAN, J.F.C. (1993): *Poisson Processes*. Oxford Science Publications, Oxford.
- KLUGMAN, S.A., PANJER, H.H. AND WILLMOT, G.E. (1998): *Loss Models*. From Data to Decisions. Wiley, New York.
- KUZAK, D.E., CAMPBELL, K. AND KHATER, M. (2004): *The use of probabilistic earthquake risk models for managing earthquake insurance risks: example for Turkey*. In: *Catastrophe Risk and Reinsurance: A Country Risk Management Perspective*, E.N. Gurenko, Ed. RISK Books, London, 41 – 64.
- NESLEHOVA, J. (2004): *Dependence Concepts for Non-Continuous Random Variables*. Dissertation, Universität Oldenburg.
- PFEIFER, D. (2003): *Möglichkeiten und Grenzen der mathematischen Schadenmodellierung*. Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Heft 4, 667 – 696.
- PFEIFER, D. AND NESLEHOVA, J. [1] (2004): *Modeling and generating dependent risk processes for IRM and DFA*. ASTIN Bulletin Vol. 34, No. 2, 333 – 360.
- PFEIFER, D. AND NESLEHOVA, J. [2] (2004): *Modeling dependence in finance and insurance: the copula approach*. Blätter der DGVFM Band XXVI, Heft 2, 177 – 191.
- ROLSKI, T., SCHMIDLI, H., SCHMIDT, V. AND TEUGELS, J. (1998): *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley, New York.