Strichlisten bei Laplace-Experimenten – zum Paradox der ungleichmäßigen Verteilung

DIETMAR PFEIFER, OLDENBURG

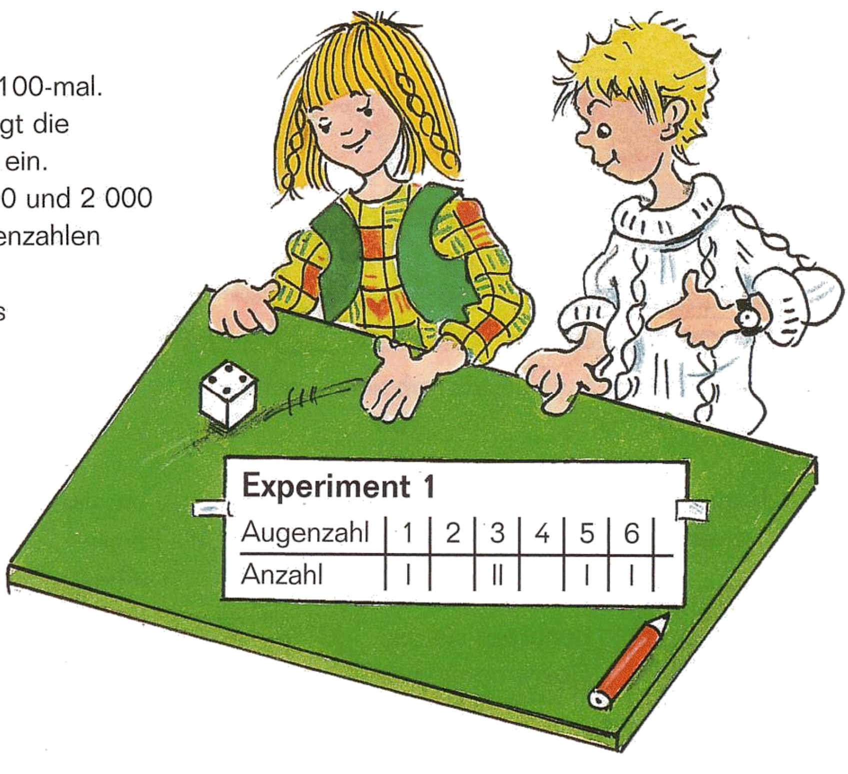
Zusammenfassung: *Das Themengebiet „Zufall und Wahrscheinlichkeit“ wird auf elementarem Niveau inzwischen bereits in der Grundschule behandelt. Dabei stehen experimentelle Aufgaben wie wiederholtes Werfen eines Würfels oder das Ziehen aus Dosen mit Kugeln unterschiedlicher Farbe im Vordergrund, meist in Verbindung mit der Erfassung der Ergebnisse in Strichlisten. Bei Laplace-Experimenten wie dem wiederholten Würfelwurf herrscht dabei – motiviert durch das Gesetz der großen Zahlen – intuitiv die Vorstellung, dass sich die Zählergebnisse in den Strichlisten einigermaßen „gleichmäßig“ verteilen. Dies ist aber paradoxerweise nicht so, wie in dem vorliegenden Beitrag gezeigt werden soll.*

1. Das Problem und seine Herkunft

In dem letzten Kapitel *Zufall und Wahrscheinlichkeit* des neuen Unterrichtswerks **Mathebaum 4** findet sich im einführenden Abschnitt *Zufallsexperimente* die folgende Aufgabe:

Betrachtet man die einzelnen Augenzahl-Listen separat, so ist klar, dass die Anzahl der Striche in jeder solchen Liste einer $\mathcal{B}(n,p)$-Binomialverteilung genügt mit $n=100$ und $p=1/6$, woraus sich eine erwartete Strich-Anzahl von $n \cdot p = 100/6 = 16,\overline{6}$ ergibt. Bekanntlich liegt der maximale Wert der zugehörigen Elementarwahrscheinlichkeiten bei $[(n+1)p]$ (abgerundeter Wert), wenn $(n+1)p$ nicht ganzzahlig ist (vgl. BARTH UND HALLER (1998), Satz 245.1). In dem hier betrachteten konkreten Beispiel liegt dieser Wert bei 16. Es ist also nahe liegend, zu vermuten, dass sich die Striche in den Augenzahl-Listen um diesen Wert herum einpendeln werden. Dies ist auch der Hintergrund des Frageteils b). Allerdings werden die Schüler bei der Durchführung des Experiments enttäuscht werden, denn diese idealisierte gleichmäßige Verteilung wird sich bei 100 vorgegebenen Wurfwiederholungen mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit gerade *nicht* einstellen. Rückfragen bei der Lehrkraft werden hier vermutlich keine Klarheit bringen und eher für Verwirrung auf allen Seiten sorgen.

a) Maren und Lukas würfeln 100-mal. Macht es genauso und tragt die Ergebnisse in eine Tabelle ein.
b) Vermutet, wie oft bei 1 000 und 2 000 Würfen die einzelnen Augenzahlen ungefähr erreicht werden.
c) Addiert die Ergebnisse aus euren Gruppen und prüft die Vermutung.



Dass es sich bei diesem eigenartigen Phänomen nicht um eine „zufällige“ Erscheinung, sondern um einen systematischen Effekt handelt, soll im Folgenden näher erläutert werden.

2. Strichlisten bei Laplace-Experimenten

Wir beschreiben sogleich die allgemeine Situation, die sich folgendermaßen darstellt: ein Laplace-Experiment mit m gleichwahrscheinlichen Ausgängen werde n mal unabhängig wiederholt. Die Zufallsvariable $Z_{n,k}$ zähle dabei, wie häufig der Versuchsausgang k beobachtet wird. Dann genügt jedes $Z_{n,k}$ einer $\mathcal{B}(n,1/m)$-Binomialverteilung, genauer:

$$P\left(Z_{n,k}=i\right)=\binom{n}{i}\frac{(m-1)^{n-i}}{m^n}\ \text{ für } i=0,\cdots,n.$$

Die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors $\mathbf{Z}_n=\left(Z_{n,1},\cdots,Z_{n,m}\right)$ ist dagegen etwas komplizierter; wir erhalten hier eine so genannte *Multinomialverteilung* $\mathcal{M}(n;\underbrace{1/m,\cdots,1/m}_{m-\text{mal}})$ mit den zugehörigen Elementarwahrscheinlichkeiten

$$P\left(\mathbf{Z}_n=\left(i_1,\cdots,i_m\right)\right)=\frac{\binom{n}{i_1,\cdots,i_m}}{m^n}$$

für $i_1,\cdots,i_m\in\{0,\cdots,n\}$ mit $\sum_{j=1}^{m} i_j=n.$ Dabei bezeichnet $\binom{n}{i_1,\cdots,i_m}=\frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}$ den so genannten *Multinomialkoeffizienten*; er gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, wie man n unterscheidbare Objekte auf m Fächer so verteilen kann, dass im j-ten Fach genau i_j Objekte zu liegen kommen. Für $m=2$ erhält man dabei wegen $i_1+i_2=n$ den bekannten Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{i_1,i_2}=\frac{n!}{i_1!i_2!}=\frac{n!}{i_1!(n-i_1)!}=\binom{n}{i_1}=\binom{n}{i_2}$$

zurück. Eine weitere leicht zu verifizierende Darstellungsmöglichkeit für Multinomialkoeffizienten ist

$$\binom{n}{i_1,\cdots,i_m}=\prod_{j=1}^{m}\binom{n-\sum_{k=0}^{j-1} i_k}{i_j}\ \text{ mit } i_0=0.$$

Dies lässt sich kombinatorisch auch folgendermaßen begründen: aus den n Objekten werden zunächst i_1 ohne Zurücklegen gezogen und in das erste Fach gelegt; das geht auf $\binom{n}{i_1}$ Weisen. Es verbleiben $n-i_1$ Objekte; aus denen werden i_2 ohne Zurücklegen gezogen und in das zweite Fach gelegt; das geht auf $\binom{n-i_1}{i_2}$ Weisen usw.

Eine ausführliche Diskussion von Multinomialkoeffizienten und der zugehörigen Multinomialverteilung findet man z.B. in HENZE (2003), S. 149ff.

Für das Ausgangsproblem bedeutet dies also: die gemeinsame Strichliste $\mathbf{Z}_{100}$ beim 100-fachen Würfelwurf ist $\mathcal{M}(100;1/6,\cdots,1/6)$-verteilt, d.h. es gilt

$$P\left(\mathbf{Z}_{100}=\left(i_1,\cdots,i_6\right)\right)=\frac{\binom{100}{i_1,\cdots,i_6}}{6^{100}}$$

für $i_1,\cdots,i_6\in\{0,\cdots,100\}$ mit $\sum_{j=1}^{6} i_j=100.$

3. Das Paradox der ungleichmäßigen Verteilung

Ähnlich wie bei der Ziehung der Lottozahlen stellen wir uns nun vor, dass die Anzahlen der einzelnen Augen-Strichlisten der Größe nach sortiert werden. Den resultierende Zufallsvektor bezeichnen wir gleich allgemeiner mit $\mathbf{S}_n=\left(S_{n,1},\cdots,S_{n,m}\right)$. Mit einem Argument ähnlich dem obigen erhalten wir dann als Verteilung von $\mathbf{S}_n$ den Ausdruck

$$P\left(\mathbf{S}_n=(i_1,\cdots,i_m)\right)=\frac{\binom{n}{i_1,\cdots,i_m}\times\binom{m}{r_1,\cdots,r_m}}{m^n}$$

für alle *angeordneten* m-Tupel $(i_1,\cdots,i_m)$ mit $i_1\le\cdots\le i_m$ und $\sum_{j=1}^{m} i_j=n,$ wobei hier noch die r_ℓ angeben, wie oft die Zahl i_ℓ in dem Tupel $(i_1,\cdots,i_m)$ vorkommt (also die Vielfachheiten von i_ℓ angeben). Es gibt nämlich gerade $\binom{m}{r_1,\cdots,r_m}$ Möglichkeiten, aus der sortierten Strichliste $\mathbf{S}_n$ alle möglichen (unsortierten) Strichlisten $\mathbf{Z}_n$ mit denselben Einträgen zu erzeugen.

Damit hat bei dem ursprünglichen Problem die der gleichmäßigen Verteilung am nächsten liegende (der Größe nach) sortierte Strichliste (16,16,17,17,17,17) die Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\mathbf{S}_{100}=(16,16,17,17,17,17)\right)$$

$$=\frac{\binom{100}{16,16,17,17,17,17}\times\binom{6}{2,4}}{6^{100}}=0{,}00030581,$$

d.h. in 10 000 Experimentwiederholungen mit je 100 Würfelwürfen tritt dieser „ideale“ Fall (d.h. die Strichliste enthält nur die Einträge 16 und 17) durchschnittlich etwa **nur 3 mal** auf!

Wir betrachten nun zunächst die so genannte *Spannweite* D_n der Strichliste, d.h. die Differenz aus dem größten und kleinsten Eintrag, also die Zufallsvariable

$$D_n=\max_{1\le k\le m}\left\{Z_{n,k}\right\}-\min_{1\le k\le m}\left\{Z_{n,k}\right\}=S_{n,m}-S_{n,1}.$$

Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung kann explizit berechnet werden, nämlich vermöge

$$P\left(D_n=d\right)=\sum_{(i_1,\cdots,i_m)\in I_n(d)} P\left(\mathbf{S}_n=(i_1,\cdots,i_m)\right)$$

$$=\frac{1}{m^n}\sum_{(i_1,\cdots,i_m)\in I_n(d)}\binom{n}{i_1,\cdots,i_m}\times\binom{m}{r_1,\cdots,r_m}$$

für $d=0,\cdots,n$ mit der von d abhängigen Indexmenge

$$I_n(d)=\Big\{(i_1,\cdots,i_m)\,\big|\,0\le i_1\le\cdots\le i_m\le n,$$
$$i_m-i_1=d,\ \sum_{j=1}^{m} i_j=n\Big\}.$$

In dieser Indexmenge sind also alle angeordneten Strichlisten-Ergebnisse enthalten, deren Spannweite gerade d beträgt. Die Struktur dieser Indexmenge ist sehr komplex; man kann aber mit Hilfe des Computers eine Liste mit allen Elementen der jeweiligen Indexmenge sowie der Vielfachheiten ihrer Einträge erzeugen und anschließend z.B. mit EXCEL die Elementarwahrscheinlichkeiten $P\left(D_n=d\right)$ numerisch berechnen, weil EXCEL die Berechnung von Multinomialkoeffizienten über die interne Funktion POLYNOMIAL erlaubt.

Die nachfolgende Tabelle zeigt ein Teilergebnis für das Anfangsbeispiel mit $n=100$ und $m=6.$ Man beachte, dass hier $P\left(D_n=0\right)=0$ gilt, weil keine Strichliste mit lauter gleichen Einträgen existiert.

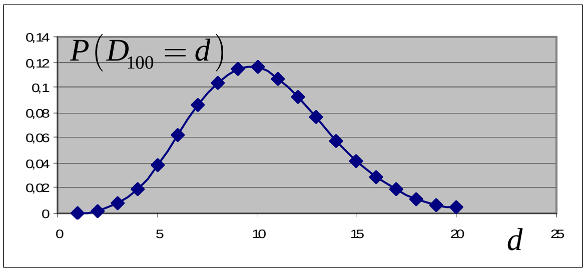
$(i_1,\cdots,i_6)$						d	$(r_1,\cdots,r_6)$						$P\left(\mathbf{S}_{100}=(i_1,\cdots,i_6)\right)$
16	16	17	17	17	17	1	2	4	0	0	0	0	0,00030581
15	17	17	17	17	17	2	1	5	0	0	0	0	0,00011513
16	16	16	16	18	18	2	4	2	0	0	0	0	0,00027278
16	16	16	17	17	18	2	3	2	1	0	0	0	0,00115530
15	15	16	18	18	18	3	2	1	3	0	0	0	0,00091283
15	15	17	17	18	18	3	2	2	2	0	0	0	0,00144978
15	16	16	17	18	18	3	1	2	1	2	0	0	0,00308079
15	16	17	17	17	18	3	1	1	3	1	0	0	0,00217467
16	16	16	16	17	19	3	4	1	1	0	0	0	0,00051684

$(i_1,\cdots,i_6)$						d	$(r_1,\cdots,r_6)$						$P(\mathbf{S}_{100}=(i_1,\cdots,i_6))$
14	14	18	18	18	18	4	2	4	0	0	0	0	0,00016780
14	15	17	18	18	18	4	1	1	1	3	0	0	0,00161087
14	16	16	18	18	18	4	1	2	3	0	0	0	0,00085577
14	16	17	17	18	18	4	1	1	2	2	0	0	0,00271834
14	17	17	17	17	18	4	1	4	1	0	0	0	0,00047971
15	15	15	17	19	19	4	3	1	2	0	0	0	0,00072824
15	15	15	18	18	19	4	3	2	1	0	0	0	0,00076870
15	15	16	16	19	19	4	2	2	2	0	0	0	0,00116063
15	15	16	17	18	19	4	2	1	1	1	1	0	0,00518870
15	15	17	17	17	19	4	2	3	1	0	0	0	0,00091565
15	16	16	16	18	19	4	1	3	1	1	0	0	0,00183766
15	16	16	17	17	19	4	1	2	2	1	0	0	0,00291864
16	16	16	16	16	20	4	5	1	0	0	0	0	0,00008786
13	15	18	18	18	18	5	1	1	4	0	0	0	0,00031322
13	16	17	18	18	18	5	1	1	1	3	0	0	0,00140951
13	17	17	17	18	18	5	1	3	2	0	0	0	0,00074621
14	14	15	19	19	19	5	2	1	3	0	0	0	0,00047910
14	14	16	18	19	19	5	2	1	1	2	0	0	0,00170681
14	14	17	17	19	19	5	2	2	2	0	0	0	0,00090360
14	14	17	18	18	19	5	2	1	2	1	0	0	0,00190761
14	15	15	18	19	19	5	1	2	1	2	0	0	0,00182059
14	15	16	17	19	19	5	1	1	1	1	2	0	0,00409634
14	15	16	18	18	19	5	1	1	1	2	1	0	0,00432391
14	15	17	17	18	19	5	1	1	2	1	1	0	0,00457826
14	16	16	16	19	19	5	1	3	2	0	0	0	0,00072539
14	16	16	17	18	19	5	1	2	1	1	1	0	0,00486440
14	16	17	17	17	19	5	1	1	3	1	0	0	0,00171685
15	15	15	15	20	20	5	4	2	0	0	0	0	0,00012380
15	15	15	16	19	20	5	3	1	1	1	0	0	0,00123800
15	15	15	17	18	20	5	3	1	1	1	0	0	0,00138365
15	15	16	16	18	20	5	2	2	1	1	0	0	0,00220520
15	15	16	17	17	20	5	2	1	2	1	0	0	0,00233491
15	16	16	16	17	20	5	1	3	1	1	0	0	0,00165390
12	16	18	18	18	18	6	1	1	4	0	0	0	0,00025449
12	17	17	18	18	18	6	1	2	3	0	0	0	0,00053893
13	13	17	19	19	19	6	2	1	3	0	0	0	0,00034524
13	13	18	18	19	19	6	2	2	2	0	0	0	0,00054662
13	14	16	19	19	19	6	1	1	1	3	0	0	0,00083843
13	14	17	18	19	19	6	1	1	1	1	2	0	0,00281121
13	14	18	18	18	19	6	1	1	3	1	0	0	0,00098913
13	15	15	19	19	19	6	1	2	3	0	0	0	0,00044716
13	15	16	18	19	19	6	1	1	1	1	2	0	0,00318604
13	15	17	17	19	19	6	1	1	2	2	0	0	0,00168673
13	15	17	18	18	19	6	1	1	1	2	1	0	0,00356087
13	16	16	17	19	19	6	1	2	1	2	0	0	0,00179215
13	16	16	18	18	19	6	1	2	2	1	0	0	0,00189171
13	16	17	17	18	19	6	1	1	2	1	1	0	0,00400598
13	17	17	17	17	19	6	1	4	1	0	0	0	0,00035347
14	14	14	18	20	20	6	3	1	2	0	0	0	0,00034136
14	14	14	19	19	20	6	3	2	1	0	0	0	0,00035933
14	14	15	17	20	20	6	2	1	1	2	0	0	0,00122890
14	14	15	18	19	20	6	2	1	1	1	1	0	0,00273089
14	14	16	16	20	20	6	2	2	2	0	0	0	0,00065285
14	14	16	17	19	20	6	2	1	1	1	1	0	0,00307225
14	14	16	18	18	20	6	2	1	2	1	0	0	0,00162147
14	14	17	17	18	20	6	2	2	1	1	0	0	0,00171685
14	15	15	16	20	20	6	1	2	1	2	0	0	0,00139275
14	15	15	17	19	20	6	1	2	1	1	1	0	0,00327707
14	15	15	18	18	20	6	1	2	2	1	0	0	0,00172957
14	15	16	16	19	20	6	1	1	2	1	1	0	0,00348189
14	15	16	17	18	20	6	1	1	1	1	1	1	0,00778304
14	15	17	17	17	20	6	1	1	3	1	0	0	0,00137348
14	16	16	16	18	20	6	1	3	1	1	0	0	0,00137825
14	16	16	17	17	20	6	1	2	2	1	0	0	0,00218898
15	15	15	15	19	21	6	4	1	1	0	0	0	0,00023581
15	15	15	16	18	21	6	3	1	1	1	0	0	0,00112010
15	15	15	17	17	21	6	3	2	1	0	0	0	0,00059299
15	15	16	16	17	21	6	2	2	1	1	0	0	0,00189017
15	16	16	16	16	21	6	1	4	1	0	0	0	0,00033472

Man sieht, dass die Anzahl der Elemente der jeweiligen Indexmenge rasch sehr groß wird.

Bei der Berechnung der r_ℓ wurde der Vektor rechts mit Nullen aufgefüllt. Das ist für die Berechnung der Multinomialkoeffizienten aber unerheblich, weil ja bekanntlich $0! = 1$ gilt. Durch Addition der Wahrscheinlichkeiten der rechten Spalte für gleiches d erhält man nun folgendes Ergebnis.

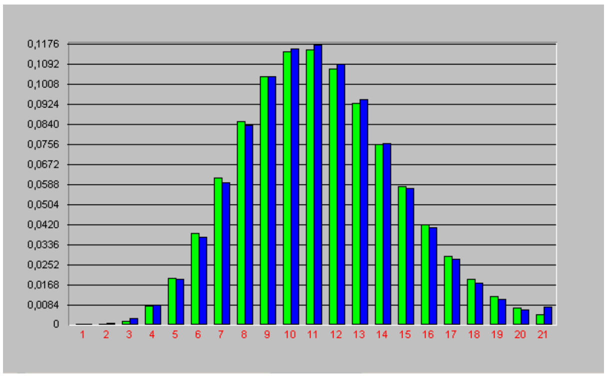
d	$P(D_{100}=d)$
1	0,00030581
2	0,00154320
3	0,00813491
4	0,01943857
5	0,03853128
6	0,06175089
7	0,08517289
8	0,10395412
9	0,11454865
10	0,11535623
11	0,10737030
12	0,09306211
13	0,07558743
14	0,05783678
15	0,04187631
16	0,02880286
17	0,01888534
18	0,01184103
19	0,00711923
20	0,00411445



Erstaunlicherweise wird die Wahrscheinlichkeit $P(D_{100}=d)$ maximal bei $d=10$, d.h. „am häufigsten" ergeben sich hier Strichlisten, bei denen die Spannweite 10 beträgt! Durch Addition der obigen Wahrscheinlichkeiten sieht man noch, dass $P(D_{100}\geq 10)>0,55$ ist, d.h. in durchschnittlich mehr als jedem zweiten Experiment beträgt die Spannweite mindestens 10!

Die Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung von D_{100} erinnert stark an die Normalverteilung. Sie ist aber nicht ganz symmetrisch; mit einem Statistik-Programm kann man noch eine gute Anpassung an eine negative Binomialverteilung nachweisen.

Die nachfolgende Graphik zeigt die Elementarwahrscheinlichkeiten für die exakte Verteilung von D_{100} (in grün) im Vergleich zu denen einer negativen Binomialverteilung $\mathcal{NB}(\beta.p)$ mit den Parametern $\beta=87,3841$ und $p=0,8948$ (in blau).



Die Elementarwahrscheinlichkeiten einer $\mathcal{NB}(\beta.p)$ -Verteilung sind dabei gegeben durch

$$\mathcal{NB}(\beta.p;k)=\binom{\beta+k-1}{k}p^{\beta}(1-p)^{k},\ k=0,1,2,\cdots$$

mit dem verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{\beta+k-1}{k}=\frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\cdots\beta}{k!},\ k=0,1,2,\cdots$$

Diese Verteilung besitzt den Erwartungswert $\beta\frac{1-p}{p}$ und die Varianz $\beta\frac{1-p}{p^2}$; für $\beta=1$ erhält man die bekannte *geometrische Verteilung*, die im Zusammenhang mit Wartezeitexperimenten auftritt (vgl. BARTH UND HALLER (1998), Aufgabe 22, S. 226).

Auf ähnliche Weise lässt sich auch die Verteilung des größten und kleinsten Eintrags in der Strichliste ermitteln; man muss dazu nur die obige Indexmenge $I_n(d)$ ersetzen durch die Indexmenge

$$J_n(u)=\left\{(i_1,\cdots,i_m)\,|\,0\leq i_1\leq\cdots\leq i_m=u,\sum_{j=1}^{m}i_j=n\right\}$$

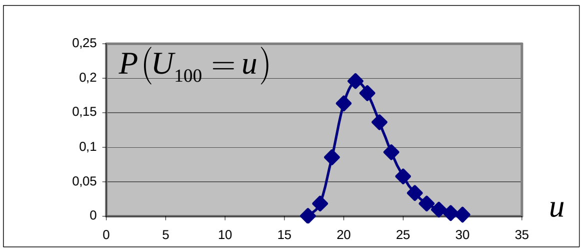
für das Maximum $U_n = \max\limits_{1\le k\le m}\{Z_{n,k}\} = S_{n,m}$ der Strichliste mit Wert u bzw. durch

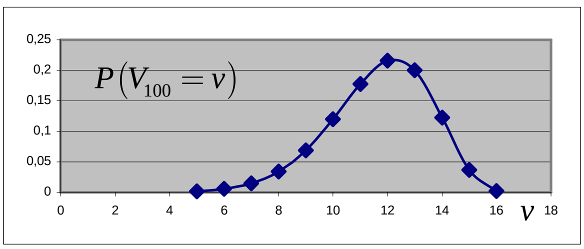
$$K_n(v) = \left\{(i_1,\cdots,i_m) \,\middle|\, v = i_1 \le \cdots \le i_m \le n, \sum_{j=1}^{m} i_j = n\right\}$$

für das Minimum $V_n = \min\limits_{1\le k\le m}\{Z_{n,k}\} = S_{n,1}$ der Strichliste mit Wert v. Die folgenden Tabellen listen einige der zugehörigen Ergebnisse auf.

u	$P(U_{100}=u)$	v	$P(V_{100}=v)$
17	0,00042094	5	0,0017449
18	0,01834261	6	0,0055238
19	0,08556795	7	0,0148055
20	0,16341641	8	0,0342032
21	0,19574612	9	0,0686857
22	0,17826656	10	0,1196188
23	0,13644896	11	0,1775653
24	0,09282839	12	0,2160462
25	0,05795118	13	0,2000018
26	0,03380292	14	0,1223051
27	0,01860631	15	0,03659704
28	0,0097157	16	0,00233859
29	0,00482646		
30	0,0022848		

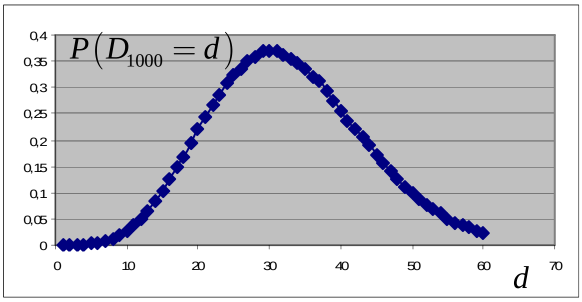
Als maximaler Wert der Strichliste ergibt sich hier „am häufigsten“ 21, als minimaler Wert „am häufigsten“ 12.





4. Diskussion

Das angesprochene Problem zeigt, dass man bei einer intuitiven Argumentation, die bei der Einführung eines neuen Stoffgebiets sicher angemessen und auch notwendig ist, gerade in der Stochastik aufpassen muss, weil sie hier manchmal zu falschen Vorstellungen führen kann. Der vorliegende Aufsatz soll deshalb einen Beitrag dazu leisten, sich auch kritisch mit Lehrinhalten auseinander zu setzen, gerade dann, wenn Schüler aufgrund ihres Alters selbst noch nicht in der Lage sind, sich die Unterschiede zwischen realer Beobachtung und intuitiver Vorstellung zu erklären. Bei der konkreten Aufgabe dürfte es auch schwierig sein, den Frageteil b) oben richtig zu beantworten. Die nachfolgende Graphik zeigt die empirische Verteilung der Spannweite bei einer Würfelwurfzahl von $n = 1000$. Hierfür wurden insgesamt 1 Milliarde (!) Würfelwürfe mit dem PC simuliert, das entspricht der Simulation von 1 Million Strichlisten.



Die intuitiv erwartete „gleichmäßigere“ Verteilung der Werte der Strichliste (wegen der höheren Wurfzahl von $n = 1000$) zeigt sich mit einem Modalwert von etwa 30 für die Spannweite D_{1000} auch hier noch nicht sehr deutlich.

Literatur

Barth, F.; Haller, R. (1998): Stochastik Leistungskurs. Oldenbourg Verlag, München.

Henze, N. (2003): Stochastik für Einsteiger. Vieweg Verlag, Braunschweig.

Hübner, G. et al. (2004): Mathebaum 4. Schroedel Verlag, Braunschweig.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Institut für Mathematik
Fakultät V
Postfach 2503
26111 Oldenburg
dietmar.pfeifer@ uni-oldenburg.de