21 Stochastische Differentialgleichungen für Finanzmarktmodelle

Dietmar Pfeifer
Doreen Straßburger
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Institut für Mathematik
Postfach 25 03
26111 Oldenburg
Dietmar.Pfeifer@uni-oldenburg.de
Doreen.Strassburger@uni-oldenburg.de

Abstract:
In this contribution we investigate the role of ordinary and stochastic differential equations for modeling capital markets. In particular, we look closer a ta forward rate model that can be used in the context of the actual solvency discussion for asset and reserve risk modeling in the European insurance industry.

Keywords Ordinary and stochastic differential equations, discrete approximations, Black-Karasinski model, Solvency II

AMS Classifications: 34A05, 34A30, 60H10, 60H35

21.1 Einleitung

Das Thema „Finanzielle Sicherheit“ gewinnt in der heutigen Zeit immer mehr an Bedeutung, etwa bei der Alterssicherung („Riester-Rente“) oder bei Hypothekendarlehen für das Eigenheim. Manchmal möchte man auch einfach nur einen größeren Geldbetrag für kurze Zeit gewinnbringend anlegen, um damit eine lange geplante Anschaffung, z. B. einen neuen PKW, zu finanzieren. Eines der wesentlichen Entscheidungskriterien für eine bestimmte Anlageform ist dabei der auf dem Markt erzielbare *Zins* bzw. die damit verbundene *Rendite.* Die am Markt angebotenen zahlreiche Varianten der Geld- und Vermögensanlagen sind dabei für den Laien oft undurchschaubar, vor allem dann, wenn ihre Renditen von zukünftigen, unbekannten *Zinsentwicklungen* abhängen.

Aber nicht nur für private Haushalte sind solche Überlegungen wichtig. Die zur Zeit diskutierte aufsichtrechtliche Harmonisierung der europäischen Versicherungsaufsicht (Stichwort: Solvency II, vgl. [3]) sieht hier etwa vor, dass auch versicherungstechnische Rückstellungen für noch in Abwicklung befindliche Schadenzahlungen „marktnah“ zu bewerten sind, d. h. durch Diskontierung der voraussichtlichen künftigen Regulierungsbeträge mit einer „risikolosen“ Zinsstrukturkurve, die sich z. B. an Vorgaben der Europäischen Zentralbank oder anderer Einrichtungen wie Börsen orientiert. Dieser Ansatz wird aktuell in der dritten quantitativen Impakt-Studie (QIS 3) verfolgt, die durch das CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors) im Auftrag der EU-Kommission und in Kooperation mit den nationalen Aufsichtsbehörden durchgeführt wird (in Deutschland ist dies die BaFin, die Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht mit Sitz in Bonn). Hierbei wird explizit auf unterschiedliche Zinsentwicklungsmöglichkeiten Bezug genommen.

Die moderne (stochastische) Finanzmathematik bietet für die Modellierung solcher Phänomene ein Spektrum verschiedener Ansätze an, die im Wesentlichen alle auf gewissen Typen *stochastischer Differenzialgleichungen* beruhen (vgl. etwa [4]). In diesem Beitrag sollen die grundlegenden Ideen der zugehörigen Theorie praxisnah im Kontext der Solvency II-Diskussion erläutert werden.

21.2 Finanzmärkte

Ein Markt bezeichnet im Allgemeinen einen (nicht nur im physischen Sinn zu verstehenden) Ort, an dem Angebot und Nachfrage aufeinander treffen. Auf einem *Finanzmarkt* werden speziell Finanzmittel in Form von Geld, Devisen, Krediten, Wertpapieren und Finanzderivaten gehandelt. Auf der Angebots- und Nachfrageseite stehen hierbei Finanzmittel, die vor allem gegen Zahlung eines *Zinses* zwischen den Marktparteien ausgetauscht werden. Neben dem Ausgleich von Angebot und Nachfrage steht hier auch die Möglichkeit der Bildung aktueller und fairer Preise (z. B. für Finanzderivate) im Vordergrund.

21.2.1 Möglichkeiten langfristiger Geldanlage

Es gibt auf Finanzmärkten eine Vielzahl von langfristigen Geldanlagemöglichkeiten, von denen hier vier exemplarisch vorgestellt werden sollen.

Das **Sparbuch** ist die wohl am meisten verbreitete Form der langfristigen Geldanlage. Es handelt es hierbei um eine festverzinsliche Spareinlage bei einer Bank oder Sparkasse mit einer flexiblen Abhebemöglichkeit im Rahmen einer vertraglich vereinbarten Obergrenze. Die Spareinlagen sind unbefristete Gelder, die meist eine Kündigungsfrist von mindestens drei Monaten aufweisen.

Der **Bundesschatzbrief** ist ein nicht an der Börse gehandeltes verzinsliches Wertpapier (Schuldverschreibung) des Staates mit steigendem Zinssatz und einer Laufzeit von sechs oder sieben Jahren.

Bei der **Kommunalobligation,** auch öffentlicher Pfandbrief genannt, handelt es sich um eine verzinsliche Schuldverschreibung, die von privaten Hypothekenbanken und öffentlich-rechtlichen Kreditinstituten zur Finanzierung von Kommunaldarlehen (Kredit an die öffentliche Hand – Bund, Länder, Gemeinden, Städte – zur Durchführung öffentlicher Investitionen) herausgegeben wird.

Die **Industrieanleihe,** auch Industrieschuldverschreibung oder -obligation genannt, ist eine Sammelbezeichnung für alle Anleihen, die von Wirtschaftsunternehmen ausgegeben werden. Dazu gehören Schuldverschreibungen von Industrie-, Handels- oder Verkehrsunternehmen. Durch die Herausgabe einer Anleihe beschaffen sich Großunternehmen Kapital. Die Anleihen haben eine feste Laufzeit und meist einen festen Zins. Sie können jederzeit an der Börse zum entsprechenden Tageskurs ge- oder verkauft werden.

21.2.2 Möglichkeiten kurzfristiger Geldanlage

Zu den kurzfristigen Geldanlagen gehört neben dem bekannten **Giro-** das **Festgeldkonto.** Hierbei handelt es sich um eine kurzfristige Spareinlage (Tages-, Wochen-, Monatsgelder) bei einer Bank oder Sparkasse. Das Geld ist dann für einen entsprechend festgelegten Zeitraum nicht verfügbar. Der verwendete Zinssatz ist dabei abhängig von der Höhe der Einlage, der Laufzeit, der Geldmarktlage sowie der Liquiditätssituation der Bank.

Prinzipiell lassen sich auch alle langfristig konzipierten Geldanlagen, die an der Börse gehandelt werden (z. B. **Sparbriefe** oder andere **festverzinsliche Wertpapiere** von Sparkassen und Banken, aber z. T. auch die unter 21.2.1 genannten Wertpapiere), als kurzfristige Geldanlage ansehen, da man sie praktisch jederzeit zu zeitlich variierenden Kurswerten liquidieren kann. Der Rückkaufswert des Wertpapiers hängt dabei wesentlich von der aktuellen Zinsentwicklung am Markt ab.

21.2.3 Der Interbanken-Handel

Hier gehr es um Zinssätze, welche Banken untereinander im (meist internationalen) Handel miteinander vereinbaren. Wichtigste Vertreter hiervon sind:

- **LIBOR**
  Die London Interbank Offered Rate (LIBOR) wird banktäglich als arithmetisches Mittel aus den (Brief-)Zinssätzen errechnet, zu denen Londoner Banken mit erstklassiger Bonität bereit sind, Geld an andere Banken mit gleicher Bonität auszuleihen. Hierfür werden LIBOR-Sätze für verschiedene Laufzeiten (z. B. drei, sechs oder zwölf Monate) und Währungen (z. B. Euro oder US-Dollar) veröffentlicht.
- **EURIBO**
  Die Abkürzung EURIBOR steht für Euro Interbank Offered Rate und konzentriert sich auf den europäischen Geldmarkt. Sie ist initiiert von der Eurorean Banking Federation (FBE) und der Financial Markets Association ACI (gegründet 1955 als Association Cambiste Internationale, mit Sitz in Paris). Die Ermittlung dieses Zinssatzes erfolgt dadurch, dass bis zu 75 europäische bedeutende Kreditinstitute Briefsätze für ein bis zwölfmonatige Laufzeiten um 11:00 Uhr Brüsseler Zeit an einen Informationsanbieter melden. Anschließend werden von den gemeldeten Informationen Durchschnittssätze gebildet, wobei 15 % der höchsten und 15 % der niedrigsten Briefsätze keine Berücksichtigung finden. Die EURIBOR-Sätze werden geschäftstäglich mit drei Nachkommastellen veröffentlicht.

21.3 Gewöhnliche Differenzialgleichungen für Zinssätze

21.3.1 Ein Differenzenmodell für Kapitalwachstum

Wir betrachten im Folgenden die zeitliche Entwicklung eines zur Zeit 0 gegebenen Kapitals $K = X_0$, das mehrmals nacheinander über eine feste Zeitspanne $h > 0$ verzinslich angelegt wird, wobei der jeweils aktuell zu Grunde liegende Zinssatz $r(t)$ (gedacht als Jahreszins, also p. a.) in bekannter Weise über die Zeit t variieren darf.

Die aktuelle *Verzinsung* des Kapitals X_t erfolgt dann durch Gutschrift des Betrags $h \cdot r(t) \cdot X_t$ zum Zeitpunkt $t + h$; der Kapitalzuwachs in der Zeitspanne h beträgt damit

$$X_{t+h} - X_t = h \cdot r(t) \cdot X_t \tag{21.1}$$

oder in *relativer Form*

$$\frac{X_{t+h} - X_t}{h} = r(t) \cdot X_t. \tag{21.2}$$

Durch Grenzübergang $h \downarrow 0$ erhält man hieraus die Differenzialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_t = \lim_{x\downarrow 0}\frac{X_{t+h}-X_t}{h} = r(t)\cdot X_t \tag{21.3}$$

(homogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung). Ihre Lösung beschreibt ein Kapitalwachstum bei *„stetiger Verzinsung"*.

21.3.2 Zeitstetige Verzinsung

Die gerade hergeleitete Differenzialgleichung ist von der Form

$$y'(t) = a(t)\cdot y(t) \tag{21.4}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = K = X_0$, dem gegebenen Anfangskapital zur Zeit 0.

Lösungsweg (vgl. auch [5]): Unter der Voraussetzung $y > 0$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(y(t)) = \frac{y'(t)}{y(t)} = a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t), \tag{21.5}$$

somit ist

$$\ln(y(t)) = A(t) + C \tag{21.6}$$

mit der Stammfunktion $A(t) = \int_0^t a(s)\mathrm{d}s$ und einer noch zu spezifizierenden reellen Integrationskonstanten C. Es folgt

$$y(t) = \exp\{A(t)+C\} = \mathrm{e}^C\exp\{A(t)\} \text{ mit } y(0) = \mathrm{e}^C = K, \text{ also} \tag{21.7}$$

$$y(t) = K\cdot\exp\left\{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\right\}, \quad t\geq 0. \tag{21.8}$$

Für die ursprünglich gegebene Differenzialgleichung bedeutet das also:

$$X_t = X_0\cdot\exp\left\{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right\}, \quad t\geq 0. \tag{21.9}$$

Ist die Zinsrate über die Zeit konstant, gilt also $r(s) = r$ für alle $s > 0$ so ergibt sich hieraus die bekannte zeitstetige Zinseszinsformel (exponentielles Kapitalwachstum):

$$X_t = X_0\cdot\exp\left\{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right\} = X_0\cdot\exp\left\{r\int_0^t \mathrm{d}s\right\} = X_0\cdot\mathrm{e}^{rt}, \quad t\geq 0. \tag{21.10}$$

21.4 Stochastische Zinsstrukturmodelle

21.4.1 Stochastische Differenzialgleichungen

Obwohl dieser Ansatz mit einer von der Zeit abhängigen Zinsrate $r(t)$ schon sehr flexibel ist, ist er dennoch für die Modellierung zukünftiger Kapitalentwicklungen oft nicht ausreichend, weil die Art der Veränderungen der Zinsraten über die Zeit nicht genau, sondern meist nur tendenzmäßig bekannt ist und daher als zufällig angesehen werden muss. Man gelangt daher auf natürliche Weise zu den so genannten *stochastischen Differenzialgleichungen,* die in der Regel in der Form

$$\mathrm{d}X_t = \mu(t,X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,X_t)\mathrm{d}W_t \text{ mit der Anfangsbedingung } X_0 = K \tag{21.11}$$

gegeben sind, wobei $\mu(\bullet,\bullet)$ die so genannte *Drift* und $\sigma(\bullet,\bullet)$ die so genannte *Volatilität* bezeichnet, die beide sowohl von der Zeit t als auch vom aktuellen Wert X_t abhängen dürfen. Der zusätzliche Term $\mathrm{d}W_t$ bezieht sich hier auf die so genannte *Brown'sche Bewegung* (auch *Wiener-Prozess* genannt, nach dem Mathematiker *Norbert Wiener* (1894–1964)), die z. B. die zufälligen Fluktuationen der Zinsrate abbildet. Beispielsweise erhält man das klassische Zinsmodell zurück, wenn man

$$\mu(t,X_t) = r(t)\cdot X_t \tag{21.12}$$

mit deterministischer Zinsrate $r(t)$ wählt und $\sigma(t,X_t) = 0$ setzt.

Stochastische Differenzialgleichungen haben ihren Ursprung in der Physik, insbesondere im Gebiet der *Diffusionsprozesse* (Dispersion von Teilchen in Flüssigkeiten), das schon von *Albert Einstein* im Jahr 1905 in einer berühmten Arbeit zur Wärmeleitung studiert wurde.

Die Entwicklung einer „Lösung" stochastischer Differenzialgleichungen erfordert eine völlig neuartige *Integrationstheorie,* die wesentlich von dem japanischen Mathematiker *Kiyosi Itô* (geb. 1915) seit 1942 entwickelt wurde; ihm zu Ehren sprechen wir heute auch vom so genannten *Itô-Kalkül.*

Stochastische Differenzialgleichungen und *Itô-Integrale* gehören heute zum Handwerkszeug eines jeden Mathematikers, der in Banken, Versicherungen oder ähnlichen Finanzdienstleistungs-Branchen arbeitet. Sie dienen nicht nur zur Modellierung von Zinsmarktmodellen, sondern auch von *Aktienkursen* und anderen Kapitalmarktprodukten wie Derivaten (z. B. *Call- und Put-Optionen*). Der im Jahr 1997 an die Amerikaner *Fischer Black* und *Myron Scholes* verliehene Nobelpreis für Ökonomie bezog sich insbesondere auf deren mathematische Leistungen für die stochastische Modellierung und Bewertung von Derivaten für Aktienmärkte („Black-Scholes-Formel").

Obwohl eine theoretisch fundierte Beschreibung der Lösungen stochastischer Differenzialgleichungen sehr komplex und hier nicht möglich ist (vgl. etwa [2]), lassen sie sich oft doch erstaunlich leicht mit folgendem Ansatz approximativ simulieren:

Stochastische Differenzialgleichung: $\mathrm{d}X_t = \mu(t,X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,X_t)\mathrm{d}W_t$

Diskrete Approximation: $\hat{X}_{t_{k+1}} - \hat{X}_{t_k} = \mu(t_k,\hat{X}_{t_k})\dfrac{T}{n} + \sigma(t_k,\hat{X}_{t_k})\sqrt{\dfrac{T}{n}}Z_{k+1}$

in einem Zeitintervall [0,T] mit Schrittweite $h = t_{k+1} - t_k = \dfrac{T}{n}$ und stochastisch unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen Z_{k+1}, dann sind nämlich die ebenfalls normalverteilten Zufallsvariablen $\sqrt{\dfrac{T}{n}}\cdot Z_{k+1} = \sqrt{h}\cdot Z_{k+1}$ Näherungen für die Zuwächse $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ der Brown'schen Bewegung im Zeitintervall $[t_k,t_{k+1}]$, für die definitionsgemäß gilt:

$$\begin{aligned} E(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) &= 0 = E(\sqrt{h} \cdot Z_{k+1}) \\ Var(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) &= t_{k+1} - t_k = h = Var(\sqrt{h} \cdot Z_{k+1}). \end{aligned} \tag{21.13}$$

Ein Grenzübergang im klassischen Sinn wie am Ende von Abschnitt 21.3.1 ist hier aber nicht möglich. weil die entsprechende relative Differenz

$$\frac{\hat{X}_{t_{k+1}} - \hat{X}_{t_k}}{h} = \mu(t_k, \hat{X}_{t_k}) + \sigma(t_k, \hat{X}_{t_k}) \frac{Z_{k+1}}{\sqrt{h}} \tag{21.14}$$

für $h \downarrow 0$ offensichtlich keinen Grenzwert besitzt, da $\frac{1}{\sqrt{h}}$ divergiert und die Folge der Z_{k+1} wegen der stochastischen Unabhängigkeit beliebig große positive wie negative Werte annimmt. Dies zeigt insbesondere, dass es ein direktes Pendant zum klassischen *Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung* im Umfeld stochastischer Differenzialgleichungen nicht geben kann.

21.4.2 Das Black-Karasinski-Modell

In vielen finanzmathematischen Anwendungen werden stochastische Differenzialgleichungen nicht direkt für die Modellierung des Kapitalwachstums X_t sondern zunächst nur für die Beschreibung der Zinskurve $r(t)$ verwendet (vgl. [6]). Ein prominenter Vertreter dieses Ansatzes ist das *Black-Karasinski-Modell,* welches durch die folgende stochastische Differenzialgleichung gegeben ist:

$$\mathrm{d}r(t) = a \cdot r(t)[b - \ln r(t)]\mathrm{d}t + \sigma \cdot r(t)\mathrm{d}W_t \quad \text{mit dem Anfangszins } r(0) = r_0. \tag{21.15}$$

Die reellen Parameter a und b steuern dabei den langfristigen Verlauf der Zinskurve. Setzt man in der obigen Gleichung zunächst $\sigma = 0$, erhält man wieder eine gewöhnliche Differenzialgleichung der Form

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r(t) &= a \cdot r(t)[b - \ln r(t)]\mathrm{d}t \quad \text{bzw. nach Division durch } r(t) \\ \mathrm{d}\ln[r(t)] &= \frac{\mathrm{d}r(t)}{r(t)} = a[b - \ln r(t)]\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{21.16}$$

und damit für die Funktion $y(t) = \ln[r(t)]$ die (inhomogene) Differenzialgleichung erster Ordnung

$$y'(t) = ab - a \cdot y(t) \quad \text{mit Anfangswert } y(0) = \ln(r_0). \tag{21.17}$$

Die homogene Lösung (für den Fall $b = 0$) kann wie in Abschnitt 21.3.1 berechnet werden:

$$y(t) = C\mathrm{e}^{-at} \quad \text{mit einer geeigneten positiven Integrationskonstanten } C. \tag{21.18}$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man durch die so genannte *Variation der Konstanten:* mit dem Ansatz $y(t) = C(t)\mathrm{e}^{-at}$ ist nämlich

$$y'(t) = C'(t)\mathrm{e}^{-at} - aC(t)\mathrm{e}^{-at} = C'(t)\mathrm{e}^{-at} - ay(t) \tag{21.19}$$

und hieraus durch Vergleich mit der ursprünglich gegebenen Differenzialgleichung

$$C'(t)\mathrm{e}^{-at} = ab \quad \text{bzw.} \quad C'(t) = ab\mathrm{e}^{at}, \tag{21.20}$$

woraus man durch direkte Integration die inhomogene Lösung

$$y(t) = C(t)\mathrm{e}^{-at} = b + D\mathrm{e}^{-at} \tag{21.21}$$

mit einer weiteren Integrationskonstanten D erhält. Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung ergibt sich $D = \ln(r_0) - b$ und damit als Gesamtlösung

$$r(t) = \exp(y(t)) = r_0^{\mathrm{e}^{-at}} \cdot \exp\left(b\left[1 - \mathrm{e}^{-at}\right]\right). \tag{21.22}$$

Diese Funktion ist monoton in t mit dem asymptotischen Verhalten (für $a > 0$)

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} r_0^{\mathrm{e}^{-at}} \cdot \exp\left(b\left[1 - \mathrm{e}^{-at}\right]\right) = \exp(b), \text{ unabhängig vom Anfangszins } r_0. \tag{21.23}$$

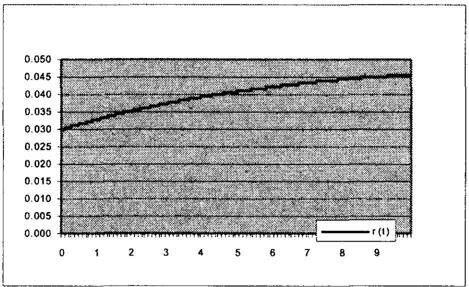
Die Zinskurve ist also genau dann monoton fallend, wenn $\ln(r_0) > b$ gilt, ansonsten monoton wachsend. Das Black-Karasinski-Modell gestattet also in seiner deterministischen Form (mit Volatilität Null) die einfache Modellierung einer monotonen Zinsentwicklung in beiden Richtungen, wobei Anfangs- und Langfristzins sowie die anfängliche Steigung der Zinskurve durch die Wahl der Modellparameter bestimmt sind.

Im Standard-Ansatz für Solvency II vom Gesamtverband der deutschen Versicherungswirtschaft (GDV) und der BaFin vom Dezember 2005 (siehe [1] und [3]) wurden die Parameter des Black-Karasinski-Modells mit Hilfe einer Kleinste-Quadrate-Schätzung an die Zinsentwicklung bei deutschen Staatsanleihen (10-Jahres-REX) angepasst:

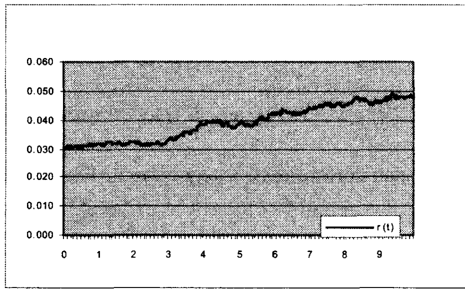
Parameter	r_0	a	b	σ
Schätzung	0,03	0,2	-3,02	0,19

Die Graphiken in Abbildung 21.1 zeigen die Ergebnisse verschiedener Simulationen mit EXCEL auf der Grundlage des in Abschnitt 21.4.1 vorgestellten Verfahrens mit den angegebenen Parametern r_0, a und b, aber variierenden Volatilitäten $\sigma \geq 0$. Der Zeithorizont beträgt jeweils $T = 10$ Jahre mit $n = 1000$ Unterteilungen (d. h. $h = 0{,}01$). Wegen $\ln(r_0) = -3{,}5 < -3{,}02 = b$ ist die Zinskurve im deterministischen Fall monoton wachsend mit Grenzwert $\mathrm{e}^b = 0{,}488$, d. h. es wird angenommen, dass der Zins von aktuell 3 % langfristig auf ca. 4,8 % steigt.

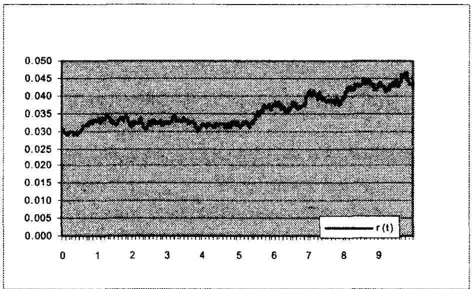
Diese Simulationen zeigen sehr wirkungsvoll auf, welchen deutlichen Einfluss die Verwendung einer stochastischen Differenzialgleichung gegenüber einer deterministischen Differenzialgleichung hat. Das Black-Karasinski-Modell besitzt darüber hinaus die wünschenswerte Eigenschaft der *„mean reversion“*, d. h. die Pfade des Modells pendeln um den Erwartungswert herum, der hier zugleich durch die deterministische Zinskurve gegeben ist.



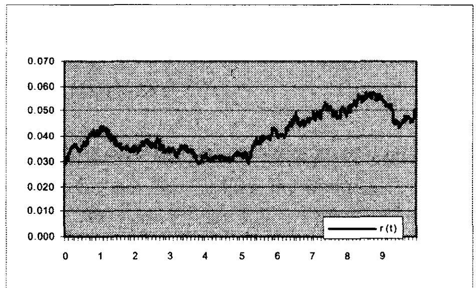
$\sigma = 0$



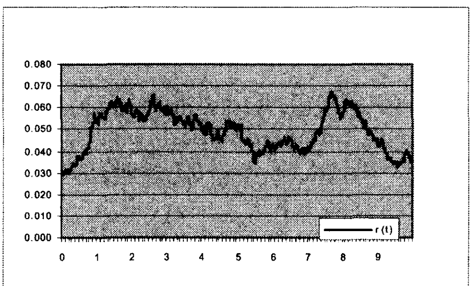
$\sigma = 0{,}05$



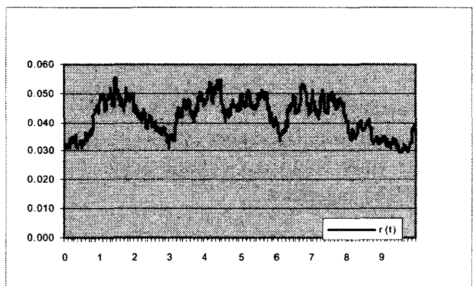
$\sigma = 0{,}1$



$\sigma = 0{,}15$



$\sigma = 0{,}19$



$\sigma = 0{,}25$

Abbildung 21.1: GDV/BaFin-Ansatz

21.5 Zusammenfassung und Ausblick

Methoden der modernen stochastischen Finanzmathematik, die auf stochastischen Differenzialgleichungen aufbauen, werden immer wichtiger, nicht nur im Bankenbereich, sondern auch im Versicherungsbereich. Dort spielen sie insbesondere bei der Simulation von Risiken, die stark von künftigen Zinsentwicklungen abhängen und z. B. das Zusammenspiel von Kapitalanlagen und versicherungstechnischen Rückstellungen betreffen, eine wichtige Rolle (Stichworte: Asset-Liability-Management, interne Risikomodelle, wertorientierte Unternehmenssteuerung).

Literatur

[1] Diskussionsbeitrag für einen Solvency II kompatiblen Standardansatz (Säule I). Modellbeschreibung (Version 1.0). Gesamtverband der deutschen Versicherungswirtschaft, Berlin, 2005

[2] *Etheridge, A.:* A Course in Financial Calculus. Cambridge, Cambridge University Press, 2002

[3] *Gründl, H.; Perlet, H. (Hrsg.):* Solvency II und Risikomanagement. Umbruch in der Versicherungswirtschaft. Wiesbaden, Gabler-Verlag, 2005

[4] *Hausmann, W.; Diener K.; Käsler J.:* Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection. Stochastische Finanzmarktmodelle und ihre Anwendungen. Wiesbaden, Vieweg Verlag, 2002

[5] *Heuser, H.:* Lehrbuch der Analysis, Teil 1. Stuttgart, Teubner Verlag, 1989

[6] *Reitz, S.; Schwarz, W.; Martin, M. R, W.:* Zinsderivate. Eine Einführung in Produkte, Bewertung, Risiken. Wiesbaden, Vieweg-Verlag, 2004