Finanzmathematik

Lektion 6

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Aktuarwissenschaften: Schaden-/Unfallversicherung

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer ist seit dem Wintersemester 2000 Professor für Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg und betreut dort den Lehr- und Forschungsschwerpunkt Versicherungs- und Finanzmathematik. Vor Übernahme der Professur war Professor Pfeifer fünf Jahre an der Universität Hamburg tätig, wo er einen Lehrstuhl für Versicherungsmathematik innehatte. Seine wissenschaftliche Ausbildung erhielt Professor Pfeifer an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, wo er auch promovierte und sich im Fach Mathematik habilitierte.

Professor Pfeifer ist Mitglied des Aufsichtsrates der Gegenseitigkeit Versicherung in Oldenburg und seit mehreren Jahren beratend für den Rückversicherungsmakler AON Benfield in Hamburg tätig. Er beteiligt sich auch aktiv am Ausbildungsprogramm der Deutschen Aktuarvereinigung.

Seine aktuellen Forschungsgebiete liegen im Bereich der Versicherungsmathematik, der Modellierung stochastischer Abhängigkeiten zwischen Risiken und des quantitativen Risikomanagements mit einem besonderen Fokus auf Fragestellungen im Rahmen von Solvency II.

Inhalt

Zielformulierung

In dieser letzten Lektion des Lehrgangs „Finanzmathematik“ erhalten Sie auf anschauliche Weise einen Einblick in die aktuariellen Grundlagen der Nichtlebensversicherung.

Im Unterschied zur Lebensversicherung ist die Schaden-/Unfallversicherung durch eine Vielzahl mathematisch-stochastischer Modellansätze gekennzeichnet, die von der Tarifierung unterschiedlicher Versicherungsprodukte über die Bewertung von Reserven für lang dauernde Schadenabwicklungen (z. B. im Bereich der Haftpflichtversicherung) bis zur rechnerischen Bestimmung des Solvenzkapitals nach den zukünftigen europäischen aufsichtsrechtlichen Vorgaben (Solvency II) reichen.

Ein gewisses mathematisches Grundverständnis – wie Sie es durch die Lektüre von Lektion 1, „Finanzmathematische Grundlagen“, erhalten haben – ist vorteilhaft. Auf Lektion 1 wird daher hier häufiger Bezug genommen, die unterschiedlichen mathematischen Ansätze und Formeln werden aber stets auch durch plakative Beispiele veranschaulicht. Die auf der beigelegten CD-ROM gesammelten Excel-Arbeitsblätter zu dieser Lektion können und sollen Sie interaktiv im Sinne eines Ausprobierens nach dem Motto „Learning by Doing“ verwenden.

Am Ende dieser Lektion sollten Sie ein wesentliches Verständnis dafür erlangt haben, mit welchen mathematischen Methoden ein Aktuar in einem Schaden-/Unfallversicherungsunternehmen seine unterschiedlichen Aufgaben wahrnimmt und wie er sich im Rahmen eines quantitativen Risikomanagements sowie der zukünftigen europäischen aufsichtsrechtlichen Anforderungen von Solvency II positioniert.

Die Übungsaufgaben finden Sie in dieser Lektion thematisch eingebunden in den jeweiligen Kapiteln sowie übersichtlich zusammengefasst zusammen mit den Lösungen zur Selbstkontrolle am Ende der Lektion.

1 Risikomodelle der Schaden-/Unfallversicherung

Ein wesentlicher und historisch bereits weit zurückreichender Grundgedanke in der Sachversicherung ist die Kollektivierung gleichartiger, im Einzelnen jedoch ungewisser, monetär bewertbarer Risiken nach dem Prinzip des Umlageverfahrens. Die gleichmäßige Verteilung der Schadenlast auf alle Angehörigen des Kollektivs führt zu einem finanziellen Ausgleich innerhalb der Versichertengemeinschaft, der die individuellen Risiken für jeden Einzelnen kalkulierbar und damit auch tragbar macht.

Um den so zustande kommenden Beitrag jedes Versicherten zum Kollektiv stabil zu halten, sind zwei Aspekte besonders wichtig: die Größe des Kollektivs und der zeitliche Rahmen der Versicherung. Erfahrungsgemäß wird die Schwankung des Beitrags mit wachsender Größe des Kollektivs und längerem Zeithorizont kleiner, der Beitrag nähert sich dabei einem für das Risiko charakteristischen mittleren Wert an. Man spricht deshalb in diesem Zusammenhang auch vom *Risikoausgleich im Kollektiv und in der Zeit*.

Aus Sicht der Mathematik wird die Unsicherheit der einzelnen Risiken durch geeignete *Wahrscheinlichkeitsverteilungen* modelliert, wie sie bereits in Lektion 1 eingeführt wurden. Die Risiken selbst werden aufgrund der Gleichartigkeitsannahme durch *identisch verteilte Zufallsvariablen* beschrieben, die im Standardmodell der Versicherung zusätzlich als *stochastisch unabhängig* angenommen werden. Damit verbunden ist die Vorstellung, dass Schäden bei unterschiedlichen Verträgen „rein zufällig“ und nicht etwa systematisch gehäuft auftreten. Unter diesen Annahmen führt der Risikoausgleich im Kollektiv und in der Zeit durch fortlaufende Mittelbildung aufgrund des *Gesetzes der großen Zahlen* zum *Erwartungswert* der Risiken als *Bedarfsprämie*, also derjenigen Größe, die dem idealisierten Beitrag des Versicherten bei unendlich großem Kollektiv bzw. unendlich langer Versicherungsdauer entspricht. Die Bedarfsprämie ist daher eine wesentliche kalkulatorische Grundlage jedes Versicherungstarifs.

In der Praxis sind sowohl das Kollektiv als auch der Zeithorizont der Versicherung endlich; daher treten hier Schwankungen in den über die Zeit aggregierten Schadenlasten auf, die durch den *zentralen Grenzwertsatz* genauer beschrieben werden können. Es stellt sich hier insbesondere das Problem des *technischen Ruins* der Versicherung, also der Situation, dass die eingenommenen Bedarfsprämien (als fest vereinbarte Versicherungsbeiträge) nicht ausreichen, um die im Laufe der Zeit zufällig eingetretenen Schäden insgesamt zu begleichen. Auf die Bedarfsprämie muss daher ein geeigneter *Risikozuschlag* erhoben werden, um die Wahrscheinlichkeit eines Ruins möglichst klein zu halten.

Eine weitere Möglichkeit zur Reduzierung der Ruinwahrscheinlichkeit besteht in der Vorhaltung eines genügend großen Sicherheits- oder *Solvenzkapitals*; dies ist aktuell Gegenstand der neuen europäischen Aufsichtsregelungen (Stichwort: Solvency II).

Anders als bei der *Lebensversicherung*, wo die biometrischen Rechnungsgrundlagen durch eine ausreichend große Zahl personenbezogener Daten (Volkszählung, Rentenversicherungsträger u. a.) abgesichert sind, müssen in der Schaden-/Unfallversicherung die (Wahrscheinlichkeits-)Verteilungen der Risiken in der Regel mit geeigneten statistischen Verfahren erst aufwändig aus beobachteten Schadendaten ermittelt werden.

1.1 Das individuelle Modell der Risikotheorie

Im *individuellen Modell* der Risikotheorie geht es um die stochastische Beschreibung der innerhalb einer Versicherungsperiode anfallenden Schäden in einem *homogenen Kollektiv*, also einem Bestand aus *n* gleichartigen Risiken X_1, ..., X_n sowie dem daraus resultierenden *Gesamtschaden*. Beispiele hierfür sind:

- die jährlichen Feuerschäden bei einer Gebäudeversicherung in einer bestimmten Gebäudeklasse, z. B. private Wohngebäude mit Versicherungssummen zwischen 200.000 und 300.000 EUR
- die jährlichen Schäden aus einer Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung für männliche Fahranfänger mit einer bestimmten Regional- und Typklasse
- die jährlichen Schäden aus einer Unfallversicherung für Frauen der Altersgruppe 40 bis 50 Jahre
- die Anzahl der Schäden oberhalb von 10.000 EUR (so genannte Großschäden) aus einer privaten Haftpflichtversicherung

In der Praxis stellt sich dabei natürlich das Problem, inwieweit die betrachteten (Teil-)Kollektive tatsächlich homogen sind, also durch identisch verteilte Zufallsvariablen beschrieben werden können. Naturgemäß sind große Kollektive eher inhomogen, d. h., die mathematischen Voraussetzungen sind hier oft nicht ausreichend erfüllt; zu kleine Kollektive weisen demgegenüber größere zufällige Schwankungen auf, erfordern also höhere Sicherheitszuschläge.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gesamtschadens $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist im Allgemeinen nicht geschlossen darstellbar, selbst wenn die Verteilung der Einzelrisiken bekannt ist; mathematisch spricht man hier von der *Faltung* der Risikoverteilungen.

Verteilungsfamilien, für die die Verteilung der Summe vom gleichen Typ und damit geschlossen darstellbar ist, sind u. a. (siehe Lektion 1, Kapitel 2):

- Binomialverteilung $\mathbf{B}(m;p)$
- Poisson-Verteilung L_j
- Normalverteilung $\mathbf{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$

Die folgende Tabelle zeigt den genauen Zusammenhang auf:

Verteilung der X_i	$\mathbf{B}(m;p)$	$\mathbf{P}(\lambda)$	$\mathbf{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$
Verteilung von S_n	$\mathbf{B}(m\cdot n;p)$	$\mathbf{P}(n\cdot\lambda)$	$\mathbf{N}\left(n\cdot\mu,n\cdot\sigma^2\right)$

Das individuelle Modell der Risikotheorie kommt auch in der Lebensversicherung zur Anwendung, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1

Wir betrachten ein Kollektiv von n = 1.000 männlichen Versicherten des Alters x = 50 [Jahre] mit einer Risiko-Lebensversicherung über die Versicherungssumme V = 100.000 EUR. N_i bezeichne diejenige Zufallsvariable, die angibt, ob der Versicherte i im Versicherungsjahr verstirbt und damit die Versicherungsleistung V auslöst (Fall $N_i = 1$) oder nicht (Fall $N_i = 0$). Die vom Versicherungsunternehmen verwendete Sterbetafel weist eine Ein-Jahres-Sterblichkeit von $q_x = 0{,}00166$ aus, d,h, die Zufallsvariable N_i folgt einer B(1; q_x)-Verteilung. Die Anzahl $M_n = \sum_{i=1}^{n} N_i$ der Todesfälle im Versicherungsjahr ist dann B(n; q_x) verteilt. Als Risiko $S = V\cdot M$ wird die im Versicherungsjahr ausgezahlte Summe an Versicherungsleistungen angesetzt. Damit kann man z. B. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Versicherungsjahr maximal 200.000 EUR Versicherungsleistung im Kollektiv ausbezahlt werden, exakt berechnen:

$$
\begin{aligned}
P\left[S_n \le 200.000\right] = P\left[M_n \le 2\right] &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} q_x^k (1-q_x)^{n-k} \\
&= (1-q_x)^{1000} + 1.000 \times q_x (1-q_x)^{999} + 499.500 \times q_x^2 (1-q_x)^{998} \\
&= 0{,}7678
\end{aligned}
$$

Übungsaufgabe 1

Wie groß ist in Beispiel 1 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Versicherungsjahr mindestens 100.000 EUR Versicherungsleistung im Kollektiv ausbezahlt werden?

Übungsaufgabe 2

Bei einer privaten Haftpflichtversicherung wird unterstellt, dass pro Jahr von 2.000 Versicherten im Schnitt einer einen Großschaden (über 10.000 EUR) verursacht. Das betrachtete Kollektiv enthält 500 Versicherte. Welche Verteilung besitzt die jährliche Anzahl der Großschäden im Kollektiv, wenn diese Größe pro Versicherten als Poisson-verteilt angenommen wird?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Kollektiv mehr als zwei Großschäden verursacht?

Die Verteilung des Gesamtschadens S_n kann nach dem zentralen Grenzwertsatz für große n approximiert werden, wenn der Erwartungswert $\mu = E[X_i]$ und die Varianz $\sigma^2 = Var[X_i]$ der Einzelrisiken X_i bekannt sind.

Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt:

$$P[S_n \le x] = P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le \frac{x - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right] \approx N\left[\frac{x - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right]$$

mit der Verteilungsfunktion N für die Standardnormalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Beispiel 2

Wir nehmen an, dass das Kollektiv in Beispiel 1 statt n = 1.000 zehnmal mehr, also n = 10.000 Versicherte umfasst. Wenn jetzt die Wahrscheinlichkeit dafür, das im Versicherungsjahr maximal 2.000.000 EUR Versicherungsleistung im Kollektiv ausbezahlt werden, berechnet werden soll, ist das aufgrund der Größe der Zahlen elementar kaum möglich. Mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes können wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit unter Verwendung von

$$\mu = E(X_i) = q_x V = 166$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X_i)} = \sqrt{q_x(1-q_x)}\, V = 4070{,}9$$

aber für $x = 2.000.000$ wie folgt approximieren:

$$P[S_n \leq x] \approx N\left[\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] = N\left[\frac{340.000}{407.090}\right] = N(0{,}8351) = 0{,}7981.$$

Zum Vergleich: Die exakte Lösung ist $P[S_n \leq x] = 0{,}8323.$

Wird lediglich die Bedarfsprämie μ vom Versicherten erhoben, kann die technische Ruinwahrscheinlichkeit $P[S_n > n\mu]$ (die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Schäden die vom Kollektiv eingenommenen Prämien übersteigen) mit dem *zentralen Grenzwertsatz* folgendermaßen approximiert werden:

$$P[S_n > n\mu] = P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} > 0\right] \approx 1 - N(0) = 0{,}5,$$

d. h., langfristig oder mit wachsender Kollektivgröße erleidet das Versicherungsunternehmen einen technischen Ruin mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 50 %!

Die Bestimmung eines geeigneten Sicherheitszuschlages $\delta_n = \dfrac{c}{\sqrt{n}}$

auf die Bedarfsprämie (in Abhängigkeit von der Kollektivgröße) kann ebenfalls mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes erfolgen; für die technische Ruinwahrscheinlichkeit ergibt sich dann:

$$P[S_n > n(\mu + \delta_n)] = P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} > \frac{n\delta_n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right] \approx 1 - N\left(\frac{c}{\sigma}\right) = \alpha.$$

Wenn man hier α als maximal tolerierte Ruinwahrscheinlichkeit vorgibt, kann c explizit berechnet werden als

$$c = \sigma \cdot N^{-1}(1 - \alpha).$$

Die inverse Verteilungsfunktion N^{-1} heißt auch *Quantilfunktion*, die Größe $N^{-1}(1-\alpha)$ das $(1-\alpha)$-*Quantil* der Normalverteilung. Bemerkenswert ist hier, dass die Konstante c direkt proportional zur Standardabweichung σ des Gesamtschadens ist.

Für $\alpha = 0{,}005$ (Solvency-II-Standard) erhält man z. B. den Wert

$$c = 2{,}5758 \cdot \sigma.$$

Will man neben einer asymptotischen Aussage über exakte Abschätzungen der Ruinwahrscheinlichkeit verfügen, kann man auf die *Tschebyscheff-Ungleichung* zurückgreifen.

Vergleiche dazu Lektion 1, „Finanzmathematische Grundlagen“.

Mit $\delta_n = \frac{c}{\sqrt{n}}$ erhält man

$$P\left[S_n > n\left(\mu + \delta_n\right)\right] \le P\left[\left|S_n - n\mu\right| > n\delta_n\right] \le \frac{Var\left(S_n\right)}{\left(n\delta_n\right)^2} = \frac{\sigma^2}{c^2} = \alpha$$

und hieraus die im Vergleich zum zentralen Grenzwertsatz im Allgemeinen erheblich größere Lösung

$$\delta_n = \frac{c}{\sqrt{n}}$$

Für $\alpha = 0{,}005$ erhält man etwa $c = 14{,}1421 \cdot \sigma$.

Dieses Thema wird im späteren Abschnitt 2.2 im Zusammenhang mit allgemeineren Prämienkalkulationsprinzipien wieder aufgegriffen.

Übungsaufgabe 3

Für die jährlichen Schäden aus einer Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung für männliche Fahranfänger mit einer bestimmten Regional- und Typklasse wird aus Erfahrung eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert $\mu = 900$ EUR und eine Standardabweichung $\sigma = 400$ EUR angenommen. Wie groß ist nach dem Solvency-II-Standard der Risikozuschlag, wenn das Kollektiv 500 Versicherte umfasst? Wie ändert sich der Risikozuschlag bei Vervierfachung der Versichertenzahl? Wie groß ist jeweils die resultierende Prämie?

Übungsaufgabe 4

Wie groß wird asymptotisch die technische Ruinwahrscheinlichkeit, wenn eine Prämie *unterhalb* der Bedarfsprämie festgesetzt wird?

Vertiefungen zu diesem Abschnitt finden Sie in den Büchern von Cottin/Döhler (Abschnitte 2.2 und 2.5.2), Mack (Abschnitt 1.3) und Schmidt (Kapitel 6).

1.2 Das kollektive Modell der Risikotheorie

Im vorigen Abschnitt haben wir die Verteilung der einzelnen Risiken im Kollektiv undifferenziert betrachtet. Typischerweise ist das Risiko jedes einzelnen Versicherten aber selbst wieder *zusammengesetzt*. Sehen wir dazu noch einmal das folgende Beispiel an:

- die jährlichen Schäden aus einer Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung für männliche Fahranfänger mit einer bestimmten Regional- und Typklasse

  Erfahrungsgemäß verursachen gerade Fahranfänger häufiger Unfälle pro Jahr, deren Schäden sich dann zu dem individuellen Jahresschaden des Versicherten saldieren. Charakteristisch für diese Situation sind zwei Zufallsgrößen:

- die (zufällige) Schadenfrequenz N, das ist die Anzahl der Schäden, die sich für dasselbe versicherte Risiko in der Versicherungsperiode ereignen

- die *positiven* Einzelschadenhöhen $Y_1, ..., Y_N$, die dabei eintreten

Der individuelle Schaden pro Versicherungsperiode ist damit gegeben durch die zufällige Summe

$$X = \sum_{k=1}^{N} Y_i .$$

Auch hier wird zunächst wieder davon ausgegangen, dass die Einzelschadenhöhen identisch (wie Y) verteilt sind und sowohl untereinander als auch von der Schadenfrequenz stochastisch unabhängig sind.

Die Beschreibung von Risiken über Schadenfrequenz und Einzelschadenhöhe ist das charakteristische Merkmal des *kollektiven Modells der Risikotheorie*.

Das individuelle Modell der Risikotheorie ist ein Spezialfall des kollektiven Modells, bei dem die Schadenfrequenz deterministisch ist, z. B. der Anzahl der Versicherten im Kollektiv entspricht. Grundsätzlich kann das kollektive Modell aber auch hier zur Beschreibung sinnvoll sein, nämlich dann, wenn nicht alle Versicherten tatsächlich Schadenfälle verursachen. In diesem Fall wäre N die Anzahl der von echten (d. h. positiven) Schäden betroffenen Versicherten im Kollektiv. $N = 0$ bedeutet also beispielsweise, dass während der Versicherungsperiode kein Schaden für dieses Risiko eingetreten ist.

Beispiel 3

Wir betrachten noch einmal die Situation aus Beispiel 1. Das hier vorgestellte Risikomodell lässt sich in natürlicher Weise auch als kollektives Modell auffassen, wobei die Zufallsvariable N_i der Schadenfrequenz des Versicherten i und die konstante Größe V seinem (deterministischen) Einzelschaden entspricht.

Die Berechnung der Verteilung des zusammengesetzten Risikos *X* ist naturgemäß komplizierter als im individuellen Modell. Für den Erwartungswert und die Varianz von *X* ergeben sich z. B. folgende Formeln:

$$E[X] = E[N] \cdot E[Y]$$

$$Var[X] = E[N] \cdot Var[Y] + Var[N] \cdot \{E[Y]\}^2$$

Erklärung: Unter Verwendung bedingter Wahrscheinlichkeiten (Lektion 1, Abschnitt 2.1.2) und Ausnutzung der Unabhängigkeitsannahmen ergibt sich:

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{k=1}^{N} Y_k\right] = \sum_n E\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k\right] \cdot P[N=n] = \sum_n n \cdot E[Y] \cdot P[N=n] \\ &= E[Y] \cdot \sum_n n \cdot P[N=n] = E[Y] \cdot E[N]. \end{aligned}$$

Diese Formel ist noch intuitiv nachvollziehbar: Der durchschnittliche Schaden entspricht hier dem Produkt aus der durchschnittlichen Schadenzahl und der durchschnittlichen Einzelschadenhöhe.

Die nachfolgende Rechnung nehmen wir nur der Vollständigkeit halber mit in den Text auf; sie soll erläutern, warum für die Varianz eine ähnlich intuitive Formel *nicht* zutrifft.

Zur Systematisierung der Rechnung bestimmen wir zuerst $E[X^2]$:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= E\left[\left(\sum_{k=1}^{N} Y_k\right)^2\right] = E\left[\sum_{k=1}^{N} Y_k^2 + \sum_{\substack{1 \le i,j \le N \\ i \ne j}}\sum Y_i \cdot Y_j\right] \\ &= \sum_n E\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 + \sum_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i \ne j}}\sum Y_i \cdot Y_j\right] \cdot P[N=n] \\ &= \sum_n E\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k^2\right] \cdot P[N=n] + \sum_n E\left[\sum_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i \ne j}}\sum Y_i \cdot Y_j\right] \cdot P[N=n] \\ &= \sum_n n \cdot E[Y^2] \cdot P[N=n] + \sum_n n \cdot (n-1) \cdot \{E[Y]\}^2 \cdot P[N=n] \\ &= E[Y^2] \cdot E[N] + \{E[Y]\}^2 \cdot E[N \cdot (N-1)]; \end{aligned}$$

Für die Varianz erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}
Var[X] &= E\left[X^2\right] - \left\{E[X]\right\}^2 \\
&= E\left[Y^2\right] \cdot E[N] + \left\{E[Y]\right\}^2 \cdot E\left[N^2 - N\right] - \left\{E[Y]\right\}^2 \left\{E[N]\right\}^2 \\
&= E[N] \cdot \left(E\left[Y^2\right] - \left\{E[Y]\right\}^2\right) + \left\{E[Y]\right\}^2 \cdot \left(E\left[N^2\right] - \left\{E[N]\right\}^2\right) \\
&= E[N] \cdot Var[Y] + Var[N] \cdot E\left[Y^2\right].
\end{aligned}$$

Für die analytische Berechnung der Verteilung von X gibt es mehrere Möglichkeiten (darunter die *schnelle Fourier-Transformation*), von denen wir hier aber nur eine spezielle besprechen, nämlich die *Panjer-Rekursion*[1] für eine *Poisson-verteilte Schadenfrequenz*.

Dieser Ansatz ist in der Praxis weit verbreitet und bildet auch die Grundlage für die in Abschnitt 1.3 im Detail vorgestellten Naturgefahrenmodelle.

Zur Verwendung des Panjer-Algorithmus muss die Einzelschadenhöhenverteilung geeignet *diskretisiert* werden, z. B. aufgerundet als Vielfache von 1.000 EUR oder anderen, geeigneten monetären Einheiten. Das so diskretisierte (positive!) Risiko wollen wir mit Y_Δ bezeichnen. Abkürzend setzen wir noch:

$$f_k := P(Y_\Delta = k),\ g_k := P(X_\Delta = k),\ k = 0,1,2,\cdots$$

Die f_k geben also die Wahrscheinlichkeiten der diskretisierten Einzelschadenhöhen wieder, die g_k die Wahrscheinlichkeiten des gesuchten (diskretisierten) Summenschadens $X_\Delta = \sum_{k=1}^{N} Y_{\Delta i}$.

Diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich sukzessive folgendermaßen berechnen (*Panjer-Rekursion*):

$$g_0 = e^{-\lambda},\ g_k = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot f_j \cdot g_{k-j},\ k = 1,2,\cdots.$$

1 Benannt nach *Harry Panjer*, einem kanadischen Versicherungsmathematiker.

Oder explizit:

$$
\begin{aligned}
&g_0 = e^{-\lambda} \\
&g_1 = \lambda f_1 g_0 \\
&g_2 = \frac{\lambda}{2}\left(f_1 g_1 + 2 f_2 g_0\right) \\
&g_3 = \frac{\lambda}{3}\left(f_1 g_2 + 2 f_2 g_1 + 3 f_3 g_0\right) \\
&g_4 = \frac{\lambda}{4}\left(f_1 g_3 + 2 f_2 g_2 + 3 f_3 g_1 + 4 f_4 g_0\right) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Beispiel 4

Wir betrachten eine private Haftpflichtversicherung, für die wir annehmen, dass je Versicherten die jährliche Schadenfrequenz Poisson-verteilt ist mit Parameter 0,1. (Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass der Versicherte im Schnitt alle zehn Jahre einen Haftpflichtschaden verursacht.) Die diskretisierte Einzelschadenhöhenverteilung sei tabellarisch folgendermaßen gegeben (monetäre Einheit: 1.000 EUR):

k	1	2	3
f_k	0,7	0,2	0,1

Als Lösung erhält man z. B. mit dem Excel-Arbeitsblatt *PANJER.XLS* (gerundet):

k	0	1	2	3	4	5
g_k	0,9048	0,0633	0,0203	0,0104	0,0009	0,0002

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Versicherter einen jährlichen Schaden von 3.000 EUR und mehr verursacht, beträgt hier also (nur):

$$P\left[X_\Delta \geq 3\right] = 1 - P\left[X_\Delta \leq 2\right] = 1 - (0{,}9048 + 0{,}0633 + 0{,}0203) = 0{,}0116.$$

Eine Besonderheit des Poisson-Frequenzmodells, das insbesondere für Naturgefahrenmodelle von Bedeutung ist, besteht in der Möglichkeit, auch Schäden aus gewissen *inhomogenen* (Teil-)Kollektiven zu aggregieren und ihre Summenverteilung explizit zu bestimmen.

Dazu nehmen wir an, dass das Gesamtkollektiv aus K in sich homogenen, aber unterschiedlichen Teilkollektiven besteht, wovon jedes für sich in folgender Art beschrieben werden kann:

- Jedes Teilkollektiv entspricht einem kollektiven Modell der Risikotheorie mit einer Poisson-verteilten Schadenfrequenz $\lambda_j > 0$ und einer Einzelschadenhöhenverteilung Q_j.
- Die Schadenfrequenzen und Einzelschadenhöhen aller Teilkollektive sind untereinander stochastisch unabhängig.

Dann lässt sich das Gesamtkollektiv beschreiben durch ein äquivalentes kollektives Modell der Risikotheorie mit der Poisson-verteilten Schadenfrequenz

$$\lambda = \sum_{j=1}^{K} \lambda_j$$

und der Einzelschadenhöhenverteilung

$$Q = \sum_{j=1}^{K} \frac{\lambda_j}{\lambda} Q_j.$$

Die zusammengesetzte Verteilung $Q = \sum_{j=1}^{K} \frac{\lambda_j}{\lambda} Q_j$ wird auch als *Mischung* der Einzelschadenhöhenverteilungen Q_1, ..., Q_K mit den Gewichten $\frac{\lambda_1}{\lambda}, \ldots, \frac{\lambda_K}{\lambda}$ bezeichnet. Diese Gewichte sind positiv und summieren sich zu 1.

Beispiel 5

Der zuletzt behandelte Sachverhalt wird u. a. in der Lebensversicherung angewendet, wenn ein Kollektiv aus Versicherten mit unterschiedlichen Altern x_j (und damit unterschiedlichen Sterblichkeiten q_{x_j}) und unterschiedlichen, aber je Altersgruppe identischen Versicherungssummen V_j vorliegt. In dem folgenden Beispiel beziehen wir der Einfachheit halber die nominalen Versicherungssummen auf Vielfache von 50.000 EUR:

Alter x_j	q_{xj}	Nominale Versicherungssumme	V_j	Anzahl Versicherte n_j
20	0,001	50.000 EUR	1	40
40	0,002	100.000 EUR	2	30
60	0,004	200.000 EUR	4	25

Es liegen drei in sich homogene Teilkollektive (zu den Altersgruppen 20/40/60) vor. Die Frequenzvariable N_j je Altersgruppe (Teilkollektiv) j lässt sich aufgrund der geringen Größe der Sterblichkeiten sehr gut durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable approximieren (Poisson'scher Grenzwertsatz; „Gesetz der kleinen Zahlen“) mit dem Parameter $E(N_j) = \lambda_j = q_{x_j} \cdot n_j$. Diese Größe stimmt zugleich mit der erwarteten Anzahl der Versicherungsleistungen (= Todesfälle) in der Versicherungsperiode überein. Tabellarisch ergibt sich also:

j	1	2	3	Summe
λ_j	0,04	0,06	0,1	$\lambda = 0{,}2$
$\frac{\lambda_j}{\lambda}$	0,2	0,3	0,5	1

Als Mischverteilung Q erhalten wir somit die folgende diskrete Verteilung:

k	1	2	3	4
$f_k = Q(\{k\})$	0,2	0,3	0	0,5

Als Lösung erhält man z. B. wieder mit dem Excel-Arbeitsblatt *PANJER.XLS* (gerundet):

k	0	1	2	3	4
g_k	0,81873	0,03275	0,04978	0,00197	0,08339

k	5	6	7	8	9
g_k	0,00333	0,00501	0,00020	0,00425	0,00017

Damit beträgt beispielsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an das Kollektiv mehr als dreimal 50.000 EUR = 150.000 EUR ausbezahlt werden, gerade $1-\left(g_0+g_1+g_2+g_3\right)=0{,}09677$.

Beispiel 6

Die Einzelschadenhöhenverteilung in einer Sturmversicherung sei gegeben durch die Dichte

$$f(x)=\frac{6x}{(1+x)^4} \quad \text{für } x>0$$

mit Verteilungsfunktion

$$f_k=\frac{F(k)-F(k-1)}{F(20)} \quad \text{für } x>0$$

(monetäre Einheit: 1 Mio. EUR). Die Anzahl der Stürme im Jahr sei Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\lambda=1{,}7$. Das Versicherungsunternehmen hat eine Reserve in Höhe von 8 Mio. EUR zur Begleichung der Sturmschäden gebildet. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der jährliche Gesamtschaden im Segment Sturm die Reserve übersteigt.

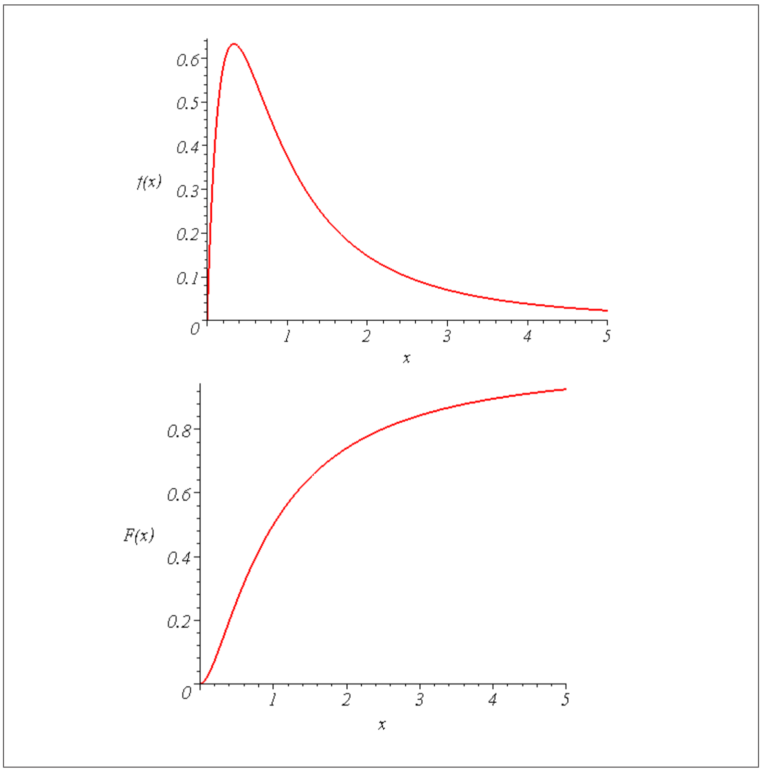


Abbildung 1: Dichte $f(x)$ (oben) und Verteilungsfunktion $F(x)$ (unten)
Quelle: eigene Darstellung

Für eine (approximative) Lösung mit der Panjer-Rekursion muss die Verteilung zunächst diskretisiert werden. Wir teilen dafür den Bereich [0,20] auf der x-Achse in 20 gleich große Teilintervalle der Länge 1 ein und wählen:

$$f_k = \frac{F(k) - F(k-1)}{F(20)} \quad \text{für k = 1, L, 20.}$$

Faktisch wird die Einzelschadenhöhenverteilung damit bei 20 Mio. EUR nach oben abgeschnitten; die Division durch $F(20)$ ist dabei notwendig, damit sich alle f_k zu eins addieren.

Die folgende Grafik zeigt die Verteilungsfunktion F^* der Diskretisierung (als Treppenfunktion) zusammen mit der originären Verteilungsfunktion F:

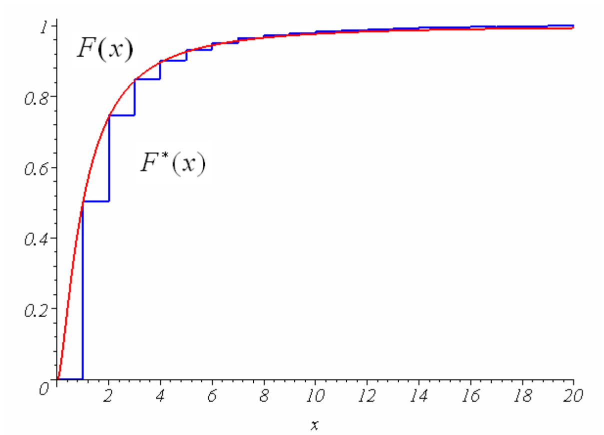


Abbildung 2: originäre und diskretisierte Verteilungsfunktion
Quelle: eigene Darstellung

Tabellarisch:

k	0	1	2	3	4	5	6
f_k	0	0,5033	0,2423	0,1037	0,0526	0,0301	0,0188

k	7	8	9	10	11	12	13
f_k	0,0125	0,0087	0,0063	0,0047	0,0036	0,0029	0,0023

k	14	15	16	17	18	19	20
f_k	0,0018	0,0015	0,0013	0,0011	0,0009	0,0008	0,0007

Numerisches Ergebnis der Panjer-Rekursion mit Excel:

k	0	1	2	3	4	5	6
g_k	0,1827	0,1563	0,1421	0,1157	0,0910	0,0702	0,0537

k	7	8	9	10	11	12	13
g_k	0,0410	0,0314	0,0241	0,0187	0,0146	0,0115	0,0091

k	14	15	16	17	18	19	20
g_k	0,0073	0,0059	0,0048	0,0040	0,0033	0,0028	0,0023

Hieraus folgt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der jährliche Gesamtschaden im Segment Sturm die Reserve übersteigt, ist

gegeben durch $1-\sum_{k=0}^{8} g_k = 0{,}11595.$

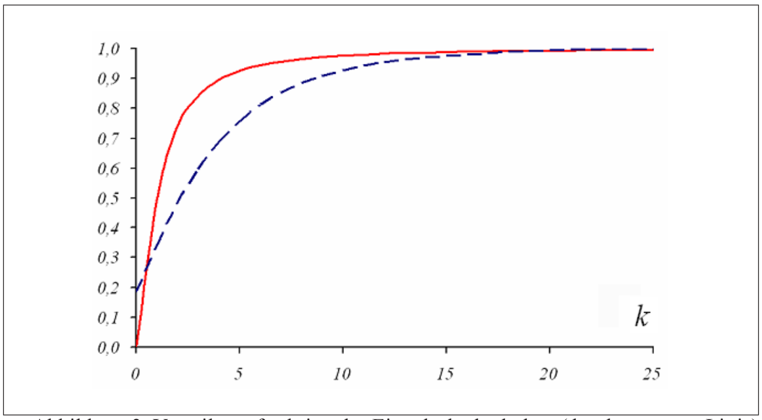


Abbildung 3: Verteilungsfunktion der Einzelschadenhöhen (durchgezogene Linie) und des Gesamtschadens nach Panjer-Rekursion, linear geglättet (gestrichelte Linie)
Quelle: eigene Darstellung

Übungsaufgabe 5

Ein Versicherungsunternehmen betreibt eine Feuerversicherung für gewerbliche Risiken. Im Risikohandbuch sind für die fünf größten Betriebe folgende Angaben zu finden (in Mio. EUR):

Betrieb	1	2	3	4	5
Maximalschaden	10	7	5	2	1
Eintrittswahrscheinlichkeit	0,001	0,002	0,002	0,02	0,1

Berechnen Sie approximativ mit der Panjer-Rekursion die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Kollektiv der fünf Betriebe ein jährlicher Schaden von 7 Mio. EUR und mehr entsteht.

Übungsaufgabe 6

Für die jährlichen Einzelschadenhöhen aus einer Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung für männliche Fahranfänger mit einer bestimmten Regional- und Typklasse wird aus Erfahrung eine Verteilung mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{für } x > 0$$

angenommen (monetäre Einheit: 500 EUR). Die Schadenfrequenz wird als Poisson-verteilt angenommen mit dem Erwartungswert $\lambda = 2{,}3.$ Wie groß ist nach dem kollektiven Modell der Risikotheorie die Bedarfsprämie? Wie groß ist approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahranfänger im Versicherungsjahr einen Gesamtschaden von maximal 1.000 EUR verursacht?

Hinweis: Der Erwartungswert $E[Y]$ einer Zufallsvariablen Y mit Verteilungsfunktion F kann alternativ berechnet werden über die Formel

$$E[Y] = \int_0^\infty \left(1 - F(x)\right) dx.$$

Vertiefungen zu diesem Abschnitt finden Sie in den Büchern von Cottin/Döhler (Abschnitte 2.3.5 und 2.5.3), Mack (Abschnitt 1.4) und Schmidt (Kapitel 7).

1.3 Modelle für Naturgefahren

Die weitaus größten Risiken in der Schadenversicherung gehen auf häufiger wiederkehrende Naturkatastrophen wie Stürme, Überschwemmungen, Erdbeben oder ganze Landstriche betreffende Großbrände zurück. Erstversicherungsunternehmen beteiligen fast immer einen oder mehrere in der Regel international operierende

Rückversicherer an den auf sie entfallenden Schäden dieser Art, wodurch eine weltweite *Diversifizierung* dieser Risiken erfolgt, ohne die eine stabile Versicherungswirtschaft gar nicht möglich wäre.

Die beobachteten zeitlichen Zunahmen sowohl der Schadenhöhen wie auch der Schadenfrequenzen sind dabei sehr wahrscheinlich nicht nur durch die aktuell diskutierten möglichen klimatischen Veränderungen bedingt, sondern auch durch ökonomische Faktoren wie Inflation oder zunehmende Wertekonzentrationen in für Naturgefahren exponierten Lagen (z. B. Bebauung in küsten- und flussnahen Gebieten oder im Gebirge).

In der Praxis haben sich in der jüngeren Vergangenheit Risiko-Analysen auf der Basis so genannter *geophysikalischer Modelle* als sehr effizient herausgestellt, bei denen die jährlichen Schadenfrequenzen und Einzelschadenhöhen im Rahmen eines geeigneten *kollektiven Modells der Risikotheorie* hinterlegt sind. Das im vorangegangenen Abschnitt besprochene Poisson-Frequenzmodell spielt hier eine wesentliche Rolle, weil für die einzelnen Naturgefahren historische Szenarien (*Historic Event Sets*) vorliegen, die den homogenen Teilkollektiven des Poisson-Frequenzmodells entsprechen. Durch stochastische Perturbationen der zusammen mit den Szenarien hinterlegten geophysikalischen Parameter wie Windrichtung und Zugbahn, Windgeschwindigkeit, Sturmdauer, Lage der Epizentren von Erdbeben, Art und Stärke der Schockwellenausbreitung usw. lassen sich hieraus aber leicht weitere repräsentative virtuelle Szenarien generieren (*Stochastic Event Sets*), die mühelos 50.000 und mehr Einträge umfassen können. Wählt man unter diesen Szenarien diejenigen aus, die ein bestimmtes Versicherungskollektiv tangieren (z. B. die gegen Sturmschäden oder Überschwemmung versicherten Gebäude einer Versicherungsgesellschaft in Norddeutschland), lassen sich auf diese Weise mit dem Computer alle wesentlichen Aspekte der Schadenverteilung für das Kollektiv berechnen oder simulieren.

Die Basisversion eines geophysikalischen Modells ist durch zwei wesentliche Eingabeparameter gekennzeichnet:

- den typischen oder durchschnittlichen Schaden L_j (*Loss*), der bei jeder Realisation des Szenarios j eintritt
- den Schadenfrequenz-Parameter λ_j (*Rate*), d. h. die erwartete Anzahl des wiederholten Eintretens des Szenarios j pro Jahr

Eine Auflistung dieser Parameter in tabellarischer Form wird üblicherweise als *Event Loss Table* (ELT) bezeichnet.

Da die Schadenfrequenzen λ_j in realen geophysikalischen Modellen relativ klein ausfallen (typischerweise deutlich unterhalb von 1), stimmen sie aufgrund der Formeln für die Poisson-Verteilung in sehr guter Näherung mit der Eintrittswahrscheinlichkeit des Szenarios j überein.

Siehe Lektion 1, „Finanzmathematische Grundlagen“.

In der Versicherungstechnik – insbesondere im Hinblick auf eine sinnvolle Rückversicherungsstruktur – sind die folgenden Schadentypen besonders interessant:

- der Jahresgesamtschaden S (*Aggregate Loss*)
- der Jahresmaximalschaden M, der auch als Ereignisschaden (*Occurrence Loss*) bezeichnet wird

Es hat sich eingebürgert, diese beiden Schadentypen durch die jeweilige komplementäre Verteilungsfunktion (Überschreitungswahrscheinlichkeiten) zu beschreiben, also:

$$AEP(x) = P(S > x) \quad \text{und} \quad OEP(x) = P(M > x) \quad \text{für } x > 0.$$

Hierbei steht *AEP* für *„Aggregate Loss Exceeding Probability“* und *OEP* für *„Occurrence Loss Exceeding Probability“*.

Die Verteilung des Jahresgesamtschadens S und damit die *AEP*-Kurve lässt sich bequem mit der Panjer-Rekursion des vorigen Abschnitts berechnen, wenn die im Basismodell als deterministisch angenommenen Schäden L_j ganzzahlige Vielfache einer geeigneten monetären Einheit sind (z. B. 1.000 EUR). Die zur Rechnung benötigte Mischverteilung ist hier sehr einfach: Es ist die diskrete Verteilung mit den „Ergebnissen“ L_j und den „Eintrittswahrscheinlichkeiten“ $\frac{\lambda_j}{\lambda}$ mit $\lambda = \sum_j \lambda_j$.

Siehe Lektion 1, „Finanzmathematische Grundlagen“, Abschnitt 2.1.

Das Poisson-Frequenzmodell erlaubt auch eine einfache Berechnung der *OEP*-Kurve, wenn die Szenarien nach Größe der Schäden L_j angeordnet sind, d. h., wenn gilt:

$$L_1 < L_2 < \cdots < L_j < \cdots.$$

Die *OEP*-Kurve hat dann die Form:

$$P\left(M > L_j\right) = 1 - \exp\left\{-\sum_{i>j} \lambda_i\right\}, \quad j = 1, 2, \cdots.$$

Beispiel 7

Für die Analyse des Sturmrisikos eines Kollektivs liegt folgende Basis-ELT vor (monetäre Einheit: 1 Mio. EUR):

Szenario j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	λ
Loss L_j	1	2	4	5	7	8	10	11	12	15	
Rate λ_j	1	0,8	0,1	0,16	0,05	0,03	0,04	0,01	0,05	0,01	2,25

Als Lösung erhält man mit dem Excel-Arbeitsblatt *ELT.XLS* folgende Grafik (linear geglättet):

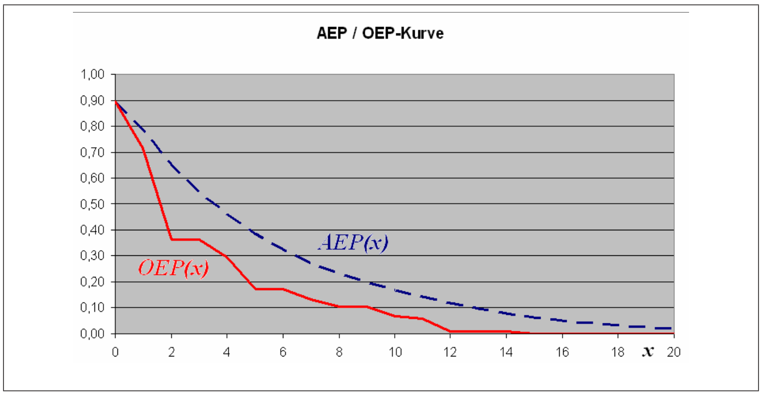


Abbildung 4: AEP- und OEP-Kurve
Quelle: eigene Darstellung

Es ist anschaulich klar, dass die *AEP*-Kurve immer oberhalb der *OEP*-Kurve liegt, weil der Jahressummenschaden S immer mindestens so groß wie der Jahresmaximalschaden M ist. Die *AEP*-Kurve ist typischerweise auch immer weniger wellig als die *OEP*-Kurve.

Fortgeschrittene geophysikalische Modelle enthalten neben den deterministischen Schäden L_j auch Angaben zu den Standardabweichungen oder sogar ganze Verteilungsmodelle (sogenannte *Secondary Uncertainties*). Meist werden auch noch Varianten für die Frequenzverteilungen der Szenarien betrachtet. Die *AEP*- und *OEP*-Kurven können dann im Allgemeinen nicht mehr explizit berechnet werden; sie werden in diesen Fällen alternativ mit Methoden der Monte-Carlo-Simulation generiert.

Vergleiche Lektion 2, „Finanzmathematik und Investment-management“.

Die einzelnen Komponenten eines geophysikalischen Modells folgen grundsätzlich folgendem Aufbau:

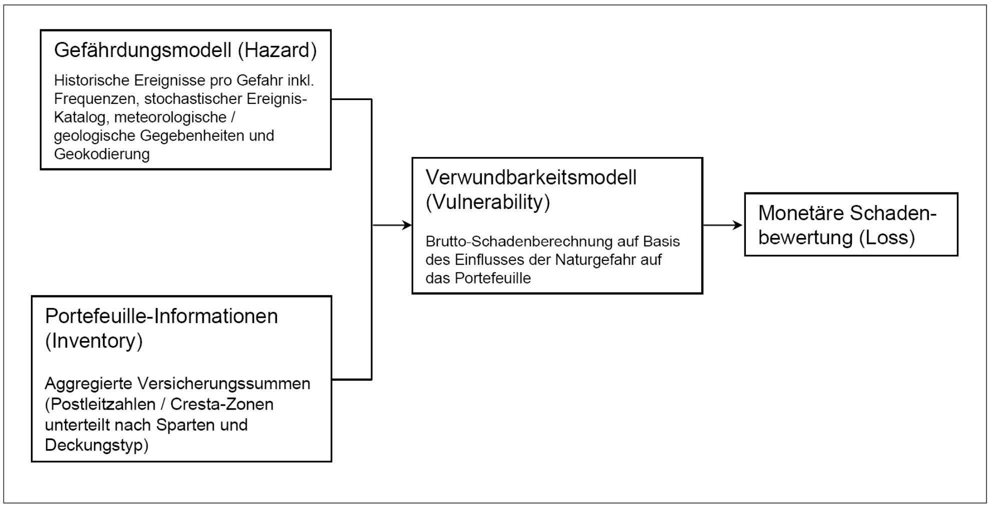


Abbildung 5: Modularer Aufbau geophysikalischer Modelle
Quelle: modifiziert nach Grossi/Kunreuther (2005)

Das *Gefährdungsmodul* enthält neben den historischen und synthetischen Ereignissen (Szenarien) die Schadenfrequenz-Parameter (*Rates*) λ_j im Poisson-Frequenzmodell oder andere Angaben und Parameter für alternative Frequenzverteilungen.

Das *Inventarmodul* gibt u. a. Auskunft darüber, wo sich die versicherten Objekte befinden, welche Art von Versicherung vorliegt und wie groß die betroffenen Versicherungssummen sind.

Das *Verwundbarkeitsmodul* beruht sehr wesentlich auf ingenieurwissenschaftlichen Erkenntnissen darüber, welche Schäden (Art und Höhe) je nach geophysikalischen Gegebenheiten an den versicherten Objekten entstehen können. Die dabei als Funktion von Winddruck, Windstärke, Magnitude (MMI) bei Erdbeben, Überschwemmungshöhe und -dauer usw. verwendeten Kurven zur Darstellung des Grades der Beschädigung heißen *Damage Functions* und bilden vor allem bei den kommerziellen Anbietern geophysikalischer Modelle ein Herzstück ihrer Produkte.

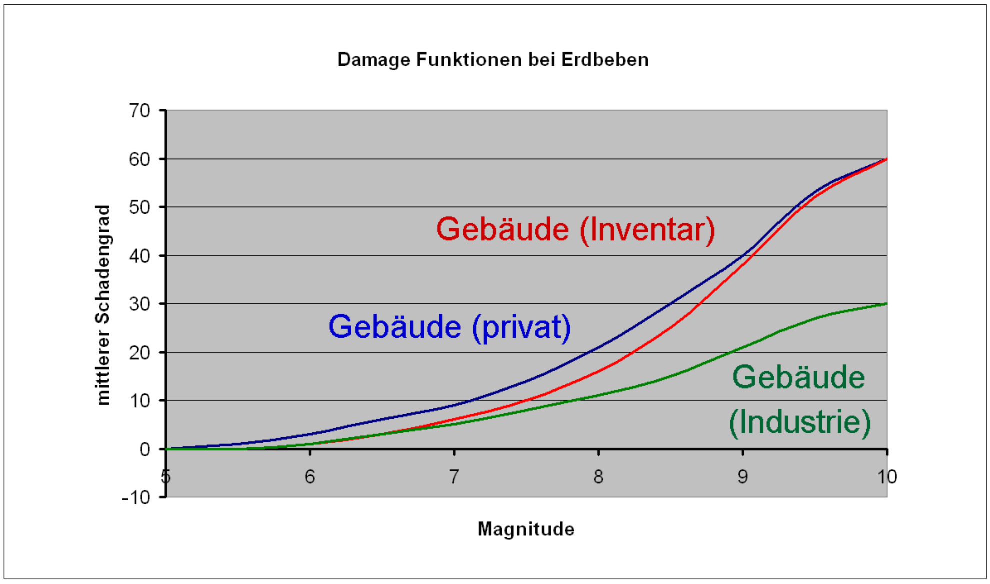


Abbildung 6: Typische Schadengradkurven bei Erdbeben
Quelle: eigene Darstellung

Das *Schadenbewertungsmodul* transferiert schließlich die Beschädigungsgrade in äquivalente Geldgrößen; hierdurch ergeben sich im Prinzip die monetären Schäden L_j (*Losses*).

Übungsaufgabe 7

Ein Versicherungsunternehmen betreibt eine verbundene Gebäudeversicherung (VGV) für private Wohngebäude. Die Gebäude liegen in zwei verschiedenen Regionen R_1 und R_2. Je nach Region können fünf verschiedene Sturmszenarien eintreten. Die folgende Tabelle gibt – regional differenziert – die zugehörigen Event Loss Tables wieder (monetäre Einheit: 1 Mio. EUR):

R_1	Szenario	1	2	3	4	5
	Loss	1	2	4	5	7
	Rate	1,2	0,8	0,3	0,15	0,05
R_2	Szenario	1	2	3	4	5
	Loss	1	3	4	5	6
	Rate	0,9	0,4	0,1	0,05	0,05

a) Berechnen Sie die *AEP*- und *OEP*-Kurven regional differenziert sowie für den Gesamtbestand.

b) Für beide Regionen sollen jeweils Reserven in Höhe des 99,5 %-Quantils der Gesamtschadenverteilung gebildet werden (Solvency-II-Standard).

c) Welcher Diversifikationseffekt ergibt sich, wenn man statt der regionalen Differenzierung eine Reserve in Höhe des 99,5 %-Quantils der Gesamtschadenverteilung für den Gesamtbestand bildet?

Vertiefungen zu diesem Abschnitt finden Sie in den Büchern von Grossi/Kunreuther, Diers (Abschnitt 4.4.3.1) und Kortebein et al. (Abschnitt 4.3.4).

Quintessenz

Stochastische Modelle sind die Grundlage sämtlicher aktuarieller Betrachtungen in der Schaden-/Unfallversicherung. Mit ihnen lassen sich alle versicherungstechnischen Risiken, die in einem Versicherungsunternehmen dieser Ausrichtung auftreten, erfassen und quantitativ beschreiben.

2 Grundlagen der Tarifierung

Sie haben zu Beginn des Kapitels 1 dieser Lektion bereits das grundlegende Prinzip der Sachversicherung kennen gelernt. Durch den charakteristischen Risikoausgleich im Kollektiv und in der Zeit wird der Beitrag jedes Versicherten tendenziell stabilisiert; er nähert sich der *Bedarfsprämie* an. Bedingt durch den zufälligen Charakter des Schadenaufkommens im Kollektiv ist es jedoch auch in einem homogenen Bestand immer möglich, dass die zu begleichenden Schäden das eingenommene Prämienvolumen übersteigen. Eine Beschränkung auf die reine Bedarfsprämie führt im Laufe der Zeit mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit zum technischen Ruin; aus diesem Grund muss die tatsächliche Prämie, die jeder Versicherte zu entrichten hat, angepasst werden. Eine Möglichkeit, wie man dies unter Heranziehung des zentralen Grenzwertsatzes im individuellen Modell der Risikotheorie leisten kann, haben Sie ebenfalls schon in Kapitel 1 gelernt.

In den nachfolgenden Abschnitten werden die Überlegungen, wie man zu einer risikogerechten Prämie gelangt, weiter vertieft.

2.1 Statistische Methoden zur Datenauswertung

Die Bedarfsprämie ist als theoretische Größe über das *Gesetz der großen Zahlen* und damit als *Erwartungswert* des zugrunde liegenden Risikos X im Sinne einer Zufallsvariablen definiert. Zur Berechnung von Prämien für ein homogenes Kollektiv ist es daher zunächst erforderlich, aus beobachteten Schäden der Vergangenheit eine passende Wahrscheinlichkeitsverteilung für X zu bestimmen. Mit einem so genannten *Quantil-Quantil-Plot* (Q-Q-Plot) bietet sich für den ersten Schritt ein grafisches Verfahren an, mit dem man die Güte der Übereinstimmung zwischen Modell und Daten visuell überprüfen kann.

Bei einem Q-Q-Plot geht man davon aus, dass das Modell durch zwei reelle Parameter μ und $\sigma > 0$ gekennzeichnet ist, die man *Lage-* und *Skalenparameter* nennt. Dahinter verbirgt sich die Vorstellung, dass das untersuchte Risiko X durch eine lineare Transformation $X = \mu + \sigma Z$ aus einem Risikoprototypen Z, der eine bekannte Verteilung Q besitzt, hervorgeht, oder umgekehrt, dass das linear transformierte Risiko $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ der bekannten Verteilung Q folgt. Die durch die Transformation $X = \mu + \sigma Z$ entstehenden Verteilungen fasst man unter dem Begriff der *durch Q induzierten Lage-Skalenfamilie* zusammen. Ein klassisches Beispiel ist die Familie der Normalverteilungen $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$, denn genügt X einer solchen Verteilung, dann ist $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ gerade N(0,1)-verteilt. Diese Transformation ist in der Statistik auch als *z-Transformation* bekannt.

In vielen Fällen stammt die Verteilung des Risikos X nicht sofort aus einer Lage-Skalenfamilie, sondern muss vorher entsprechend transformiert werden. Ein typisches Beispiel hierfür ist die Familie der *Lognormalverteilungen* $\mathbf{LN}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Vergleiche dazu Lektion 1, „Finanzmathematische Grundlagen“.

Das logarithmisch transformierte Risiko $Y = \ln(X)$ ist hier normal verteilt, sodass die Methodik der Q-Q-Plots auf das logarithmierte Risiko anwendbar ist.

Die dem Q-Q-Plot zugrunde liegende Idee ist einfach zu formulieren: Man vergleicht zwei Zahlenreihen miteinander. Die eine besteht aus angeordneten Quantilen der Prototypverteilung

$$Q,\ q_1 = F^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right), \cdots, q_n = F^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right),$$

wobei F die zugehörige Verteilungsfunktion bezeichnet, die andere aus den der Größe nach sortierten Daten. Die Quantilreihe kann man in einem idealisierten Sinn auch als „theoretische Stichprobe“ aus der Prototypverteilung Q auffassen. Stammen die Daten aus der vermuteten Lage-Skalenfamilie, dann ergibt sich beim Abtragen der Datenreihe gegen die Quantilreihe näherungsweise eine Gerade. Wäre die Datenreihe idealerweise eine „theoretische Stichprobe“ aus der Risikoverteilung von X, so ergäbe sich exakt eine Gerade, mit dem Achsenabschnitt μ und der Steigung σ. Neben einer visuellen Überprüfung, ob die Punktepaare der beiden Zahlenreihen (zumindest näherungsweise) einer Geraden nahekommen, lassen sich die charakteristischen Lage- und Skalenparameter zusätzlich noch durch die Bestimmung einer *Regressionsgeraden* nach der *Methode der kleinsten Abweichungsquadrate* ermitteln. (Diese Funktionalität ist beispielsweise in Excel hinterlegt.)

Beispiel 8

Bei einer Betriebsunterbrechungsversicherung für das produzierende Gewerbe wurden in den Jahren 2000 bis 2009 folgende gemeldete Schäden[2] registriert (monetäre Einheit: 1.000 EUR):

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Schaden	1,6	104,0	4,7	22,4	14,1	41,7	8,8	23,1	7,7	3,4

2 Die Daten stammen in verfremdeter Form aus einem realen Bestand.

Als Lösung erhält man mit dem Excel-Arbeitsblatt *QQPlot.XLS* nach logarithmischer Transformation der Schäden und der Normalverteilung als Prototypverteilung folgende Grafik:

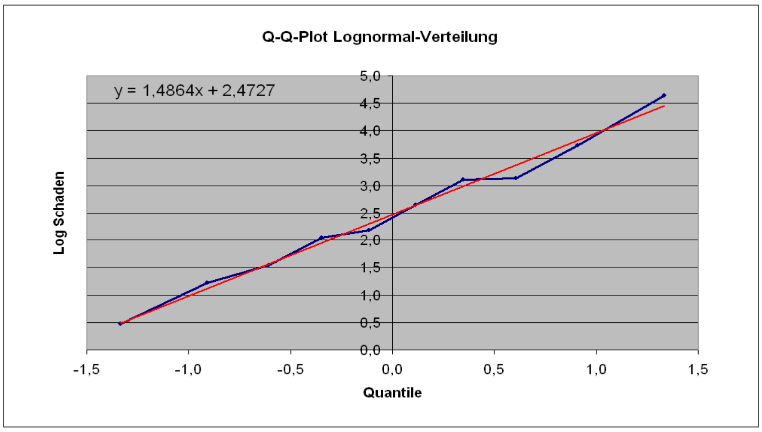


Abbildung 7: Q-Q-Plot zu Beispiel 8
Quelle: eigene Darstellung

Die rote Linie entspricht der mit Excel automatisiert erzeugten Regressionsgeraden mit dem Achsenabschnitt $\hat{\mu} = 2{,}4727$ und der Steigung $\hat{\sigma} = 1{,}47925$. Da die Anpassung der Daten an eine Gerade ausreichend gut erscheint, entscheiden wir uns zur Akzeptanz des Verteilungsmodells. Für die Originalschäden bedeutet das also die Akzeptanz einer Lognormalverteilung mit den aus der Regression geschätzten Parametern $\hat{\mu} = 2{,}4727$ und $\hat{\sigma} = 1{,}47925$.

Mit dieser Schätzung ergibt sich eine Bedarfsprämie BP für das Kollektiv in Höhe von (vgl. Lektion 1, Abschnitt 2.3.4):

$$BP = \exp\left(\hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right) = 35{,}778$$

oder 35.778 EUR. Zum Vergleich: Das arithmetische Mittel der beobachteten Schäden beträgt demgegenüber nur 23.150 EUR!

Neben dem beschriebenen grafischen Verfahren gibt es auch rigorose statistische Testverfahren, mit denen die Hypothese, dass eine bestimmte Verteilung vorliegt, überprüft werden kann (x^2-*Anpassungstest*, *Kolmogoroff-Smirnoff-Test*, *Anderson-Darling-Test* u. a.) Die Hintergründe dieser Verfahren sind allerdings zu komplex, um hier behandelt werden zu können.

Hat man sich einmal für eine passende Verteilungsfamilie für das Risiko X entschieden, lassen sich die Parameter alternativ z. B. auch mit der *Maximum-Likelihood-Methode* (ML-Methode) bestimmen.

Vergleiche Lektion 1, „Finanzmathematische Grundlagen“.

Im Falle einer Lognormalverteilung $\mathbf{LN}\left(\mu,\sigma^2\right)$ erhält man aus den Originalschäden $x_1,\cdots,x_n$ ganz ähnlich wie bei der Normalverteilung folgende ML-Schätzer:

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(x_i\right)$$
$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(x_i\right)-\hat{\mu}\right)^2.$$

Die Bedarfsprämie BP wird dann wieder mit der obigen Formel bestimmt. Für den Datensatz aus Beispiel 8 ergibt sich nach dieser Methode der gleiche Schätzer $\hat{\mu}=2{,}4727$ wie beim Q-Q-Plot, aber der kleinere Schätzer $\hat{\sigma}=1{,}1781,$ was zu einer entsprechend geringeren Bedarfsprämie $BP = 23.730$ EUR führt. Bemerkenswert ist, dass auch diese noch knapp über dem Mittelwert von 23.150 EUR liegt.

Es gibt keine eindeutige Methode, um anhand beobachteter Schäden das „richtige“ Verteilungsmodell für das zugrunde liegende Risiko und damit die Bedarfsprämie als Erwartungswert zu bestimmen. Meist gibt es sogar konkurrierende Modellanpassungen mit unterschiedlichen Schätzungen für die Parameter oder daraus abgeleitete Größen. Je nach Zielsetzung muss man dann entsprechend vorsichtig vorgehen. Bei der Tarifierung sollte man unter verschiedenen Alternativen daher eher größere als zu kleine Schätzwerte für die Bedarfsprämie auswählen.

Übungsaufgabe 8

Untersuchen Sie unter Verwendung des EXCEL-Tabellenblatts *QQPlot.XLS*, wie die Schätzer für μ und σ bzw. die Bedarfsprämie auf den größten beobachteten Schaden des Jahres 2001 in Beispiel 8 reagieren, indem Sie diesen Wert der Reihe nach durch die Zahlen 100, 90, 80, 70 ersetzen. Wie reagiert darauf der Q-Q-Plot?

Übungsaufgabe 9

Es gibt Lage-Skalenfamilien von Verteilungen, für die die ML-Schätzer nicht elementar berechnet werden können, z. B. bei der *Logistischen Verteilung* (vgl. Lektion 1, Abschnitt 2.2.1, Beispiel 8). Ein Q-Q-Plot ist aber auch in diesem Fall durchführbar.

a) Zeigen Sie, dass hier die theoretischen Quantile gegeben sind durch

$$q_k = \ln\left(\frac{k}{n+1-k}\right), \; k = 1, \cdots, n.$$

b) Erstellen Sie unter Verwendung des Excel-Arbeitsblatts *QQPlot.XLS* einen Q-Q-Plot für die logarithmierten Schäden aus Beispiel 8 mit der logistischen Verteilung als Prototyp. (Die sich hieraus ergebende Verteilung für die Originalschäden heißt sinngemäß *loglogistische Verteilung*.)

c) Vergleichen Sie die sich jetzt ergebende Bedarfsprämie mit derjenigen aus dem Lognormalverteilungsansatz.

Vertiefungen zu diesem Abschnitt finden Sie in dem Buch von Cottin/Döhler, Kapitel 6.

2.2 Prämienkalkulationsprinzipien

Wir greifen hier einen schon in Abschnitt 1.1 behandelten Gedanken wieder auf, der für den langfristigen Bestand eines Versicherungsunternehmens von zentraler Bedeutung ist. Sie haben bisher gelernt, dass die *Bedarfsprämie* in einem homogenen Kollektiv diejenige Prämie ist, die sich aus dem Umlageprinzip aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen bei wachsendem Bestand oder im zeitlichen Verlauf der Versicherung ergibt. Sie ist allerdings nicht ausreichend, um die Möglichkeit eines technischen Ruins angemessen zu kontrollieren. Die Bedarfsprämie muss daher geeignet angepasst werden, um den Fortbestand des Unternehmens mit hoher Sicherheit zu garantieren. Hierbei ist auf einen fairen Interessenausgleich zwischen den Versicherten und dem Unternehmen zu achten: Wird die Prämie zu hoch, besteht kein Anreiz, Versicherungsschutz im Kollektiv zu suchen, ist sie zu niedrig, läuft der Versicherte Gefahr, dass auftretende Schäden eventuell nicht mehr reguliert werden können. Ferner müssen in die Prämie auch anteilige Betriebs- und Verwaltungskosten eingerechnet werden. Dies ist aber nicht Gegenstand dieser Lektion.

Es macht Sinn, Überlegungen der obigen Art mathematisch durch so genannte *Prämienkalkulationsprinzipien* zu präzisieren und zu systematisieren.

Als eine grundlegende Anforderung sollte ein *Prämienkalkulationsprinzip* nur von der zufälligen Systematik der einzelnen Risiken abhängen, also von ihren (*Wahrscheinlichkeits-)Verteilungen*. Die Verteilung eines Risikos X ist aber bereits durch die zugehörige *Verteilungsfunktion* F_X vollständig bestimmt.

Siehe Lektion 1, „Finanzmathematische Grundlagen“.

Bezeichnen wir mit $\mathcal{R}$ die Menge der Risiken X, für die eine Prämie $H(X)$ bestimmt werden soll, lässt sich dieser Grundsatz folgendermaßen formalisieren:

$$F_X = F_Y \;\Rightarrow\; H(X) = H(Y) \text{ für alle } X, Y \in \mathcal{R}.$$

Offensichtlich genügt die Bedarfsprämie selbst schon einem Prämienkalkulationsprinzip, da der Erwartungswert einer Zufallsvariablen die obige Eigenschaft besitzt.

Weitere sinnvolle Anforderungen an ein solches Prinzip sind im Folgenden zusammengestellt.

Ein Prämienkalkulationsprinzip H heißt

a) *erwartungswertübersteigend (eü)*, wenn gilt: $H(X) \geq E(X)$ für alle $X \in \mathcal{R}$;

b) *positiv homogen (ph)*, wenn gilt: $H(cX) = c\,H(X)$ für alle $c \geq 0$ und $X \in \mathcal{R}$;

c) *additiv (ad)*, wenn gilt: $H(X + Y) = H(X) + H(Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{R}$**;** die *stochastisch unabhängig* sind

d) *subadditiv (sa),* wenn gilt: $H(X + Y) \leq H(X) + H(Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{R}$**;** die *stochastisch unabhängig* sind

e) *maximalschadenbegrenzt (ms)*, wenn gilt: $H(X) \leq M(X)$ für alle $X \in \mathcal{R}$; wobei $M(X)$ den rechnerisch möglichen Maximalschaden für das Risiko X bezeichne

f) *stochastisch monoton (sm)*, wenn gilt: $H(X) \leq H(Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{R}$ mit $F_X \geq F_Y$.

Die Eigenschaft a) sollte jedes Prämienkalkulationsprinzip aus Vorsichtsgründen mindestens besitzen; dazu haben wir bereits oben einiges ausgeführt. Die Eigenschaft b) der positiven Homogenität bedeutet, dass die monetäre Skala keine Rolle spielt, also die Prämie in Euro oder Dollar bis auf den Wechselkursfaktor gleich ist. Die Eigenschaften c) und d) garantieren einem Versicherungsnehmer, dass der Abschluss zweier Versicherungsverträge aus sich nicht gegenseitig beeinflussenden Risiken für ihn kostenneutral ist. Die Eigenschaft d) wird auch als *Diversifikationseffekt* bezeichnet, weil hier der Grundsatz zum Tragen kommt, dass sich Risiken im Kollektiv ausgleichen. Eigenschaft e) bedeutet, dass die Versicherung überhaupt ein Risiko trägt (anderenfalls wäre es für den Versicherungsnehmer besser, gar keine Versicherung abzuschließen), und Eigenschaft f) bedeutet, dass eine Versicherung von Risiken Y, die häufiger die Grenze x überschreiten als Risiken X, also für die die äquivalente Beziehung $1-F_Y(x) \geq 1-F_X(x)$ gilt, entsprechend teurer ist. Diese Eigenschaft ist sicher dann erfüllt, wenn für die Risiken die Relation $X \leq Y$ gilt.

Es ist offensichtlich, dass die Bedarfsprämie formal allen sechs Eigenschaften genügt; allerdings ist sie aus den bekannten Gründen wirtschaftlich nicht vertretbar. Es ist daher wichtig, auch andere Prämienkalkulationsprinzipien auf ihre Anwendbarkeit zu untersuchen. Im Folgenden werden Sie einige in der Praxis verwendeten Prämienkalkulationsprinzipien H genauer kennen lernen.

Es sei $\delta \geq 0$ (Zuschlagsfaktor), $\alpha \in (0,1)$ (Risikowahrscheinlichkeit). Dann heißt H mit

a) $H(X) = (1+\delta)E[X]$ *Erwartungswertprinzip (EwP)*
b) $H(X) = E[X] + \delta Var[X]$ *Varianzprinzip (VaP)*
c) $H(X) = E[X] + \delta\sqrt{Var[X]}$ *Standardabweichungsprinzip (StP)*
d) $F_X\left(H(X)\right) \geq 1-\alpha$ *Quantilprinzip (QuP)*

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die oben formulierten Eigenschaften dieser Prämienkalkulationsprinzipien.

Eigenschaft / Prinzip	*eü*	*ph*	*ad*	*sa*	*ms*	*sm*
EwP	ja	ja	ja	ja	nein*	ja
VaP	ja	nein	ja	ja	nein*	nein
StP	ja	ja	nein	ja	nein*	nein
QuP	nein*	ja	nein	nein	ja	ja

Die globale Verletzung einiger Kriterien wie (*eü*) oder (*ms*) durch gewisse Prämienkalkulationsprinzipien ist nicht notwendig kritisch, da durch eine entsprechende Wahl der Parameter für jede konkrete Risikoverteilung die Einhaltung erreicht werden kann (gekennzeichnet durch *).

Die in Abschnitt 1.1 betrachtete Situation mit dem Sicherheitszuschlag

$$\delta_n = \frac{\sigma \cdot N^{-1}(1-\alpha)}{\sqrt{n}}$$

beinhaltet Aspekte verschiedener Prämienprinzipien: Es handelt sich hier offensichtlich formal um ein Standardabweichungsprinzip (mit einem Zuschlagsfaktor, der mit der Größe des Kollektivs abnimmt), von der Intention her entspricht es aber eigentlich einem Quantilprinzip (Kontrolle der Ruinwahrscheinlichkeit).

Vertiefungen zu diesem Abschnitt finden Sie in dem Buch von Schmidt (Kapitel 12).

2.3 Erfahrenstarifierung (Credibility)

In einigen Geschäftszweigen der Schaden-/Unfallversicherung möchte man bei der Tarifgestaltung die Schadenerfahrungen des Versicherten berücksichtigen, um ihn „risikogerecht“ einzugruppieren. Dies betrifft vor allem Sparten, in denen der Versicherte durch sein persönliches Verhalten unmittelbar Einfluss auf das Schadengeschehen nimmt, z. B. in der Kfz-Haftpflichtversicherung, aber auch in Teilen der Lebens- und Krankenversicherung (Raucher/Nichtraucher, übergewichtig/normalgewichtig usw.). Dies ist in einem gewissen Sinn auch gerecht, da die Gemeinschaft der Versicherten in erster Linie nur die unabwendbaren (rein zufälligen) Risiken kollektivieren soll, nicht aber die durch persönliches Fehlverhalten provozierten Schäden. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer risikogerechten *Prämiendifferenzierung*.

Bei der Erfahrenstarifierung oder *Credibility-Theorie* geht man davon aus, dass die Risikosituation jedes Versicherten durch einen so genannten Strukturparameter ϑ charakterisiert ist, den man aber a priori nicht kennt, wenn der Versicherte in das Kollektiv eintritt. Anders ausgedrückt: die Verteilungsfunktion F_X des Risikos X hängt zusätzlich von dem Strukturparameter ϑ funktional ab. Der Parameter ϑ wird als Realisierung einer Zufallsvariablen Θ angesehen; die Verteilung von Θ nennt man *Strukturverteilung*. Formal betrachtet man hier bedingte Wahrscheinlichkeiten ähnlich den bedingten Erwartungen in der Finanzmathematik.

Siehe Lektion 1, „Finanzmathematische Grundlagen“.

Der Ausdruck

$$F_X(x;\vartheta) = P(X \leq x | \Theta = \vartheta)$$

entspricht hier der bedingten Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Risiko X nicht größer als x ausfällt, wenn der Strukturparameter den Wert ϑ annimmt. Die unbedingte Verteilung des Risikos X im Kollektiv stellt sich dadurch als eine Mischung der einzelnen Verteilungen mit den verschiedenen Werten dar, die Θ annehmen kann.

Eine mögliche Vorgehensweise zur Schätzung der risikogerechten Bedarfsprämie $H(\vartheta) = E[X | \Theta = \vartheta]$, die dem tatsächlich vorliegenden, aber unbekannten Strukturparameter J zuzuordnen wäre, besteht darin, dass man eine geeignete Gewichtung zwischen der nichtbedingten Kollektivbedarfsprämie $E[X]$ und dem arithmetischen Mittel der im Laufe der Zeit beobachteten Schäden $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ vornimmt, formal über den Ansatz

$$H_n^* = \alpha_n \overline{X}_n + (1-\alpha_n) E[X].$$

Die Gewichte α_n sind dabei so zu bestimmen, dass die mittlere quadratische Abweichung zwischen der „wahren“ Prämie $H(\Theta)$ und der *Credibility-Prämie* H_n^* möglichst klein wird. Die hier nicht explizit herleitbare Lösung dieses Optimierungsproblems ist gegeben durch

$$\alpha_n = \frac{Var(H(\Theta))}{Var(\overline{\mathbf{X}}_n)} = \frac{Var(H(\Theta))}{\frac{1}{n} E[Var(X | \Theta)] + Var(H(\Theta))}.$$

Man sieht sofort, dass mit wachsendem n die Gewichte monoton gegen eins streben. Damit wird der gewünschte Effekt erzielt: Im Laufe der Zeit orientiert sich die differenzierte Bedarfsprämie immer mehr am Durchschnitt der beobachteten Schäden; nur am Anfang der Versicherung wird die Credibility-Prämie von der nichtdifferenzierten Kollektivbedarfsprämie dominiert.

Zur Berechnung der Gewichte ist allerdings Kenntnisse über die Strukturverteilung erforderlich.

Beispiel 9

Wir nehmen stark vereinfachend an, dass bei einer Kfz-Haftpflichtversicherung die jährliche Durchschnittsschadenhöhe 5.000 EUR beträgt. Das Versicherungsrisiko für einen Versicherten lässt sich damit auf die Schadenfrequenz X reduzieren, für die wir wieder sehr vereinfachend eine bedingte Binomialverteilung $\mathbf{B}(1;\vartheta)$ mit Strukturparameter $\vartheta \in (0,1)$ annehmen (d. h., pro Jahr und Versicherten tritt maximal ein Unfall ein). Wegen $\vartheta = E[X|\Theta = \vartheta]$ charakterisiert der Strukturparameter ϑ damit die individuelle Risikoneigung des Versicherten: Ist ϑ hoch, verursacht der Versicherte tendenziell häufiger Unfälle, ist ϑ niedrig, verursacht der Versicherte tendenziell seltener Unfälle. Zur Konkretisierung des Beispiels nehmen wir weiter vereinfachend an, dass es nur zwei Risikoklassen für „vorsichtige" und „unvorsichtige" Fahrer gibt, die durch $\vartheta = 0{,}1$ bzw. $\vartheta = 0{,}2$ charakterisiert sind. Der „vorsichtige" Fahrer verursacht also im Mittel nur einen Schaden alle zehn Jahre, der „unvorsichtige" einen alle fünf Jahre. Geht man davon aus, dass es im Kollektiv etwa dreimal so viele „vorsichtige" wie „unvorsichtige" Fahrer gibt, besitzt Θ die folgende diskrete Verteilung:

ϑ	0,1	0,2
$P(\Theta = \vartheta)$	3/4	1/4

Nach den obigen Voraussetzungen ergibt sich wegen $\vartheta = E[X|\Theta = \vartheta]$ die theoretische Prämie zu $H(\Theta) = \Theta$ mit $E[\Theta] = 0{,}75 \times 0{,}1 + 0{,}25 \times 0{,}2 = 0{,}125$ und analog $Var[\Theta] = 0{,}001875$. Ferner ist nach der Binomialverteilungsannahme $Var[X|\Theta = \vartheta] = \vartheta \cdot (1-\vartheta)$, also $Var[X|\Theta] = \Theta \cdot (1-\Theta)$ mit $E[Var[X|\Theta]] = E[\Theta \cdot (1-\Theta)] = 0{,}75 \times 0{,}1 \times 0{,}9 + 0{,}25 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}1075.$ Damit lassen sich die Credibility-Gewichte explizit berechnen, man erhält mit der obigen Formel nach Kürzen des Bruchs

$$\alpha_n = \frac{0{,}001875n}{0{,}001875n + 0{,}1075} = \frac{3n}{3n+172}.$$

Die nichtbedingte Verteilung der Schadenfrequenz X lässt sich ebenfalls explizit berechnen; sie ist gegeben durch

$$P[X = k] = \frac{3}{4} \cdot P[X = k|\Theta = 0{,}1] + \frac{1}{4} \cdot P[X = k|\Theta = 0{,}2]$$

für $k \in \{0,1\}$

bzw. tabellarisch:

k	0	1
$P[X = k]$	0,75 × 0,9 + 0,25 × 0,8 = 0,875	0,75 × 0,1 + 0,25 × 0,2 = 0,125

Damit erhält man wieder eine Binomialverteilung, nämlich **B**(1;0,125) mit $E[X] = 0{,}125 = E[\Theta]$. Dies ist kein Zufall; die Gleichheit folgt hier nämlich aus dem „Tower Law" für bedingte Erwartungen: $E[X] = E\left(E[X|\Theta]\right) = E[\Theta]$.

Siehe Lektion 1, „Finanzmathematische Grundlagen".

Die folgende Tabelle zeigt den Schadenfrequenzverlauf $X_1, \cdots X_{10}$ eines Versicherten über zehn Jahre, zusammen mit der jeweiligen Credibility-Prämie

$$H_n^* = \frac{3n}{3n+172} \cdot \bar{X}_n + \frac{172}{3n+172} \cdot E[X]$$

und der daraus resultierenden monetären Bedarfsprämie nach n Versicherungsjahren (d. h. H_n^* × 5.000 EUR).

n	1	2	3	4	5
X_n	1	0	0	0	1
H_n^*	0,1400	0,1376	0,1354	0,1332	0,1471
Bedarfsprämie in EUR	700,00	688,20	676,80	665,76	735,29

n	6	7	8	9	10
X_n	0	0	0	1	0
H_n^*	0,1447	0,1425	0,1403	0,1533	0,1510
Bedarfsprämie in EUR	723,68	712,44	701,53	766,33	754,95

Die anfängliche Bedarfsprämie beträgt 625 EUR; sie steigt aufgrund der Entwicklung der Unfallzahlen innerhalb der zehn Jahre mit schwankender Tendenz auf 754,95 EUR. Nach unfallfreien Jahren sinkt die Bedarfsprämie, nach jedem Unfalljahr erhöht sie sich (Bonus-Malus-System). Zum Vergleich: Die Bedarfsprämie eines bekannt „vorsichtigen" Fahrers würde 0,1 × 5.000 EUR = 500 EUR betragen, die eines bekannt „unvorsichtigen" Fahrers 0,2 × 5.000 EUR = 1.000 EUR.

Dieses Beispiel finden Sie auch im Excel-Arbeitsblatt *Credibility.XLS*.

Übungsaufgabe 10

Berechnen Sie mithilfe des Excel-Arbeitsblatts *Credibility.XLS* die Credibility-Prämien H_n^* sowie die jeweiligen Prämien (in Euro) für das zuletzt behandelte Beispiel, wenn statt zwei *drei* Risikogruppen betrachtet werden, und zwar mit dem zusätzlichen Strukturparameter $\vartheta = 0{,}15$ (Normalfahrer). Das Verhältnis zwischen vorsichtigen, normalen und unvorsichtigen Fahrern im Kollektiv sei 2 : 3 : 1. Die Prämien sollen nach dem Erwartungswertprinzip mit dem Zuschlagsfaktor $\delta = 0{,}2$ bestimmt werden.

Vertiefungen zu diesem Abschnitt finden Sie in den Büchern von Bühlmann/Gisler und Mack (Abschnitt 2.5).

2.4 Spätschadenreservierung

Ein zentrales, in der Versicherungspraxis immer wieder zu beobachtendes Problem stellt die verzögerte Abwicklung von Schäden dar, die z. B. in der Kfz-Haftpflichtversicherung oder in der Krankenversicherung durch aufwändige Gutachten, Gerichtsprozesse usw. verursacht werden können. Manchmal können sogar mehrere Jahre oder Jahrzehnte zwischen dem Auftreten des Schadens und seiner abschließenden Regulierung liegen, z. B. bei Produkthaftpflichtschäden oder Verkehrsunfällen mit Personenschäden, die zu lebenslangen Rentenzahlungen führen. Aus diesem Grund müssen die Versicherungsunternehmen frühzeitig geeignete Rückstellungen bilden, um die Konsequenzen möglicher Spätschäden finanziell ausreichend tragen zu können. Außerdem müssen solche Rückstellungen streng genommen auch in die Berechnung der Bedarfsprämie einfließen. Mathematisch stellt sich dabei das Problem, aus den finanziell eher geringen Anfangsschäden auf die Größenordnung der Gesamtschäden zu schließen. Dies wird formal durch die Betrachtung so genannter *Abwicklungsdreiecke* geregelt, wobei noch zwischen den *Schadenzuwächsen* und den *Schadenständen* unterschieden wird.

Beispiel 10

Einem VU liegen aus den letzten fünf Jahren folgende Informationen zu Schadenzahlungen aus der Kfz-Haftpflichtversicherung vor (in TEUR):

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenzuwächse)				
	1999	2000	2001	2002	2003
1999	255	354	199	153	34
2000		312	427	155	88
2001			165	201	123
2002				178	204
2003					148

Man sieht, dass die Zahlungen im zweiten Jahr nach Eintritt des Schadens am höchsten ausfallen, um dann in den Folgejahren langsam abzunehmen. Diesen Effekt sieht man allerdings bei der hier gewählten Form der tabellarischen Darstellung nicht sehr deutlich. Aus diesem Grund werden Abwicklungsdreiecke fast immer als *relative Abwicklungsdreiecke* (engl.: *run-off-triangle*) behandelt, d. h. in dieser Form:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenzuwächse)				
	0	1	2	3	4
0	255	354	199	153	34
1	312	427	155	88	
2	165	201	123		
3	178	204			
4	148				

Der genannte Effekt wird jetzt wesentlich deutlicher sichtbar. Für die saldierten *Schadenstände* erhält man analog:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenstände)				
	0	1	2	3	4
0	255	609	808	961	995
1	312	739	894	982	
2	165	366	489		
3	178	382			
4	148				

Ziel der mathematischen Analyse ist es nun, diese Dreiecke in der unteren Hälfte sinnvoll zu vervollständigen, um somit eine Übersicht über die zukünftig zu erwartenden Schadenlasten zu erhalten. Es ist naheliegend, hierfür die Verhältniszahlen zwischen den einzelnen Spalten in geeigneter Weise zu benutzen. Da im Abwicklungsjahr 4 nur eine Beobachtung zur Verfügung steht, wird man hier das Verhältnis $995:961 = 1{,}0354$ ansetzen; beim Übergang von Abwicklungsjahr 2 nach Abwicklungsjahr 3 stehen aber schon vier Werte (graue Felder) zur Verfügung, sodass hier die Betrachtung des Verhältnisses der *Jahresgesamtschadenstände* sinnvoll scheint, also der Quotient

$$(961+982):(808+894) = 1943:1702 = 1{,}1416.$$

Diese Vorgehensweise ist charakteristisch für das so genannte *Chain-Ladder*-Verfahren („Strickleiter"-Verfahren), das mit seinen diversen Varianten das am häufigsten verwendete Verfahren zur Berechnung von Spätschadenreserven darstellt und auch im Rahmen der Reservenbewertung unter Solvency II eine fundamentale Rolle spielt.

Für den Rest dieses Abschnitts verwenden wir folgende allgemeine Notation für Abwicklungsdreiecke:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenstände)								
	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-i$	$\cdots$	$n-1$	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	$\cdots$	$S_{0,k}$	$\cdots$	$S_{0,n-i}$	$\cdots$	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	$\cdots$	$S_{1,k}$	$\cdots$	$S_{1,n-i}$	$\cdots$	$S_{1,n-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	$\cdots$	$S_{i,k}$		$S_{i,n-i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	$\cdots$	$S_{n-k,k}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$							
n	$S_{n,0}$								

Die Schadenstände $S_{i,j}$ sind positiv und in der Regel − als kumulierte Jahresschäden − monoton wachsend in *j*. Es werden nun so genannte *Abwicklungsfaktoren* betrachtet, die in Anlehnung an die oben beschriebene Vorgehensweise formal definiert sind durch

$$F_k := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}, \quad k = 1,\cdots,n,$$

also das Verhältnis der durch Saldieren bekannten Schadenstände der benachbarten Spalten k und $k-1$. Das Abwicklungsdreieck wird dann in der unteren Hälfte durch sukzessive Multiplikation der letzten bekannten Schadenstände mit den Abwicklungsfaktoren ergänzt:

$$\hat{S}_{i,k} := S_{i,n-i} \cdot \prod_{m=n-i+1}^{k} F_m, \; i = 0,\cdots,n, \; k = n-i,\cdots,n.$$

Beispiel 11

(Fortsetzung von Beispiel 10)

Als Vervollständigung nach dem Chain-Ladder-Verfahren ergibt sich (graue Felder):

Anfall-jahr	Abwicklungsjahr (Schadenstände)					Benötigte Reserve
	0	1	2	3	4	
0	255	609	808	961	**995**	–
1	312	739	894	982	**1016,743**	34,743
2	165	366	489	558,241	**577,992**	88,992
3	178	382	488,309	557,453	**577,175**	195,175
4	148	340,888	435,756	497,458	**515,058**	367,058
F_k	-	**2,3033**	**1,2783**	**1,1416**	**1,0354**	Summe: 685,968

Die Zahlen in Spalte 4 stellen die endgültigen erwarteten Schadenstände dar (so genannte „Ultimates“). Die letzte Spalte enthält als benötigte Reserve die Differenzen zwischen den Ultimates und den letzten bekannten Anfalljahresschäden auf der Diagonalen. Die Gesamtreserve beläuft sich auf 685.968 EUR.

Dieses Beispiel finden Sie auch im Excel-Arbeitsblatt *ChainLadder.XLS*.

Das Chain-Ladder-Verfahren sollte allerdings nur dann angewendet werden, wenn sich die Schadenstände pro Anfalljahr über die Abwicklungsjahre hinweg systematisch ähnlich entwickeln. Man kann dies aus statistischer Sicht präzisieren, wenn folgende Annahmen gerechtfertigt sind (sogenanntes *multiplikatives Modell*):

Die Schadenzuwächse

$$Z_{i,k} = \begin{cases} S_{i,0} & \text{für } k = 0 \\ S_{i,k} - S_{i,k-1} & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

mit i = 1, ..., n und k = 0, ..., n sind strikt positive Zufallsvariablen mit der Eigenschaft

$$E\left(Z_{i,k}\right) = \alpha_i \cdot \vartheta_k,\ i,k = 0,1,\cdots,n \text{ und } \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k = 1$$

für geeignete Parameter $\alpha_0,\cdots,\alpha_n > 0$ und $\vartheta_0,\cdots,\vartheta_n \in (0,1)$.

Das Chain-Ladder-Verfahren ist Ausgangspunkt zahlreicher Varianten, z. B.

- des *Loss-Development-Verfahrens*, bei dem die obige multiplikative Struktur auf die *Schadenstände* angewendet wird und bei dem statistische Annahmen über die Abwicklungsfaktoren getroffen werden,

- des *Bornhutter-Ferguson-Verfahrens*, bei dem statistische Annahmen über die Endschadenstände getroffen werden, oder

- des *Cape-Cod-Verfahrens*, bei dem „Ausreißer“ auf der Diagonalen des Abwicklungsdreiecks, die das Ergebnis verzerren, entsprechen bereinigt werden.

Daneben gibt eine Vielzahl von Abwicklungsmodellen auf rein statistischer Basis (lineare und loglineare Modelle mit spezifizierten Verteilungsannahmen (*Normalverteilung*, *Lognormalverteilung*). Zahlreiche weitere Modellansätze berücksichtigen Zufalls- und Schätzfehler, den so genannten *Nachlauf* (Extrapolation der Rechnungen in die Zukunft bei zu geringer Datenlage) oder beziehen Aspekte der *Credibility-Theorie* mit ein.

Übungsaufgabe 11

a) Berechnen Sie die Ultimates und benötigte Reserven mithilfe des Excel-Arbeitsblatts *ChainLadder.XLS* für den folgenden Datensatz:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenstände)				
	0	1	2	3	4
0	123	367	402	415	**455**
1	359	674	773	859	
2	69	111	123		
3	666	1001			
4	207				
F_k	-				

b) Passen Sie die Anfalljahresschäden sowie die Ultimates an eine Lognormalverteilung an und ermitteln Sie auf statistischer Basis jeweils eine geeignete Bedarfsprämie. Wie beurteilen Sie das Ergebnis?

c) Wie hoch ist die tatsächliche Prämie, wenn auf Ultimate-Basis kalkuliert wird und ein Sicherheitszuschlag nach dem Standardabweichungsprinzip mit $\delta = 20\%$ erhoben wird?

Vertiefungen zu diesem Abschnitt finden Sie in den Büchern von Mack (Kapitel 3), Radtke/Schmidt und Schmidt (Kapitel 13).

Quintessenz

Eine risikogerechte Tarifierung ist das Herzstück eines jeden Versicherungsvertrages. Neben den zusätzlichen Kosten- und Gewinnanteilen in der Prämie garantiert nur eine saubere aktuarielle Rechnungsgrundlage langfristig das Überleben und den Erfolg einer Versicherungsgesellschaft. Dabei sind unterschiedliche Aspekte wie ausreichende Risikozuschläge, Prämiendifferenzierung und Abwicklungsdauer für Spätschäden angemessen zu berücksichtigen.

3 Rückversicherung

Unter Rückversicherung versteht man im Allgemeinen eine „Versicherung der Versicherer". Sie basiert auf einem frei vereinbarten Vertrag zwischen einem Erstversicherer, der *Zedent* genannt wird, und einem Rückversicherer, genannt *Zessionär*. Rückversicherung dient zum einen als eine Form von Eigenkapitalersatz, zum anderen dazu, große Risiken – etwa aus Naturkatastrophen – und damit eventuell verbundene hohe finanzielle, eventuell sogar ruinöse Belastungen zu mildern oder sogar fast völlig zu vermeiden.

Bei der *Form* der Rückversicherung unterscheidet man grundsätzlich zwischen *obligatorischer* und *fakultativer* Rückversicherung. Erstere bedeutet, dass die Abgabe des Risikos vom Erstversicherer bzw. die Annahme des Risikos durch den Rückversicherer verpflichtend bzw. freiwillig (auch bezüglich der Risikoübernahme!) ist. Als Kombination beider Formen gibt es noch die *fakultativ-obligatorische* Rückversicherung (engl.: *open cover*), bei der der Zedent die freie Wahl hat, Risiken in Rückdeckung zu geben, der Zessionär aber in diesem Fall die Haftung übernehmen muss.

Bei der *Art* der Rückversicherung unterscheidet man zwischen *proportionaler* und *nich-proportionaler* Rückversicherung. Bei der ersteren übernimmt der Zessionär einen bestimmten Anteil am versicherungstechnischen Risiko des Zedenten und erhält dafür auch einen entsprechenden proportionalen Anteil an der Originalprämie des Erstversicherers (plus ggf. weiterer Zuschläge). Wenn die Bemessungsgrundlage für die Bestimmung des Beteiligungsverhältnisses des Rückversicherers eine gestaffelte Versicherungssumme ist, spricht man auch von einer *Summenexzedenten-Rückversicherung*.

Bei der nichtproportionalen Rückversicherung versichert der Rückversicherer seinen Zedenten gegen Schäden, die dieser durch den Eintritt fest definierter Schadenereignisse erleidet (z. B. Schäden aus Stürmen, die meteorologisch einer klar abgrenzbaren Wetterlage zugeordnet werden können, wie die regelmäßig vor der US-amerikanischen Ostküste auftretenden Hurrikane oder die schwer wiegenden europäischen Winterstürme, in Deutschland zuletzt Sturm Kyrill Anfang 2007 mit einem Schadenpotenzial von über 2 Mrd. EUR). Die Höhe der Leistung des Rückversicherers wird ausschließlich durch die Höhe des Schadens bestimmt, weswegen diese Art der Rückversicherung auch „Schadenrückversicherung" genannt wird. Wenn sich die Rückversicherung auf Schäden aus Einzelereignissen bezieht, spricht man von einem *Excess-of-Loss*-(kurz XL-)Vertrag, wenn sie sich auf den Jahresgesamtschaden bezieht, von einem *Stop-Loss*-(kurz SL-)Vertrag. Die Tarifierung dieser Vertragsformen insbesondere bei Naturgefahren orientiert sich sehr häufig an den in Abschnitt 1.3 vorgestellten Modellierungsansätzen.

3.1 Proportionale Rückversicherung

Die Grundform der proportionalen Rückversicherung bildet ein einfacher *Quotenvertrag*, bei dem sich der Rückversicherer in Bezug auf das Geschäft seines Zedenten wie ein stiller Teilhaber verhält. Er übernimmt im Verhältnis zum Zedenten die Verpflichtungen, die sich aus dessen Verträgen ergeben (inklusive der anteiligen Verwaltungskosten), und stellt auf diesem Wege indirekt Eigenkapital zur Bewältigung der vom Erstversicherer übernommenen Verpflichtungen bereit. Mit einer Quote übernimmt der Rückversicherer seinen Anteil von allen Deckungen so, wie sie der Erstversicherer original übernommen hat.

Eine *Summenexzedenten-Rückversicherung* funktioniert im Prinzip wie ein *Quotenvertrag*, jedoch werden hier ein Selbstbehalt und die Rückversicherungsabgabe für jede Risikoklasse individuell festgelegt. Maßgeblich ist der auch als „erstes Maximum“ bezeichnete Selbstbehalt des Erstversicherers. Er wird als absoluter Betrag festgelegt. Hierzu wird eine die Größe der einzelnen Risiken beschreibende Summe herangezogen, in der Regel die Versicherungssumme, in einigen Sparten auch das vom Risiko ausgehende Höchstschadenpotenzial. Die maximale Aufnahmefähigkeit eines solchen Vertrages wird als Vielfaches des Selbstbehalts („Anzahl Maxima“) festgelegt. Die je Risikoklasse resultierende Quote ergibt sich aus dem Verhältnis der Anzahl der Maxima in Bezug auf die Risikosumme (Versicherungssumme).

Beispiel 12

Eine Gebäudeversicherung vereinbart mit ihrem Rückversicherer für das Privatkundensegment mit 17.245 Verträgen eine 60-prozentige Quotenabgabe. Die Gebäude sind in fünf Versicherungssummenklassen in Schritten von 100.000 EUR gruppiert.

Das teuerste Gebäude hat eine Versicherungssumme von 495.000 EUR. Die Prämie des Erstversicherers beträgt 0,75 ‰ der Obergrenze der jeweiligen VS-Klasse. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Versicherungsstruktur und die je VS-Klasse angefallenen Jahresschäden (Bruttoschadenaufwand). Die monetäre Einheit ist durchgängig TEUR.

VS-Klasse	Anzahl Verträge	Beitragssatz (in ‰ der VS)	Beiträge EV (brutto)	Abgabequote (in %)	zedierte Beiträge	Beiträge EV (netto)	Brutto-Schaden-aufwand	zedierte Schäden	Selbstbehalt
100	7.841	0,75	588	60,00%	353	235	507	304	203
200	4.785	0,75	718	60,00%	431	287	707	424	283
300	2.573	0,75	579	60,00%	347	232	443	266	177
400	1.289	0,75	387	60,00%	232	155	276	166	110
500	757	0,75	284	60,00%	170	114	260	156	104
Summe	17.245		2.555		1.180	1.022	2.193	1.316	877
						Brutto-SQ:	85,82%	Netto-SQ:	85,82%

Die Schadenquote beträgt in diesem Beispiel erwartungsgemäß mit oder ohne Quotenrückversicherung (Netto-/Brutto-SQ) 85,82 %.

Beispiel 13

(Fortsetzung von Beispiel 12)

Die Gebäudeversicherung vereinbart abweichend *zu Beispiel 12* mit ihrem Rückversicherer eine Summenexzedenten-Rückversicherung mit vier Maxima. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Auswirkungen dieser proportionalen Rückversicherung:

VS-Klasse	Anzahl Verträge	Beitragssatz (in ‰ der VS)	Beiträge EV (brutto)	Maxima	Zession (in %)	zedierte Beiträge	Beiträge EV (netto)	Brutto-Schaden-aufwand	zedierte Schäden	Selbstbehalt
100	7841	0,75	588	0	0,00%	0	588	507	0	507
200	4785	0,75	718	1	50,00%	359	359	707	354	354
300	2573	0,75	579	2	66,67%	386	193	443	295	148
400	1289	0,75	387	3	75,00%	290	97	276	207	69
500	757	0,75	284	4	80,00%	227	57	260	208	52
Summe	17.245		2.555			1.262	1.293	2.193	1.064	1.129
					in % der Brutto-Beiträge	49,39%	50,61%	RV-SQ:	84,30%	Netto-SQ: 87,30%

Die Nettoschadenquote steigt in diesem Beispiel gegenüber Beispiel 12 leicht an auf 87,30 %; die Schadenquote des Rückversicherers beträgt dagegen nur 84,30 %, also leicht weniger als die Schadenquote von 85,82 % vorher. Insgesamt zediert die Gebäudeversicherung mit diesem Vertragstyp knapp 50 % ihrer Bruttobeiträge.

Dieses Beispiel finden Sie auch im Excel-Arbeitsblatt *PropRV. XLS*.

Die Summenexzedenten-Rückversicherung scheint in diesem Beispiel im direkten Vergleich mit der einfachen Quotenrückversicherung nachteilhaft zu sein; man muss aber bedenken, dass die Entlastung hier überwiegend in den höheren VS-Klassen eintritt, die möglicherweise auch mit einem höheren Schadenpotenzial behaftet sind. Die zufällige Entwicklung der Schäden kann also mit einem solchen Vertragstyp durchaus auch eine Entlastung gegenüber der reinen Quote bringen. Diesen Effekt können Sie in der nachfolgenden Aufgabe 12 näher untersuchen.

Übungsaufgabe 12

Untersuchen Sie durch Ausprobieren mit dem Excel-Arbeitsblatt *PropRV.XLS*, ab welchem Schadenaufwand in der höchsten VS-Klasse in Beispiel 13 die Summenexzedenten-Rückversicherung in Bezug auf die Nettoschadenquote günstiger als ein reiner Quotenvertrag wird, wenn in den übrigen VS-Klassen die Schadenaufwände gleich bleiben.

Ab welchem Schadenaufwand in der höchsten VS-Klasse wird beim Quotenvertrag die 100 %-Grenze für die Schadenquote überschritten? Wie verhält sich hier der Summenexzedenten-Rückversicherungsvertrag?

3.2 Nichtproportionale Rückversicherung

Bei der nichtproportionalen Rückversicherung vereinbaren Erst- und Rückversicherer Ursache und Höhe eines Schadens beim Erstversicherer, der eine Leistung des Rückversicherers auslöst, sowie den Umfang der Leistungspflicht des Rückversicherers. Der Rückversicherer erhält für sein Leistungsversprechen einen von der Originalprämie unabhängigen Rückversicherungsbeitrag. Bei Eintreten der rückversicherten Umstände ist er im Rahmen der zur Verfügung gestellten Haftungssumme nach Abzug des im Vertrag vorgesehenen Selbstbehalts des Erstversicherers (Priorität genannt) zu einer Ersatzleistung an diesen verpflichtet.

Ein *Einzelschadenexzedent* wird beschrieben durch die „Haftung *excess* (kurz: xs) *of* Priorität“. Die Priorität gibt an, bis zu welcher Höhe der Erstversicherer selbst Anteile am Schaden trägt. Der Rückversicherer übernimmt dann alle Kosten aus Schäden zwischen der Priorität und dem sogenannten Plafond; die Differenz aus Plafond und Priorität heißt *Haftungsstrecke*, das zugehörige Intervall wird meist als *Layer* bezeichnet. Bei einem XL-Vertrag mit „6 Mio. EUR xs of 2 Mio. EUR“ trägt also der Erstversicherer am eventuellen Schaden einen Kostenanteil bis zu 2 Mio. EUR, der Rückversicherer trägt das, was darüber hinausgeht, bis zu einer Höhe von 8 Mio. EUR mit einer Haftungsstrecke von 6 Mio. EUR. Die folgende Tabelle zeigt exemplarisch die technischen Aspekte dieses Rückversicherungsvertrags.

Einzelschadenhöhe	Anteil Erstversicherer	Anteil Rückversicherer	Nicht versichert sind
1,5 Mio. EUR	1,5 Mio. EUR	---	---
2,8 Mio. EUR	2,0 Mio. EUR	0,8 Mio. EUR	---
9,4 Mio. EUR	2,0 Mio. EUR	6,0 Mio. EUR	1,4 Mio. EUR

In der Praxis werden in der Regel mehrere aufeinander aufbauende Layer, zur Diversifikation des Risikos häufig bei verschiedenen Unternehmen, rückversichert.

Die Tarifierung eines solchen Rückversicherungsvertrags erfolgt nach denselben Prinzipien wie bei der Erstversicherung. Bezeichnen wir das Risiko des Erstversicherers wieder mit X und mit a bzw. b die Priorität bzw. die Haftungsstrecke, trägt der Rückversicherer das Risiko

$$X_{a|b} := \begin{cases} 0, & X \le a \\ X - a, & a < X \le b \\ b - a, & X > b. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass die Bedarfsprämie des Rückversicherers für einen solchen XL-Vertrag aus der Verteilungsfunktion F_X des Risikos X berechnet werden kann nach der Formel

$$E\left[X_{a|b}\right] = \int_a^b \left(1 - F_X(x)\right) dx.$$

Für $a = 0$ und $b = \infty$ ergibt sich $E\left[X_{a|b}\right] = E[X]$, was Sinn macht, weil in diesem Fall der Erstversicherer sein Risiko vollständig an den Rückversicherer transferiert, also dessen Bedarfsprämie mit derjenigen des Erstversicherers übereinstimmt.

Im Fall einer Lognormalverteilung $\mathbf{LN}\left(\mu, \sigma^2\right)$ für das Risiko X kann der letzte Ausdruck explizit berechnet werden nach der Formel

$$\begin{aligned} E\left[X_{a|b}\right] = E[X] \cdot \left(N\left(\frac{\ln(b) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) - N\left(\frac{\ln(a) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)\right) + \ldots \\ \ldots + b \cdot \left(1 - N\left(\frac{\ln(b) - \mu}{\sigma}\right)\right) - a \cdot \left(1 - N\left(\frac{\ln(a) - \mu}{\sigma}\right)\right) \end{aligned}$$

mit $E[X] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$, wobei N wieder die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichnet.

Für einen Stop-Loss-Vertrag gilt in Bezug auf das Formelwerk dasselbe wie für einen XL-Vertrag, außer dass hier der aggregierte Jahresschaden X und kein Ereignisschaden betrachtet wird.

Das Verhältnis aus Rückversicherungsprämie und Haftungsstrecke wird in der Rückversicherungsbranche auch als *Rate on Line* (RoL) bezeichnet.

Beispiel 14

(Fortsetzung der Beispiele 12 und 13)

Die Gebäudeversicherung hatte mit ihrem Rückversicherer einen Stop-Loss-Vertrag mit Priorität 1.800 TEUR und Haftungsstrecke 600 TEUR abgeschlossen. Der Aktuar der Rückversicherung hatte auf der Basis der Daten der Versicherung herausgefunden, dass sich die Schäden gut durch eine $\mathbf{LN}\left(\mu,\sigma^2\right)$-Verteilung mit $\mu = 7{,}7$ und $\sigma = 0{,}1$ beschreiben lassen, d. h. mit $E[X] = 2.219$ und der Streuung $\sqrt{Var[X]} = 222.$ Mit diesen Zahlen hatte der Aktuar eine Bedarfsprämie von 392 TEUR errechnet (vgl. das Excel-Arbeitsblatt *NPropRV.XLS*). Die Rückversicherung stellte der Gebäudeversicherung eine Prämie von 450 TEUR für den SL Vertrag in Rechnung (entsprechend einer RoL von 75 %), sodass das Nettoprämienaufkommen der Gebäudeversicherung 2.105 TEUR beträgt.

Da sich der Bruttogesamtschaden auf 2.193 TEUR beläuft, trägt die Gebäudeversicherung 1.800 TEUR selbst; 393 TEUR übernimmt die Rückversicherung. Die Nettoschadenquote der Gebäudeversicherung beläuft sich damit auf 85,51 %, die Schadenquote der Rückversicherung beträgt 87,33 %.

XL- und SL-Rückversicherungsverträge sind zur Minderung der Schadenlasten aus Naturgefahren sehr verbreitet; als Tarifierungsgrundlage dienen dann in der Regel die *OEP*- und *AEP-Kurven* der geophysikalischen Modelle, die ja gerade die komplementären Verteilungsfunktionen von Ereignis- und Jahresaggregatschäden darstellen.

Übungsaufgabe 13

Berechnen Sie für die Betriebsunterbrechungsversicherung aus Beispiel 8 die Rückversicherungsbedarfsprämie für einen SL-Vertrag mit Priorität 50 und Haftungsstrecke 100.

3.3 Alternativer Risikotransfer (ART)

Neben dem klassischen Instrumentarium der typischen Rückversicherung haben sich seit einigen Jahren Alternativen entwickelt, die versicherungstechnische Risiken auf den Kapitalmarkt transferieren. So kann ein Erstversicherer beispielsweise mit einem so genannten *Special Purpose Vehicle* (SPV) − einer Zweckgesellschaft, die meist in Ländern mit günstiger Steuergesetzgebung an Offshore-Finanzplätzen wie den Bahamas u. a. angesiedelt ist − Wertpiere emittieren, die eine verbriefte Bindung an definierte Ereignisse, typischerweise Naturgefahren, vorsehen (*Insurance*

Linked Bonds). Treten solche Ereignisse während der Laufzeit des Papiers ein, ist der Emittent − das Erstversicherungsunternehmen − beispielweise von der Zahlung von Zinsen oder gar des beliehenen Kapitals befreit. Andere Möglichkeiten bestehen in der Konstruktion von Derivaten, die sich auf ein Underlying beziehen, das gefahrenbezogen ist (z. B. Temperaturkurven bei Wetterderivaten an definierten Messstationen oder Schadenindices, die sich an kumulierten Katastrophenschäden z. B. aus lokalen Hurrikanen vor der US-amerikanischen Ostküste orientieren). Durch einen geschickten Handel mit Optionen auf solche Indices lässt sich dann ein finanzieller Schutz gegen Verluste aus den Gefahren, mit denen das Underlying assoziiert ist, aufbauen.

Zum besseren Verständnis des folgenden Textes sei auf die entsprechenden Ausführungen zu Finanzderivaten in den Lektionen 1, „Finanzmathematische Grundlagen“, und Lektion 3, „Kapitalmarktprodukte: Charakteristika und Bewertung“, verwiesen.

Ein Indexpunkt bei solchen Versicherungsderivaten entspricht dabei grundsätzlich einem festen Schadenbetrag L, z. B. $L = 10$ Mio. USD. Eine Call-Option mit Ausübungspreis X auf einen solchen Index greift also dann, wenn der Index zu einem bestimmten, vorher festgelegten Zeitpunkt (z. B. einem Quartalsende) den Wert X erreicht oder überschreitet. Die damit verbundene Auszahlung durch den Verkäufer der Call-Option wird in sogenannten *Ticks* verrechnet, d. h., pro Indexpunkt Unterschied zwischen Indexwert W und Ausübungspreis X wird im Ausübungsfall eine feste Summe Q, z. B. $Q = 200$ USD, vergütet. Erreicht der Indexwert W den Ausübungspreis X dagegen nicht, ist die Option wertlos; es findet dann keine Auszahlung statt.

In dieser Konstruktion entspricht der Ausübungspreis X der Priorität a einer Rückversicherung mit Illimitée-Deckung, d. h. $b = \infty$. Allerdings ist hierbei nur der „Markt“ als Ganzes versichert, nicht unbedingt ein einzelnes Versicherungsunternehmen. Durch Kauf einer Call-Option mit Ausübungspreis X_1 auf den Index und gleichzeitigem Verkauf einer Call-Option mit höherem Ausübungspreis X_2 auf den Index (sogenannter *Bull-Call-Spread*) erhält man ein Konstrukt, das der klassischen Rückversicherung mit Priorität a (bezogen auf X_1) und Plafond b (bezogen auf X_2) entspricht. Das folgende fiktive Beispiel soll verdeutlichen, wie dies technisch funktioniert.

Beispiel 15

In einem Gebäudeversicherungsmarkt sind fünf Unternehmen vertreten mit folgenden Marktanteilen α_i :

Unternehmen i	1	2	3	4	5
α_i	0,10	0,05	0,35	0,20	0,30

Unternehmen 1 möchte sich auf dem Finanzmarkt „rückversichern" über einen Bull-Call-Spread, der einer klassischen Rückversicherung mit Priorität $a = 50$ Mio. USD und Plafond $b = 100$ Mio. USD entspricht. Da der Marktanteil 10 % beträgt, entspricht dies Indexwerten zwischen 50 Punkten (= 500 Mio. USD) und 100 Punkten (= 1 Mrd. USD). Die Ausübungspreise sind hier also gegeben durch $X_1 = 50$ und $X_2 = 100$. Da jeder Indexpunkt 10 Mio. USD/200 USD = 50.000 Ticks entspricht und der Marktanteil 10 % beträgt, müssen also 5.000 Spreads erworben werden. Die Call-Option zum Ausübungspreis $X_1 = 50$ koste nun 600 USD, die zum Ausübungspreis $X_2 = 100$ koste 350 USD. Dann beträgt der finanzielle Aufwand für das Unternehmen genau 250´ 5.000 = 1,25 Mio. USD oder in der Sprache der klassischen Rückversicherung 2,5 % RoL (für die Haftstrecke von 50 Mio. USD).

Wir betrachten jetzt drei Szenarien für mögliche Schadenentwicklungen:

Szenario 1	Unternehmen i	1	2	3	4	5
	Schäden (Mio. USD)	55	27	195	110	123

Szenario 2	Unternehmen i	1	2	3	4	5
	Schäden (Mio. USD)	45	28	204	122	111

Szenario 3	Unternehmen i	1	2	3	4	5
	Schäden (Mio. USD)	55	27	195	110	103

In den ersten beiden Szenarien beträgt der Marktschaden 510 Mio. USD mit Indexwert $W = 51$, d. h., die Call-Option mit Ausübungspreis $X_1 = 50$ greift in beiden Fällen. Die Auszahlung an Unternehmen 1 beläuft sich in beiden Szenarien auf 5000´ 1´ 200 = 1 Mio. USD. Für das erste Szenario wäre eine klassische Stop-Loss-Rückversicherung mit der Entschädigungszahlung von 5 Mio. USD günstiger gewesen, im zweiten Szenario hätte die Rückversicherung wegen Unterschreitens der Priorität gar nicht gezahlt. Kritisch ist Szenario 3, da hier der Marktschaden nur 490 Mio. USD mit Indexwert $W = 49$ beträgt, also beide Optionen wertlos sind und damit keine Auszahlung an Unternehmen 1 erfolgt, wogegen die klassische Rückversicherung wieder 5 Mio. USD gezahlt hätte.

Dies zeigt, dass ein solcher alternativer Risikotransfer in der Regel kein exaktes Äquivalent für die Rückversicherung sein kann; manchmal ist er trotz gleichen Schadenaufkommens günstiger (Szenario 2), manchmal ungünstiger (Szenarien 1 und 3).

Die obige Rechnung zeigt, wie die Anzahl *n* der benötigten Spreads und die Ausübungspreise X_1 und X_2 durch die Größen L, Q, a, b und α (Marktanteil) allgemein bestimmt werden können, nämlich durch

$$X_1 = \frac{a}{\alpha L}, \; X_2 = \frac{b}{\alpha L}, \; n = \frac{\alpha L}{Q}.$$

Sind die Optionspreise entsprechend gegeben durch C_1 und C_2, kostet der „Rückversicherungsschutz“ also genau $n \cdot (C_2 - C_1)$ mit einer RoL von

$$\frac{n(C_2 - C_1)}{b - a} = \frac{1}{Q} \frac{C_2 - C_1}{X_2 - X_1}.$$

Vertiefungen zu diesem Abschnitt finden Sie in den Büchern von Liebwein, Mack (Kapitel 4), Schmidt (Kapitel 9) und Schwepcke.

Quintessenz

Die Rückversicherung und ihre modernen Kapitalmarktvarianten sind ein unverzichtbares Instrument für das „Überleben“ jedes Schaden-/Unfallversicherungsunternehmens, insbesondere bei der Absicherung gegen industrielle Großschäden oder Naturgefahren. Die möglichen Vertragsformen sind äußerst vielfältig und erfordern für die Tarifierung insbesondere bei den nicht proportionalen Versicherungsformen ein erhebliches aktuarielles Wissen.

4 Aspekte eines quantitativen Risikomanagements

Spätestens seit der Einführung der *aufsichtsrechtlichen Mindestanforderungen an das Risikomanagement* (MaRisk VA) durch die BaFin Anfang 2009 sind alle deutschen Versicherungsunternehmen gehalten, dem firmeninternen Risikomanagement verstärkt Aufmerksamkeit zu widmen. Im Rahmen von Solvency II findet sich dieses Thema auch in der Säule II wieder unter dem Stichwort *ORSA*: *O*wn *R*isk and *S*olvency *A*ssessment. Aber auch die Säule I mit ihrem Standardansatz zur Solvenzkapitalbestimmung ist schon stark geprägt durch mathematische Verfahren zur Risikomessung und -bewertung. Die Hintergründe dieser Vorschriften sollen Sie in den letzten beiden Abschnitten dieser Lektion etwas genauer kennen lernen.

4.1 Risikomaße und Solvenzkapitalbestimmung

Risikomessung und Risikomaße sind ein unverzichtbarer Bestandteil aller aufsichtsrechtlichen Vorgaben zur Solvenzkapitalbestimmung für Versicherungsunternehmen. Die aktuelle Diskussion über Risikomaße, die der über Prämienprinzipien ähnlich ist (vgl. Abschnitt 2.2), konzentriert sich dabei verstärkt auf axiomatisch begründete Konzepte, darunter das Konzept der *Kohärenz*. Wir bezeichnen hier wieder mit $\mathcal{R}$ die Menge der Risiken *X*, für die eine Risikobewertung (-messung) vorgenommen werden soll.

Ein Risikomaß auf der Menge $\mathcal{R}$ heißt *kohärent*, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

- *R* ist *positiv homogen*, d. h., es gilt:
  $R(cX) = c\,R(X)$ für alle $c \geq 0$ und $X \in \mathcal{R}$;
- *R* ist *translationsinvariant*, d. h., es gilt:
  $R(X+c) = R(X) + c$ für alle $X \in \mathcal{R}$ und $c \in \mathbb{R}$;
- *R* ist *subadditiv*, d. h., es gilt:
  $R(X+Y) \leq R(X) + R(Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{R}$;
- *R* ist *monoton*, d. h., es gilt:
  $R(X) \leq R(Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{R}$ mit $X \leq Y$.

Die (nicht unumstrittene) Bedingung der Subadditivität soll dabei den so genannten *Diversifikationseffekten* Rechnung tragen. Ein sehr gebräuchliches Risikomaß, das im Basel-II-Prozess und in der Lebensversicherung Anwendung findet, ist der *Value at Risk* zum Risikoniveau α, definiert durch

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(X) := F^{-1}(1-\alpha) \text{ für } 0 < \alpha < 1,$$

wobei hier F die Verteilungsfunktion des Risikos X bezeichnet. Der Value at Risk entspricht damit inhaltlich dem *Quantil-Prinzip* der Prämienkalkulation. In der Versicherungstechnik ist dieser Ausdruck auch als *PML* (*P*robable *M*aximum *L*oss) zur Wiederkehrperiode $T = 1/\alpha$ bekannt. Er bezeichnet als Risikokapital denjenigen finanziellen Betrag, der ausreicht, damit das Unternehmen mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ allen finanziellen Verpflichtungen, die mit diesem Risiko verbunden sind, innerhalb der zugrunde gelegten Zeitperiode − unter Solvency II ist das ein Geschäftsjahr − nachkommen kann.

Der Value at Risk erfüllt grundsätzlich alle obigen Anforderungen bis auf eine: Er ist leider für viele Verteilungsfamilien von Risiken kein kohärentes Risikomaß im obigen Sinne, da die Subadditivitätsbedingung verletzt ist.

Beispiel 16

Die Risiken X und Y seien stochastisch unabhängig und jeweils Pareto-verteilt mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad x \geq 0.$$

Dann kann die Verteilungsfunktion G des Summenrisikos $S := X + Y$ explizit berechnet werden:

$$G(z) = 1 - 2\frac{\sqrt{1+z}}{2+z}, \quad z \geq 0.$$

Hieraus folgt:

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(X) = VaR_{\alpha}(Y) = F^{-1}(1-\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}, \; \mathrm{VaR}_{\alpha}(X) + \mathrm{VaR}_{\alpha}(Y) = \frac{2}{\alpha^2}$$
$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(S) = G^{-1}(1-\alpha) = \frac{4}{\alpha^2} - 2 - \frac{2}{1+\sqrt{1-\alpha^2}} \sim \frac{4}{\alpha^2} - 4 \; (\alpha \to 0)$$

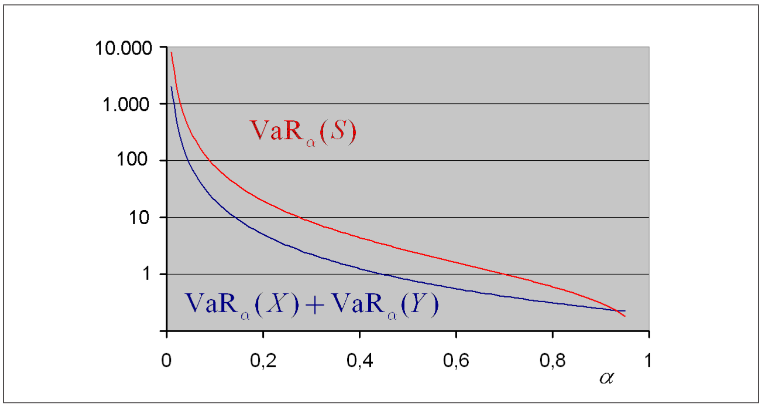


Abbildung 8: Vergleich des Value at Risk für das Summenrisiko mit der Summe der Vakue-at-Risk-Werte der Einzelrisiken
Quelle: eigene Darstellung

Offenkundig gilt hier $VaR_\alpha(S) > \mathrm{VaR}_\alpha(X)+\mathrm{VaR}_\alpha(Y)$ für $0<\alpha<0{,}8$, d. h., der Value at Risk ist im Allgemeinen nicht subadditiv.

Ein weiteres – kohärentes – Risikomaß ist der u. a. im Schweizer Solvenztest (SST) verwendete *Expected Shortfall*, der im Fall der *Stetigkeit* der Risikoverteilung als bedingter Erwartungswert der Beobachtungen oberhalb des VaR_α gegeben ist, d. h. (mit einigen analytischen Umformungen):

$$\mathrm{ES}_\alpha(X)=E\left(X \mid X>\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)=\frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1}F^{-1}(x)\,dx=\frac{1}{\alpha}\int_{0}^{\alpha}\mathrm{VaR}_u(X)\,du$$

(synonyme Bezeichnungen sind in diesem Fall *Tail Value at Risk* und *Conditional Value at Risk*). Der *Expected Shortfall* kann auf zwei Weisen interpretiert werden: einmal als „Mittelwert“ aller Schäden oberhalb des Value at Risk, zum anderen als gemittelter Value at Risk über alle Risikoniveaus unterhalb von α. Er ist zugleich das kleinste kohärente Risikomaß oberhalb des Value at Risk.

Da der Value at Risk als grundlegendes Risikomaß Eingang in die Solvenzkapitalberechnungen unter Solvency II gefunden hat, sollen hier noch für die Klasse der Lognormalverteilungen $\mathbf{LN}(\mu,\sigma^2)$, die dort ebenfalls von zentraler Bedeutung für die Schaden-/Unfallversicherung sind, die explizit bekannten Formeln für beide Risikomaße vorgestellt werden.

Es sei X ein $\mathbf{LN}(\mu,\sigma^2)$-verteiltes Risiko. Dann gilt:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X)=\exp(\mu+u_\alpha\sigma)$$

$$\mathrm{ES}_\alpha(X)=\frac{1}{\alpha}\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(1-N\left(u_\alpha-\sigma\right)\right)$$

mit $u_\alpha = N^{-1}(1-\alpha)$ für $0 < \alpha < 1$. Hier bezeichnet N wie im einführenden Abschnitt 1.1 die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und N^{-1} die zugehörige Quantilfunktion (Inverse). u_α kann damit auch als Value at Risk eines standardnormalverteilten Riskos zum Risikoniveau α aufgefasst werden.

Die Berechnung dieser Risikomaße für Lognormalverteilungen ist im Excel-Arbeitsblatt *QQPlot.XLS* hinterlegt.

Die Berechnung des Solvenzkapitals (*SCR: S*olvency *C*apital *R*equirement) im Modul *Nicht-Leben* der europaweit durchgeführten Auswirkungsstudien zu Solvency II (*QIS: Q*uantitative *I*mpact *S*tudies) wurde auf der Basis von Schaden-Kosten-Quoten der Vergangenheit durchgeführt, wobei die reinen Sachsparten der Schaden-/Unfallversicherung in größeren Gruppen, darunter verschiedene Haftpflichtversicherungstypen, Feuer- und Sachversicherung, Kredit- und Kautionsversicherung, Rechtsschutzversicherung u. a. zusammengefasst wurden. Als Modellansatz wurde dabei unterstellt, dass die jährlichen Schadenaufwendungen (inklusive Kostenanteilen) in diesen Gruppen dargestellt werden können als Realisationen eines Produkts $S = V \cdot X$, bei dem V das aktuelle Prämienvolumen und die Schaden-Kosten-Quote X eine $\mathbf{LN}\left(\mu,\sigma^2\right)$-Zufallsgröße mit Erwartungswert $E[X]=1$ ist.[3] (Dies bedeutet anschaulich, dass für die Berechnung des Solvenzkapitals in den QIS − unabhängig von den tatsächlichen Gegebenheiten des einzelnen Versicherungsunternehmens − durchgehend eine durchschnittliche Schaden-Kosten-Quote von 100 % unterstellt wurde!) Die Streuung der Lognormalverteilung wurde durch die *empirische Streuung* der historischen Schaden-Kosten-Quoten geschätzt.

Von der Idee her ist das Solvenzkapital SCR je Gruppe der Differenzbetrag zwischen dem in den QIS verwendeten Risikomaß *Value at Risk* (zum Risikoniveau $\alpha = 0{,}005$ − entsprechend einer Wiederkehrperiode von 200 Jahren) und dem vorhandenen Kapital, gemessen durch das Prämienvolumen *V*, oder in Formeln, unter Ausnutzung der positiven Homogenität des VaR:

$$\mathrm{SCR} = \mathrm{VaR}_{0,005}(S) - V = V \cdot \mathrm{VaR}_{0,005}(X) - V = \left(\mathrm{VaR}_{0,005}(X) - 1\right) \cdot V.$$

Das SCR entspricht also gerade demjenigen Kapital, das über die Prämieneinnahmen hinaus erforderlich ist, um einen ordnungsgemäßen Geschäftsbetrieb im Folgendef Geschäftsjahr mit 99,5-prozentiger Wahrscheinlichkeit sicherstellen zu können.

3 Genau genommen wurde – neben einer länderspezifischen Differenzierung – dieser Ansatz je Gruppe noch über einen Credibility-ähnlichen Ansatz mit Marktdaten verschnitten, wobei die Gewichtungsfaktoren europaweit einheitlich vorgegeben wurden.

Die obige Formel für das SCR lässt sich durch einige Überlegungen weiter konkretisieren: Aus der Annahme

$$E[X] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) = 1$$

folgt zunächst

$$\mu = -\frac{\sigma^2}{2};$$

Aus

$$\begin{aligned} s^2 = Var[X] &= \left(\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right) \cdot \exp\left(2\mu + \sigma^2\right) \\ &= \left(\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right) \cdot \left\{E[X]\right\}^2 = \left(\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right) \end{aligned}$$

ergibt sich damit

$$\sigma^2 = \ln\left(1 + s^2\right),$$

sodass der Parameter σ der Lognormalverteilung über die empirische Standardabweichung [4] $\hat{s}$ der Schaden-Kosten-Quoten wie folgt geschätzt werden kann:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\ln\left(1 + \hat{s}^2\right)}.$$

Durch Einsetzen dieses Schätzwertes in die Formel $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \exp(\mu + u_\alpha \sigma)$ für den Value at Risk eines $\mathbf{LN}\left(\mu, \sigma^2\right)$-verteilten Risikos X (mit dem $(1-\alpha)$-Quantil u_α der Standardnormalverteilung, s. o.) erhalten wir also abschließend:

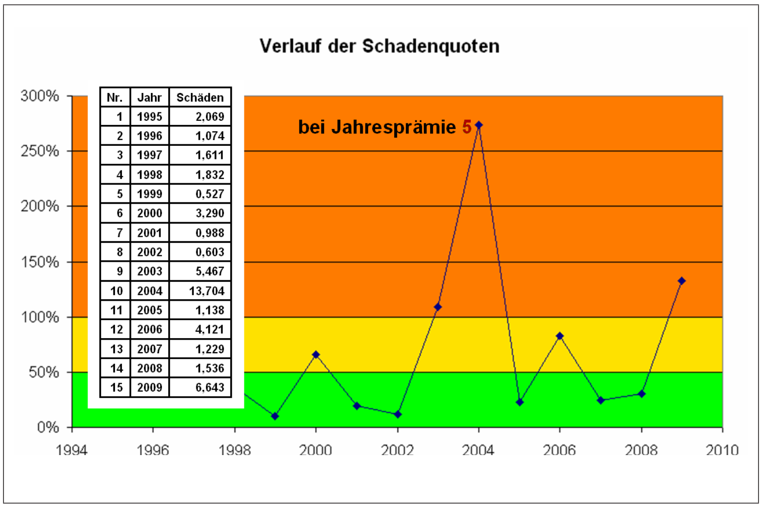
$$\begin{aligned} \mathrm{SCR} &= \left(\mathrm{VaR}_{0,005}(X) - 1\right) \cdot V = \left(\exp\left(\mu + u_{0,005}\hat{\sigma}\right) - 1\right) \cdot V \\ &= \left(\exp\left(-\frac{\hat{\sigma}^2}{2} + u_\alpha \hat{\sigma}\right) - 1\right) \cdot V = \left(\frac{\exp\left(u_{0,005} \cdot \sqrt{\ln\left(1 + \hat{s}^2\right)}\right)}{\sqrt{1 + \hat{s}^2}} - 1\right) \cdot V. \end{aligned}$$

Dies entspricht genau der SCR-Formel, die in den letzten QIS implementiert war.

4 Im Gegensatz zur ML-Schätzung ist hier im Nenner um 1 kleiner; vgl. Formel (2.9) in Lektion 1.

Beispiel 17

Die folgende Grafik zeigt die Entwicklung der Schadenaufwände (inklusive Kostenanteilen) in Mio. EUR sowie die zugehörigen Schaden-Kosten-Quoten in der Sparte „private Haftpflichtversicherung“ eines Schaden-/Unfallversicherers in den Jahren 1995 bis 2009. Das jährliche Prämienvolumen beträgt konstant 5 Mio. EUR.



Nr.	Jahr	Schäden
1	1995	2,069
2	1996	1,074
3	1997	1,611
4	1998	1,832
5	1999	0,527
6	2000	3,290
7	2001	0,988
8	2002	0,603
9	2003	5,467
10	2004	13,704
11	2005	1,138
12	2006	4,121
13	2007	1,229
14	2008	1,536
15	2009	6,643

Abbildung 9: Beispielverlauf von Schaden-Kosten-Quoten
Quelle: eigene Darstellung

Als der Aktuar der Gesellschaft untersuchen Sie die Datenreihe mithilfe eines Q-Q-Plots (vgl. Abschnitt 2.1) und erhalten daraus folgende Informationen:

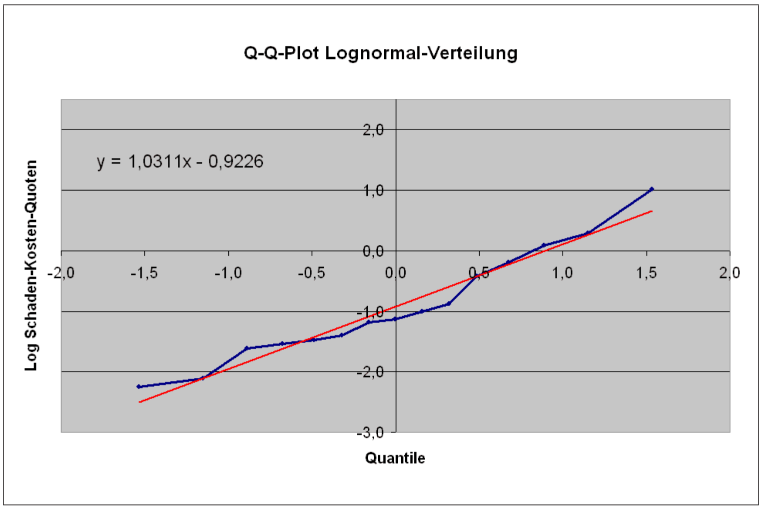


Abbildung 10: Q-Q-Plot der logarithmierten Schaden-Kosten-Quoten
Quelle: eigene Darstellung

Als Schätzer für die Parameter der Lognormalverteilung lesen Sie hieraus ab:

$$\hat{\mu}_{QQ} = -0{,}9226 \quad sowie \quad \hat{\sigma}_{QQ} = 1{,}0311.$$

Durch Einsetzen in die allgemeine SCR-Formel oben erhalten Sie damit:

$$SCR_{QQ} = \left(\exp\left(\hat{\mu}_{QQ} + u_{0,005}\hat{\sigma}_{QQ}\right) - 1\right) \cdot V = 23{,}296,$$

also eine unternehmensinterne Einschätzung für das Solvenzkapital in diesem Segment in Höhe von 23,296 Mio. EUR.

Mit einer Gegenrechnung nach dem in den QIS implementierten Formelwerk erhalten Sie abweichend:

$$\hat{s} = 0{,}6923 \quad \text{und daraus} \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\ln\left(1+\hat{s}^2\right)} = 0{,}6258$$

mit einem deutlich kleineren (!) resultierenden SCR in Höhe von

$$\mathrm{SCR}_{QIS} = \left(\frac{\exp\left(u_{0,005} \cdot \sqrt{\ln\left(1+\hat{s}^2\right)}\right)}{\sqrt{1+\hat{s}^2}} - 1\right) \cdot V = 15{,}604,$$

also nur 15,604 Mio. EUR.

Dieses Beispiel finden Sie auch im Excel-Arbeitsblatt *SCR.XLS*.

Beispiel 17 zeigt, dass die (voraussichtlichen) Solvenzkapitalberechnungen in der Säule I von Solvency II unter Umständen günstigere Anforderungen ergeben als unternehmensinterne Berechnungen, obwohl die tatsächliche mittlere Schaden-Kosten-Quote des Beispielunternehmens nur bei 61,11 % liegt. Eine künstliche Heraufsetzung der mittleren Schaden-Kosten-Quote auf 100 % unter Verwendung der empirischen Standardabweichung für die Schätzung von σ führt also entgegen der Intuition nicht automatisch zu einer im Prinzip wünschenswerten konservativen Schätzung des Solvenzkapitalbedarfs. Dies liegt daran, dass bei diesem Vorgehen dem zweiten Parameter der Lognormalverteilung intern der fiktive Wert $\hat{\mu} = -\frac{\hat{\sigma}^2}{2}$ zugewiesen wird, der sich deutlich vom wahren Parameter μ unterscheidet, wenn die mittlere Schaden-Kosten-Quote stark von 100 % abweicht. Im obigen Beispiel ist das $\hat{\mu} = -\frac{\hat{\sigma}^2}{2} = -0{,}1958$ im Vergleich zum deutlich anderen Wert $\hat{\mu}_{QQ} = -0{,}9225$!

Da in die Berechnung des SCR aber beide Parameter eingehen, können die beiden Methoden zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.

Wählt man für die Schätzung der Parameter nicht die Q-Q-Plot-Methode, sondern die Maximum-Likelihood-Methode (vgl. Abschnitt 2.1), können wieder andere SCR-Schätzungen resultieren. Für das obige Beispiel erhält man hier:

$\hat{\mu}_{ML} = -0{,}9225$ sowie $\hat{\sigma}_{ML} = 0{,}8834$,

was zu einer geschätzten Solvenzkapitalanforderung von

$$\mathrm{SCR}_{ML} = \left(\exp\left(\hat{\mu}_{ML} + u_{0{,}005}\hat{\sigma}_{ML}\right) - 1\right) \cdot V = 14{,}346,$$

also 14,346 Mio. EUR führt, was jetzt sogar *unter* dem SCR_{QIS} liegt.

Ein schwer wiegendes Problem bei einer unterstellten Lognormalverteilung für ein Risiko ist die hohe Volatilität der Schätzer für das Solvenzkapital. Selbst geringe Unterschiede insbesondere im Skalenparameter σ, die üblicherweise beim Einsatz alternativer statistischer Schätzverfahren auftreten, können zu erheblichen Abweichungen im SCR führen.

Die bisherige QIS-Methodik leidet zudem unter einem systematischen mathematischen Defizit, weil sie in Bezug auf die Risikosituation und im Vergleich mit der ML-Schätzmethode gut positionierten Unternehmen mit geringen durchschnittlichen Schaden-Kosten-Quoten tendenziell zu hohe SCR-Werte zuweist, schlechter gestellten Unternehmen dagegen zu niedrige.

Übungsaufgabe 14

Untersuchen Sie unter Verwendung des Excel-Arbeitsblatts *SCR.XLS*, wie die nach den drei vorgestellten Verfahren geschätzten Solvenzkapitalien in Beispiel 17 reagieren, wenn sich das Prämienvolumen auf

a) 10 Mio. EUR
b) 18 Mio. EUR
c) 1 Mio. EUR

belaufen würde. Wie beurteilen Sie in diesem Zusammenhang die Solvenzkapitalanforderungen nach QIS?

Übungsaufgabe 15

Wie reagieren die SCR-Berechnungen in Beispiel 17, wenn lediglich die letzten fünf Jahre der Schadenerfahrung berücksichtigt werden, wie es die QIS z. B. im Segment der Gebäudeversicherung (Feuer-Sach) vorsieht?

Vertiefungen zu diesem Abschnitt finden Sie in den Büchern von Cottin/Döhler (Abschnitt 6.2), Diers (Abschnitt 9.2.1) und Kortebein (Kapitel 2).

4.2 Interne Risikomodelle für die Schaden-/Unfallversicherung

Eine wesentliche Neuerung der zukünftigen aufsichtsrechtlichen Ausgestaltung des europäischen Solvency-II-Prozesses liegt in der *Prinzipienbasiertheit* gegenüber der bisherigen starren *Regelbasiertheit*. In der Konzeption von Solvency II ist daher die Möglichkeit vorgesehen, dass Versicherungsunternehmen eigene aktuarielle Modelle einsetzen, um die in der Säule I verankerten quantiativen Solvenzkapitalberechnungen unternehmensspezifisch abzugleichen oder sogar nach Beantragung auf Zulassung durch geeignete *interne Modelle* zu ersetzen. Die im vorangehenden Abschnitt behandelte Problematik der angemessenen Bestimmung einer adäquaten Eigenkapitalausstattung hat Ihnen bereits gezeigt, wie wichtig solche Modelle insbesondere für Schaden-/Unfallversicherer sind, die in aller Regel neben exponierten industriellen Großrisiken auch extreme Naturgefahren (Sturm, Hagel, Überschwemmungen …) z. B. im Rahmen der Gebäudeversicherung tragen. Interne Risikomodelle werden zukünftig aber nicht nur für aufsichtsrechtliche Zwecke eingesetzt werden. Sie können nämlich grundsätzlich mathematische Ergebnisverteilungen für diejenigen Wertgrößen produzieren, die in einem größeren ökonomischen Rahmen zur ganzheitlichen Unternehmenssteuerung und -bewertung geeignet sind. Technisch wird dies durch die rasante EDV-Entwicklung der letzten Jahre und die fortschreitenden Programmiertechniken ermöglicht, mit denen man Millionen von Simulationsläufen in kurzer Zeit erzeugen kann. Die Erstellung einer Vielzahl unterschiedlicher Szenarien auf der Aktiv- und Passivseite der Bilanz ermöglicht dem Management damit quasi „einen Blick in die Zukunft“. So können die Auswirkungen unternehmerischer Entscheidungen bereits im Computer auf ihre Effizienz getestet werden. Für Schaden-/Unfallversicherer sind hier als besonders wichtige Anwendungsgebiete zu nennen:

- eine risikogerechte Tarifierung aller Versicherungsprodukte unter Einschluss der relevanten Kostenanteile
- die Ausgestaltung einer effizienten und preislich optimierten Rückversicherungsstruktur
- eine risikogerechte Spätschadenrückstellungsstrategie und -bewertung
- der Aufbau eines ganzheitlichen Risikomanagementsystems
- eine angemessene Risikokapitalallokation
- ein effizientes Asset-Liability-Management

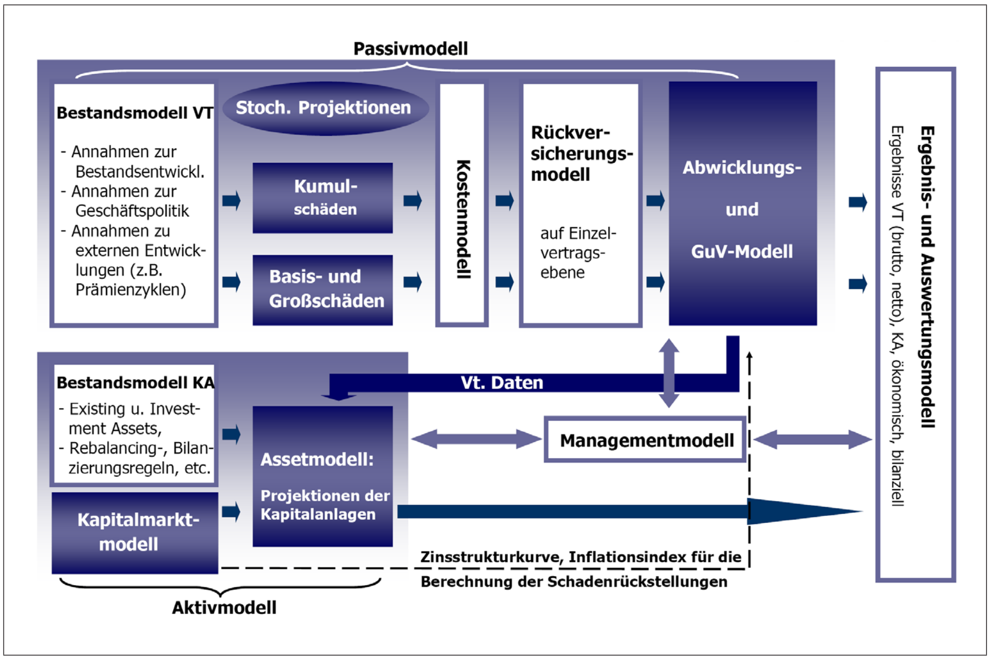


Abbildung 11: Schematische Darstellung eines internen Modells
Quelle: D. Diers: Interne Unternehmensmodelle, ifa-Verlag 2007

Die Konzeption und inhaltliche Ausgestaltung eines *internen Modells* ist, wie man der obigen Grafik aus der Monografie von Diers entnehmen kann, eine sehr anspruchsvolle Aufgabe. Neben den in dieser Lektion vorgestellten aktuariellen Methoden im Passivmodell spielen für *interne Modelle* auch finanzmathematische Aspekte, wie sie in den Lektionen 2 bis 4 vorgestellt wurden, im Aktivmodell eine wichtige Rolle.

Vertiefungen zu diesem Abschnitt finden Sie in den Büchern von Diers und Kortebein.

Quintessenz

ie zukünftige Ausgestaltung von Solvency II erlaubt es prinzipiell allen europäischen Versicherungsunternehmen, auf der Basis interner Modelle eigene Solvenzkapitalberechnungen im Vergleich mit der Säule I vorzunehmen. Hiermit ist eine große Herausforderung an die im Sachversicherungsbereich arbeitenden Aktuare verbunden, die ein profundes Wissen in der Versicherungs- und Finanzmathematik gleichermaßen erfordert.

Zusammenfassung

Sie haben in dieser Lektion viele grundlegende Anwendungsfelder, Begriffe und Modellierungsansätze der aktuariellen Versicherungsmathematik mit einem Fokus auf die Schaden-/Unfallversicherung kennen gelernt. Ein Schwerpunkt der Lektion bestand in dem interaktiven Bearbeiten von Beispielen mit einem Tabellenkalkulationsprogramm, das Ihnen das Verständnis der mathematischen Sachverhalte erleichtern und Anregungen für eigene Anwendungen geben sollte.

In Kapitel 1 haben Sie die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen der Risikotheorie kennen gelernt, die die Basis der mathematischen Modellierung im Bereich der Schaden-/Unfallversicherung bilden.

Im zweiten Kapitel wurde Ihnen eine Übersicht über die unterschiedlichen mathematischen Methoden und Verfahrensweisen zur Tarifierung von Versicherungsverträgen vermittelt.

Rückversicherung als Instrument der Risikoüberwälzung auf den sekundären Versicherungs- und Finanzmarkt haben Sie in Kapitel 3 näher kennen gelernt.

Im vierten Kapitel haben Sie einen ersten Einblick in die aktuellen Entwicklungen und mathemematischen Werkzeuge zur Einrichtung eines quantitativen Risikomanagements speziell im Hinblick auf die zukünftigen aufsichtsrechtlichen Vorgaben für die europäische Versicherungswirtschaft erhalten.

Naturgemäß können in einem solchen Lehrgang nicht alle Aspekte der Aktuarwissenschaften vollständig behandelt werden. Dafür ist das Gebiet mit seiner über 300-jährigen Geschichte zu umfangreich und zu spezialisiert. Die in der Literaturliste aufgeführten Titel, die in Auszügen auch zur Abfassung dieser Lektion gedient haben, bilden aber eine gute Ergänzung zur Vertiefung des gelernten Stoffes.

Übungsaufgaben

Die Übungsaufgaben entsprechen denen in den jeweiligen Kapiteln, siehe den entsprechenden Hinweis in der Zielformulierung dieser Lektion. Die Lösungen zur Selbstkontrolle folgen im Anschluss.

Aufgabe 1

Wie groß ist in Beispiel 1 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Versicherungsjahr mindestens 100.000 EUR Versicherungsleistung im Kollektiv ausbezahlt werden?

Aufgabe 2

Bei einer privaten Haftpflichtversicherung wird unterstellt, dass pro Jahr von 2.000 Versicherten im Schnitt einer einen Großschaden (über 10.000 EUR) verursacht. Das betrachtete Kollektiv enthält 500 Versicherte. Welche Verteilung besitzt die jährliche Anzahl der Großschäden im Kollektiv, wenn diese Größe pro Versicherten als Poisson-verteilt angenommen wird?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Kollektiv mehr als zwei Großschäden verursacht?

Aufgabe 3

Für die jährlichen Schäden aus einer Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung für männliche Fahranfänger mit einer bestimmten Regional- und Typklasse wird aus Erfahrung eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert $\mu = 900$ EUR und eine Standardabweichung $\sigma = 400$ EUR angenommen. Wie groß ist nach dem Solvency-II-Standard der Risikozuschlag, wenn das Kollektiv 500 Versicherte umfasst? Wie ändert sich der Risikozuschlag bei Vervierfachung der Versichertenzahl? Wie groß ist jeweils die resultierende Prämie?

Aufgabe 4

Wie groß wird asymptotisch die technische Ruinwahrscheinlichkeit, wenn eine Prämie *unterhalb* der Bedarfsprämie festgesetzt wird?

Aufgabe 5

Ein Versicherungsunternehmen betreibt eine Feuerversicherung für gewerbliche Risiken. Im Risikohandbuch sind für die fünf größten Betriebe folgende Angaben zu finden (in Mio. EUR):

Betrieb	1	2	3	4	5
Maximalschaden	10	7	5	2	1
Eintrittswahrscheinlichkeit	0,001	0,002	0,002	0,02	0,1

Berechnen Sie approximativ mit der Panjer-Rekursion die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Kollektiv der fünf Betriebe ein jährlicher Schaden von 7 Mio. EUR und mehr entsteht.

Aufgabe 6

Für die jährlichen Einzelschadenhöhen aus einer Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung für männliche Fahranfänger mit einer bestimmten Regional- und Typklasse wird aus Erfahrung eine Verteilung mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2} \text{ für } x > 0$$

angenommen (monetäre Einheit: 500 EUR). Die Schadenfrequenz wird als Poisson-verteilt angenommen mit dem Erwartungswert $\lambda = 2,3$. Wie groß ist nach dem kollektiven Modell der Risikotheorie die Bedarfsprämie? Wie groß ist approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahranfänger im Versicherungsjahr einen Gesamtschaden von maximal 1.000 EUR verursacht?

Hinweis: Der Erwartungswert $E[Y]$ einer Zufallsvariablen *Y* mit Verteilungsfunktion *F* kann alternativ berechnet werden über die Formel

$$E[Y] = \int_0^\infty (1 - F(x))\,dx.$$

Aufgabe 7

Ein Versicherungsunternehmen betreibt eine verbundene Gebäudeversicherung (VGV) für private Wohngebäude. Die Gebäude liegen in zwei verschiedenen Regionen R_1 und R_2. Je nach Region können fünf verschiedene Sturmszenarien eintreten. Die folgende Tabelle gibt − regional differenziert − die zugehörigen *Event Loss Tables* wieder (monetäre Einheit: 1 Mio. EUR):

R_1	Szenario	1	2	3	4	5
	Loss	1	2	4	5	7
	Rate	1,2	0,8	0,3	0,15	0,05
R_2	Szenario	1	2	3	4	5
	Loss	1	3	4	5	6
	Rate	0,9	0,4	0,1	0,05	0,05

a) Berechnen Sie die AEP- und OEP-Kurven regional differenziert sowie für den Gesamtbestand.

b) Für beide Regionen sollen jeweils Reserven in Höhe des 99,5 %-Quantils der Gesamtschadenverteilung gebildet werden (Solvency-II-Standard).

c) Welcher Diversifikationseffekt ergibt sich, wenn man statt der regionalen Differenzierung eine Reserve in Höhe des 99,5 %-Quantils der Gesamtschadenverteilung für den Gesamtbestand bildet?

Aufgabe 8

Untersuchen Sie unter Verwendung des Excel-Tabellenblatts *QQPlot.XLS*, wie die Schätzer für μ und σ bzw. die Bedarfsprämie auf den größten beobachteten Schaden des Jahres 2001 in Beispiel 8 reagieren, indem Sie diesen Wert der Reihe nach durch die Zahlen 100, 90, 80, 70 ersetzen. Wie reagiert darauf der Q-Q-Plot?

Aufgabe 9

Es gibt Lage-Skalenfamilien von Verteilungen, für die die ML-Schätzer nicht elementar berechnet werden können, z. B. bei der *logistischen Verteilung*.

Vergleiche dazu Lektion 1, „Finanzmathematische Grundlagen“, Abschnitt 2.2.1.

Ein Q-Q-Plot ist aber auch in diesem Fall durchführbar.

a) Zeigen Sie, dass hier die theoretischen Quantile gegeben sind durch

$$q_k = \ln\left(\frac{k}{n+1-k}\right),\ k = 1,\cdots,n.$$

b) Erstellen Sie unter Verwendung des Excel-Arbeitsblatts *QQPlot.XLS* einen Q-Q-Plot für die logarithmierten Schäden aus Beispiel 8 mit der logistischen Verteilung als Prototyp. (Die sich hieraus ergebende Verteilung für die Originalschäden heißt sinngemäß *loglogistische Verteilung*.)

c) Vergleichen Sie die sich jetzt ergebende Bedarfsprämie mit derjenigen aus dem Lognormalverteilungsansatz.

Aufgabe 10

Berechnen Sie mithilfe des Excel-Arbeitsblatts *Credibility.XLS* die Credibility-Prämien H_n^* sowie die jeweiligen Prämien (in Euro) für das zuletzt behandelte Beispiel in Abschnitt 2.3, wenn statt zwei *drei* Risikogruppen betrachtet werden, und zwar mit dem zusätzlichen Strukturparameter $\vartheta = 0{,}15$ (Normalfahrer). Das Verhältnis zwischen vorsichtigen, normalen und unvorsichtigen Fahrern im Kollektiv sei 2 : 3 : 1. Die Prämien sollen nach dem Erwartungswertprinzip mit dem Zuschlagsfaktor $\delta = 0{,}2$ bestimmt werden.

Aufgabe 11

a) Berechnen Sie die Ultimates und benötigte Reserven mithilfe des Excel-Arbeitsblatts *ChainLadder.XLS* für den folgenden Datensatz:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenstände)				
	0	1	2	3	4
0	123	367	402	415	**455**
1	359	674	773	859	
2	69	111	123		
3	666	1001			
4	207				
F_k	–				

b) Passen Sie die Anfalljahresschäden sowie die Ultimates an eine Lognormalverteilung an und ermitteln Sie auf statistischer Basis jeweils eine geeignete Bedarfsprämie. Wie beurteilen Sie das Ergebnis?

c) Wie hoch ist die tatsächliche Prämie, wenn auf Ultimate-Basis kalkuliert wird und ein Sicherheitszuschlag nach dem Standardabweichungsprinzip mit $\delta = 20\%$ erhoben wird?

Aufgabe 12

Untersuchen Sie durch „Ausprobieren“ mit dem Excel-Arbeitsblatt *PropRV.XLS*, ab welchem Schadenaufwand in der höchsten VS-Klasse in Beispiel 13 die Summenexzedenten-Rückversicherung in Bezug auf die Nettoschadenquote günstiger als ein reiner Quotenvertrag wird, wenn in den übrigen VS-Klassen die Schadenaufwände gleich bleiben.

Ab welchem Schadenaufwand in der höchsten VS-Klasse wird beim Quotenvertrag die 100 %-Grenze für die Schadenquote überschritten? Wie verhält sich hier der Summenexzedenten-Rückversicherungsvertrag?

Aufgabe 13

Berechnen Sie für die Betriebsunterbrechungsversicherung aus Beispiel 8 die Rückversicherungsbedarfsprämie für einen SL-Vertrag mit Priorität 50 und Haftungsstrecke 100.

Aufgabe 14

Untersuchen Sie unter Verwendung des Excel-Arbeitsblatts *SCR.XLS*, wie die nach den drei vorgestellten Verfahren geschätzten Solvenzkapitalien in Beispiel 17 reagieren, wenn sich das Prämienvolumen auf

a) 10 Mio. EUR
b) 18 Mio. EUR
c) 1 Mio. EUR

belaufen würde. Wie beurteilen Sie in diesem Zusammenhang die Solvenzkapitalanforderungen nach QIS?

Aufgabe 15

Wie reagieren die SCR-Berechnungen in Beispiel 17, wenn lediglich die letzten fünf Jahre der Schadenerfahrung berücksichtigt werden, wie es die QIS z. B. im Segment der Gebäudeversicherung (Feuer-Sach) vorsieht?

Lösungen

Lösung 1

Durch Übergang zu komplementären Wahrscheinlichkeiten erhalten wir:

$$P[S_n \geq 100.000] = P[M_n \geq 1] = 1 - P[M_n = 0] = \binom{n}{0} q_x^0 (1-q_x)^n$$
$$= 0{,}99834^{1000} = 0{,}1899.$$

Lösung 2

Nach Aufgabenstellung beträgt die erwartete Großschadenzahl je Versicherten $\lambda = \frac{1}{2.000} = 0{,}0005.$ Der Erwartungswert der Gesamtzahl der Großschäden im Kollektiv ist demnach gegeben durch $500 \cdot \lambda = 0{,}25.$ Die Verteilung der jährlichen Anzahl der Großschäden S_n im Kollektiv ist ebenfalls eine Poisson-Verteilung, und zwar mit dem Parameter $\nu = 0{,}25.$ Es folgt:

$$P[S_n > 2] = 1 - P[S_n \leq 2] = 1 - e^{-\nu} \sum_{k=0}^{2} \frac{\nu^k}{k!} = 1 - \left(1 + \nu + \frac{\nu^2}{2}\right) e^{-\nu} = 0{,}002161.$$

Lösung 3

Der Risikozuschlag beträgt $\delta_n = \frac{2{,}5758 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}5758 \cdot 400}{\sqrt{500}} = 46{,}08$ EUR im ersten Fall, im zweiten die Hälfte hiervon (wegen $1/\sqrt{4} = 1/2$). Die resultierende Prämie ist im ersten Fall 946,08 EUR, im zweiten 923,04 EUR.

Lösung 4

Die Prämie sei $\rho < \mu = E[X_i].$ Dann folgt aus dem zentralen Grenzwertsatz:

$$\lim_{n\to\infty} P[S_n > n\rho] = \lim_{n\to\infty} P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} > \frac{n(\rho-\mu)}{\sqrt{n\sigma^2}}\right] = 1 - \lim_{n\to\infty} N\left[\sqrt{n}\frac{\rho-\mu}{\sigma}\right]$$
$$= 1 - \lim_{z\to-\infty} N[z] = 1$$

wegen $p - \mu < 0.$

Lösung 5

Das Problem ist ähnlich wie in Beispiel 5 (Lebensversicherung). Die fünf Betriebe können jeder für sich als ein homogenes Teilkollektiv aufgefasst werden, wobei die jeweilige Frequenzverteilung eine Binomialverteilung mit den angegebenen Eintrittswahrscheinlichkeiten ist, die durch eine Poisson-Verteilung mit demselben Erwartungswert approximiert wird. Die jeweilige Schadenhöhe entspricht dem angegebenen Maximalschaden. Tabellarisch ergibt sich:

j	1	2	3	4	5	Summe
λ_j	0,001	0,002	0,002	0,02	0,1	$\lambda =$ 0,125
$\frac{\lambda_j}{\lambda}$	0,008	0,016	0,016	0,16	0,8	1
Max. Schaden	10	7	5	2	1	

Als Mischverteilung Q erhalten wir somit die folgende diskrete Verteilung:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Q(\{k\})$	0,8	0,16	0	0	0,016	0	0,016	0	0	0,008

Beachten Sie bitte, dass hier wieder $f_k = Q(\{k\})$ gilt! Mit Excel ergibt sich aus der Panjer-Rekursion:

k	0	1	2	3	4
g_k	0,88250	0,08825	0,02206	0,00191	0,00027
kumuliert	0,88250	0,97075	0,99281	0,99472	0,99499
komplementär	0,11750	0,02925	0,00719	0,00528	0,00501

k	5	6	7
g_k	0,00179	0,00018	0,00181
kumuliert	0,99678	0,99695	0,99876
komplementär	0,00322	0,00305	0,00124

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also approximativ 0,00124.

Lösung 6

Wir bezeichnen wie zuvor mit Y den typischen Einzelschaden und mit N die Frequenzvariable. Nach Hinweis gilt:

$$E[Y] = \int_0^\infty (1 - F(x))dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}dx = -\frac{1}{1+x}\Big|_0^\infty = 1,$$

Das entspricht nominal 500 EUR. Die Bedarfsprämie ergibt sich aus der Formel

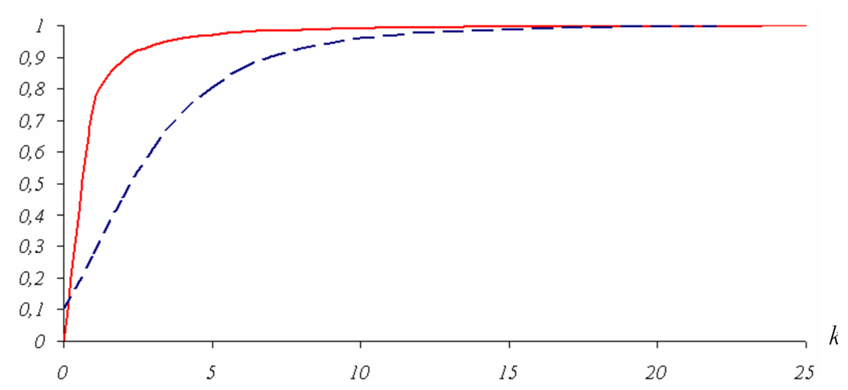
$$E[X] = E[N] \cdot E[Y] = 2{,}6 \times 500 \text{ EUR} = 1.300 \text{ EUR}.$$

Nach der Panjer-Rekursion erhält man mit Excel analog zu Beispiel 6 mit

$$f_k = \frac{F(k) - F(k-1)}{F(20)} \quad \text{für } k = 1, \cdots, 20:$$

k	0	1	2	3	4
g_k	0,1003	0,1733	0,1819	0,1531	0,1151
kumuliert	0,1003	0,2736	0,4555	0,6086	0,7237

Der Schwellenwert 1.000 EUR entspricht hier $k = 2$, somit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit 0,4555.



Verteilungsfunktion der Einzelschadenhöhen (durchgezogene Linie) und Verteilungsfunktion des jährlichen Gesamtschadens nach Panjer-Rekursion, linear geglättet (gestrichelte Linie)

Lösung 7

Die Aufgabe kann vollständig mit dem Excel-Arbeitsblatt *ELT.XLS* gelöst werden.

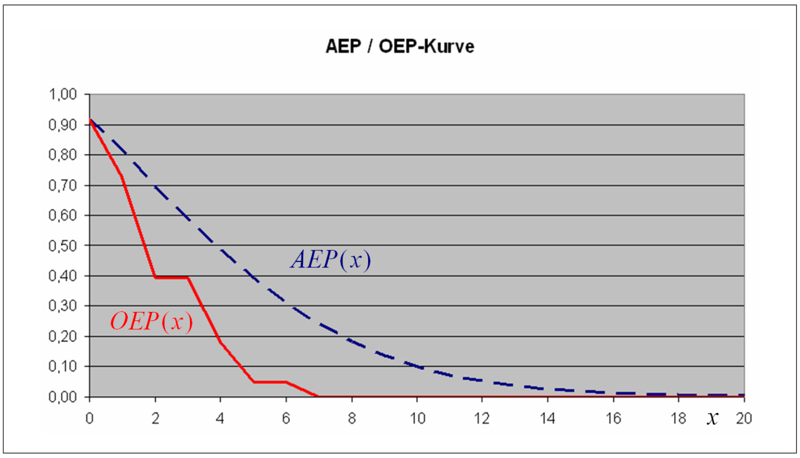
a) Tabellarisch ergibt sich (auf drei Dezimalen gerundet):

Region 1: $\lambda(1) = \sum_j \lambda_j(1) = 2{,}5$

x	0	1	2	3	4	5	6
$AEP(x)$	0,918	0,819	0,695	0,592	0,487	0,393	0,309
$OEP(x)$	0,918	0,727	0,393	0,393	0,181	0,049	0,049

x	7	8	9	10	11	12	13
$AEP(x)$	0,238	0,181	0,134	0,099	0,071	0,051	0,036

x	14	15	16	17	18	19	20
$AEP(x)$	0,025	0,017	0,012	0,008	0,005	0,003	0,002



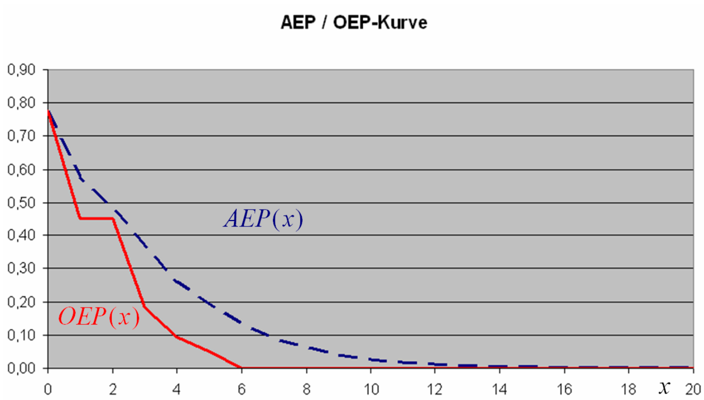
Region 1

Region 2: $\lambda(2) = \sum_j \lambda_j(2) = 1{,}5$

x	0	1	2	3	4	5	6
$AEP(x)$	0,777	0,576	0,486	0,369	0,261	0,192	0,133
$OEP(x)$	0,777	0,451	0,451	0,181	0,095	0,049	0,000

x	7	8	9	10	11	12	13
$AEP(x)$	0,088	0,061	0,040	0,025	0,016	0,010	0,006

x	14	15	16	17	18	19	20
$AEP(x)$	0,004	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000



Region 2

Gesamtbestand: $\lambda = \lambda(1) + \lambda(2) = 4$

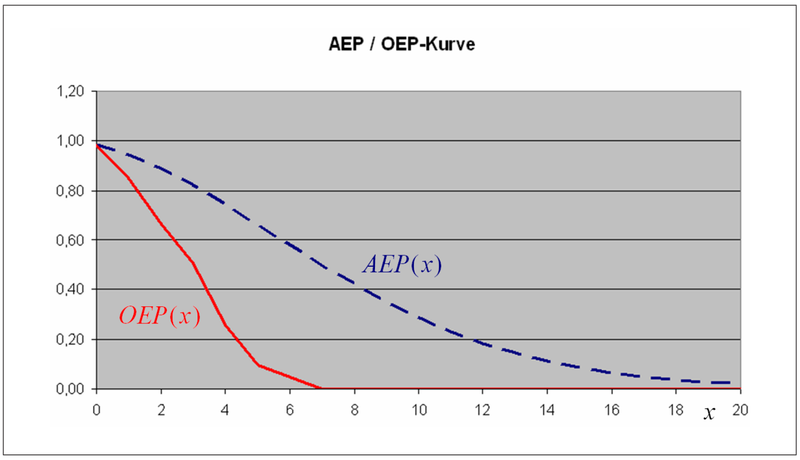
(Die Erwartungswerte der einzelnen Schadenfrequenzen addieren sich.)

x	0	1	2	3	4	5	6
$AEP(x)$	0,982	0,943	0,888	0,822	0,746	0,664	0,580
$OEP(x)$	0,982	0,850	0,667	0,503	0,259	0,095	0,049

x	7	8	9	10	11	12	13
$AEP(x)$	0,497	0,419	0,347	0,284	0,228	0,181	0,142

x	14	15	16	17	18	19	20
$AEP(x)$	0,110	0,084	0,063	0,047	0,035	0,026	0,019

x	21	22	23	24	25	26	27
$AEP(x)$	0,013	0,009	0,007	0,005	0,003	0,002	0,002



b) Durch Ablesen aus den obigen Ergebnistabellen (grau unterlegte Felder) erhält man:

Reserve für Region 1:	18 Mio. EUR	32 Mio. EUR
Reserve für Region 2:	14 Mio. EUR	
Reserve für Gesamtbestand:	24 Mio. EUR	24 Mio. EUR

c) Gegenüber der Bildung zweier einzelner Reserven spart man bei der Bildung einer (Gesamt-)Reserve 12 Mio. EUR ein (= Diversifikationseffekt).

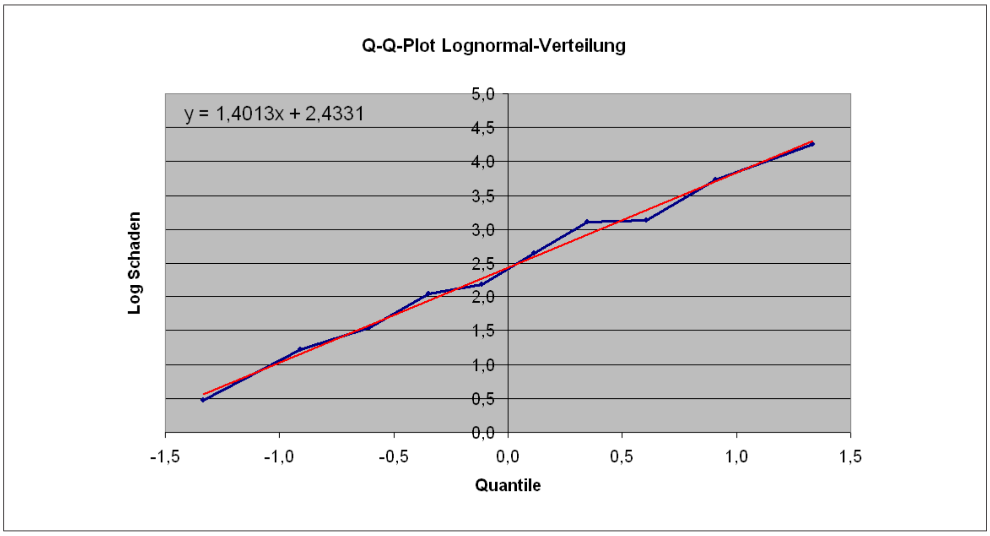
Lösung 8

Lösung in tabellarischer Form (auf eine Dezimale gerundet):

Schaden 2001	QQ-Prämie	ML-Prämie	Mittelwert
104	35,778	23,730	23,150
100	35,196	23,438	22,750
90	33,690	22,687	21,750
80	32,103	21,903	20,750
70	30,416	21,078	19,750

Fazit: Sowohl die Bedarfsprämie nach dem Q-Q-Plot wie nach dem ML-Verfahren sinken mit dem Schaden, beide liegen jeweils über dem mittleren Schaden aus den zehn Jahren Schadenerfahrung. Die Bedarfsprämie aus dem Q-Q-Plot liegt tendenziell stets deutlich über derjenigen aus dem ML-Verfahren.

Mit fallendem Schaden aus dem Jahr 2001 wird der Q-Q-Plot vor allem am oberen Ende immer glatter, wie die Grafik für den kleinsten Schaden deutlich zeigt:



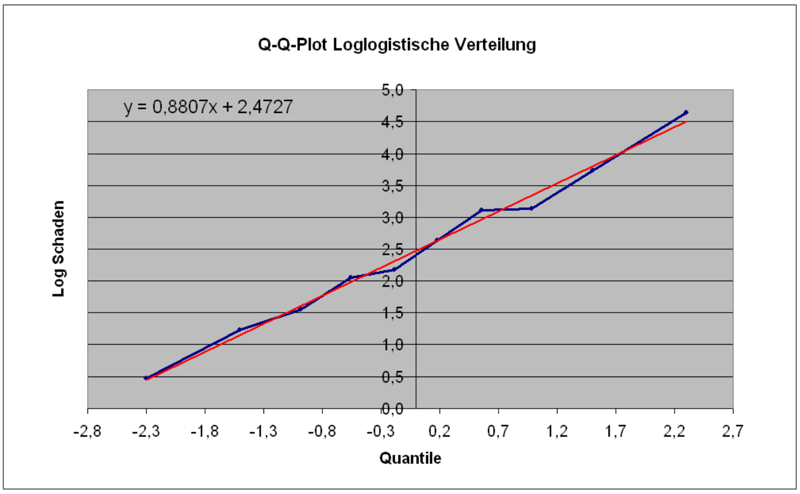
Lösung 9

a) Wegen $q_k = F^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right)$, $k = 1,\cdots,n$ muss folgende Gleichung gelöst werden:

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{k}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad 1+e^{-x} = \frac{n+1}{k} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} = \frac{n+1}{k} - 1 = \frac{n+1-k}{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\ln\left(\frac{n+1-k}{k}\right) = \ln\left(\frac{k}{n+1-k}\right)$$

b) Mit Excel erhält man:



Die Anpassung erscheint ebenfalls akzeptabel.

c) Als Bedarfsprämie ergibt sich für den Fall, dass $\hat{\sigma} < 1$ ist, die Größe

$BP = \dfrac{e^{\hat{\mu}} \cdot \hat{\sigma} \cdot \pi}{\sin(\hat{\sigma} \cdot \pi)} = 89{,}565$ (Formel ohne Beweis). Dieser Wert ist mehr als doppelt so hoch wie die Bedarfsprämie im Lognormalverteilungsmodell!

Lösung 10

Eine allgemeine Lösung für K Risikoklassen mit den Strukturparametern $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_K$ erhält man für dieses Beispiel wie folgt:

$$E[H(\Theta)] = E[\Theta] = E[X] = \sum_{i=1}^{K} \vartheta_i \cdot P[\Theta = \vartheta_i]$$

$$Var[H(\Theta)] = Var[\Theta] = \left\{ \sum_{i=1}^{K} \vartheta_i^2 \cdot P[\Theta = \vartheta_i] \right\} - \{E[\Theta]\}^2$$

$$E[Var(X|\Theta)] = \sum_{i=1}^{K} \vartheta_i \cdot (1 - \vartheta_i) \cdot P[\Theta = \vartheta_i]$$

Diese Größen sind im Excel-Arbeitsblatt *Credibility.XLS* für bis zu zehn Risikoklassen hinterlegt. Konkret gilt hier: $K = 3$ mit

	$\vartheta_1 = 0{,}1$	$\vartheta_2 = 0{,}15$	$\vartheta_3 = 0{,}2$
$P[\Theta = \vartheta_i]$	2/6	3/6	1/6

und

$$E[H(\Theta)] = E[X] = 0{,}14167\ ,\ Var[H(\Theta)] = 0{,}00118\ ,\ E[Var(X\,|\,\Theta)] = 0{,}12042.$$

Mit Excel erhalten wir als Endergebnis:

n	1	2	3	4	5
X_n	1	0	0	0	1
H_n^*	0,1500	0,1486	0,1471	0,1458	0,1537
Bedarfsprämie in EUR	750,00	742,79	735,71	728,77	768,69
Prämie in EUR	900,00	891,35	882,86	874,53	922,43

n	6	7	8	9	10
X_n	0	0	0	1	0
H_n^*	0,1523	0,1509	0,1495	0,1572	0,1558
Bedarfsprämie in EUR	761,57	754,59	747,73	786,04	779,02
Prämie in EUR	913,89	905,50	897,27	943,24	934,82

Lösung 11

a) Die Lösung besteht aus einer Kombination der beiden Excel-Arbeitsblätter *ChainLadder.XLS* und *QQPlot.XLS*:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenstände)					Reserve
	0	1	2	3	**4 (Ultimates)**	
0	123	367	402	415	**455,00**	–
1	359	674	773	859	**941,80**	82,80
2	69	111	123	133,36	**146,22**	23,22
3	666	1001	1127,86	1222,89	**1340,76**	339,76
4	207	366,20	412,62	447,38	**490,50**	283,50
F_k	–	1,7691	1,1267	1,0843	1,0964	**729,28**

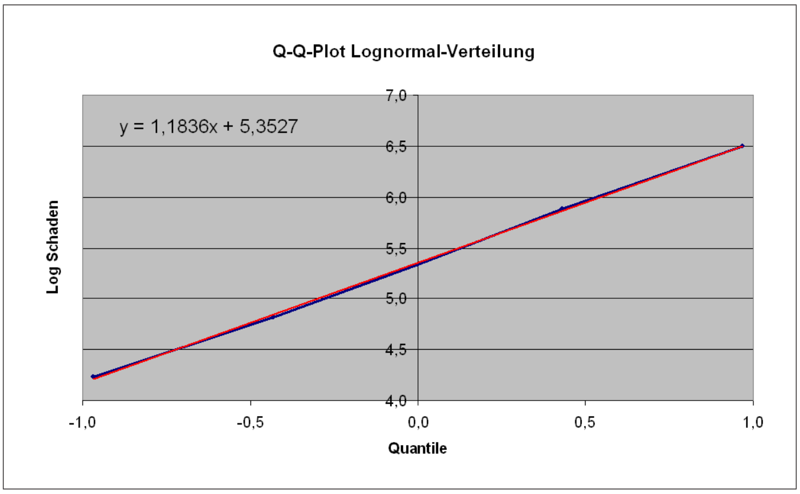
k	Schaden	Log Schaden	u_k	Quantil	Log Schaden sortiert	mu	sigma	QQ-Prämie	ML-Prämie
1	123	4,8122	0,1667	-0,9674	4,2341	5,35	1,18	**425,472**	**289,220**
2	359	5,8833	0,3333	-0,4307	4,8122				
3	69	4,2341	0,5000	0,0000	5,3327				
4	666	6,5013	0,6667	0,4307	5,8833				
5	207	5,3327	0,8333	0,9674	6,5013				

k	Schaden	Log Schaden	u_k	Quantil	Log Schaden sortiert	mu	sigma	QQ-Prämie	ML-Prämie
1	455	6,1203	0,1667	-0,9674	4,9851	6,27	1,10	**962,927**	**704,772**
2	941,80	6,8478	0,3333	-0,4307	6,1203				
3	146,22	4,9851	0,5000	0,0000	6,1954				
4	1340,76	7,2010	0,6667	0,4307	6,8478				
5	490,50	6,1954	0,8333	0,9674	7,2010				

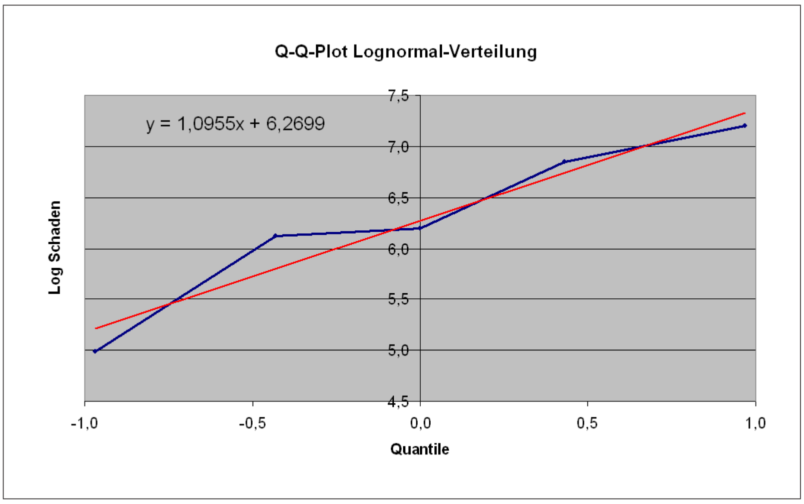
b) Bedarfsprämien:

Anfalljahresschäden: 425.472 EUR (nach Q-Q-Plot) bzw.
289.220 EUR (nach ML-Methode)

Ultimates: 962.927 EUR (nach Q-Q-Plot) bzw.
704.772 EUR (nach ML-Methode)



Q-Q-Plot für Anfalljahresschäden



Q-Q-Plot für Ultimates

Beurteilung: Es fällt auf, dass die Anfalljahresschäden extrem gut an eine Lognormalverteilung angepasst werden können, die Ultimate-Schäden weniger gut, aber noch akzeptabel.

Die Ultimate-Bedarfsprämie(n) ist/sind mehr als doppelt so hoch wie die Anfalljahres-Bedarfsprämie(n)!

c) Für Erwartungswert und Varianz einer lognormalverteilten Zufallsvariablen X gilt nach Lektion 1, Abschnitt 2.3.4:

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$Var(X) = \exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right) - \exp\left(2\mu + \sigma^2\right) = \left(\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right) \cdot \left\{E(X)\right\}$$

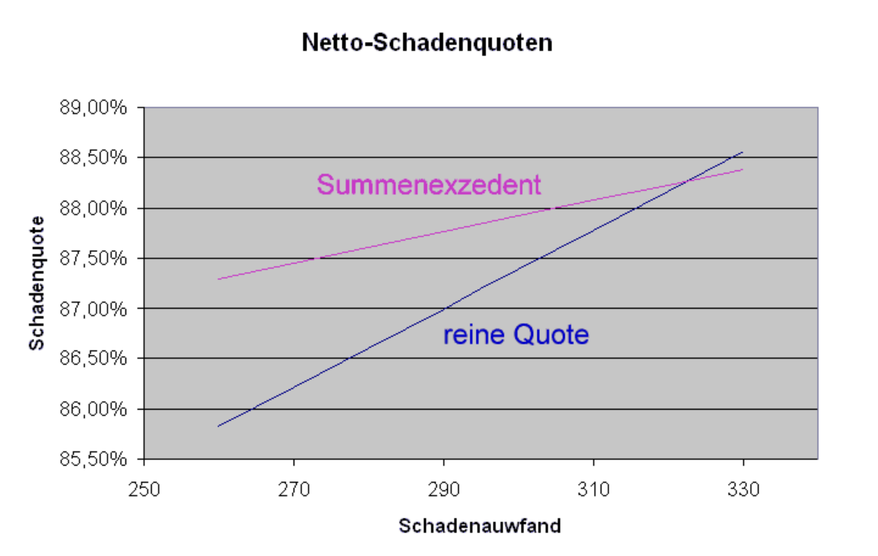
Für die Ultimate-Verteilung lesen wir im ersten Q-Q-Plot oben ab: $\mu = 6{,}2699$ und $\sigma = 1{,}0955$, woraus $E(X) = 962{,}927$ folgt sowie $Var(X) = 2.151.613$ mit $\sqrt{Var(X)} = \sqrt{2.151.613} = 1466{,}838$. Die Prämie beträgt also $E(X) + 0{,}2 \cdot \sqrt{Var(X)} = 962{,}927 + 293{,}368 = 1.256{,}295$ TEUR.

Lösung 12

Durch wechselnde Veränderung der Zelle *H6* im Excel-Arbeitsblatt *PropRV.XLS[Quote]* erhält man z. B. folgende Zwischenergebnisse (in %):

Schadenaufwand (TEUR)	260	270	280	290	300	310	320	330
Netto-SQ reine Quote	85,82	86,21	86,60	86,99	87,39	87,78	88,17	88,56
Netto-SQ Summenexzedent	87,30	87,46	87,61	87,77	87,92	88,08	88,23	88,39

Die Nettoschadenquote des reinen Quotenvertrags steigt mit wachsendem Schadenaufwand schneller als diejenige des Summenexzedentenvertrages.

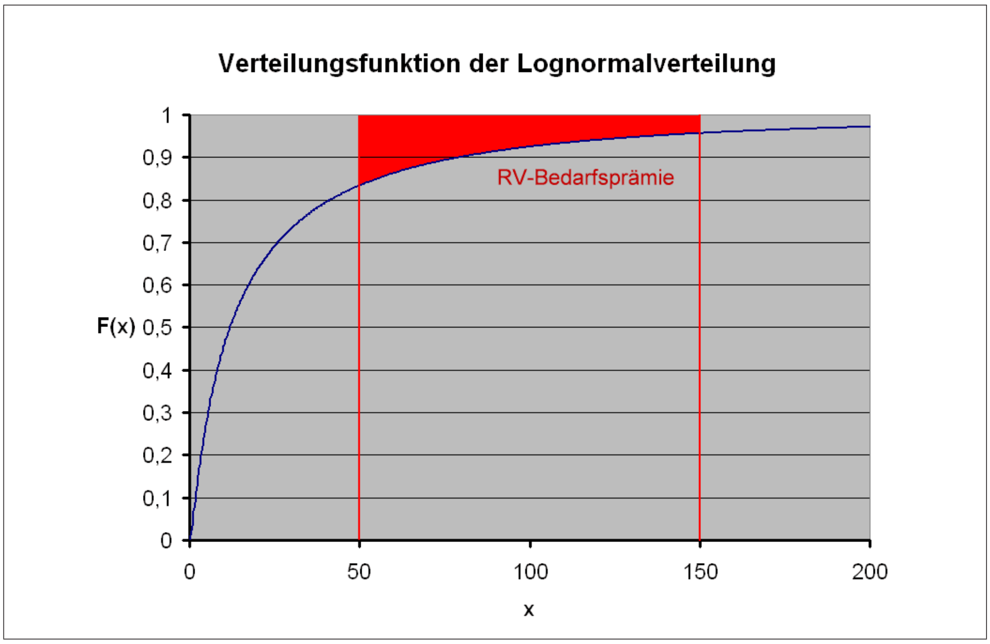


Der Schnittpunkt wird bei einem Schadenaufwand von 322,5 TEUR erreicht. Die Nettoschadenquote beträgt dann bei beiden Vertragstypen 88,27 %.

Beim reinen Quotenvertrag wird die 100 %-Schadenquote bei einem Schadensaufwand von 622,4 TEUR erreicht. Der Summenexzedentenvertrag weist demgegenüber nur eine 92,91 %-Nettoschadenquote auf.

Lösung 13

Mithilfe des Excel-Arbeitblatts *QQPlot.XLS* erhält man als Schätzer für die Parameter $\hat{\mu} = 2{,}47647$ und $\hat{\sigma} = 1{,}47925$. Durch Einsetzen dieser Werte in das Excel-Arbeitblatt *NPrpopRV.XLS* ergibt sich als Rückversicherungsbedarfsprämie der Wert 8.604 EUR.



Lösung 14

Der Q-Q-Plot verändert sich durch eine proportionale Veränderung des Prämienvolumens nur in Form einer Parallelverschiebung der Regressionsgeraden nach unten; als Schätzer ergeben sich die folgenden Werte:

a) $\hat{\mu}_{QQ} = -1{,}6157 \quad \hat{\sigma}_{QQ} = 1{,}0310 \quad SCR_{QQ} = 18{,}296$

$\hat{\mu}_{ML} = -1{,}6157 \quad \hat{\sigma}_{ML} = 0{,}8834 \quad SCR_{ML} = 9{,}346$

$\hat{\mu}_{QIS} = -0{,}0566 \quad \hat{\sigma}_{QIS} = 0{,}3364 \quad SCR_{QIS} = 12{,}478$

Mittlere Schaden-Kosten-Quote: 30,55 %

b) $\hat{\mu}_{QQ} = -2{,}2034 \quad \hat{\sigma}_{QQ} = 1{,}0310 \quad SCR_{QQ} = 10{,}296$

$\hat{\mu}_{ML} = -2{,}2034 \quad \hat{\sigma}_{ML} = 0{,}8834 \quad SCR_{ML} = 1{,}346$

$\hat{\mu}_{QIS} = -0{,}0182 \quad \hat{\sigma}_{QIS} = 0{,}1906 \quad SCR_{QIS} = 10{,}878$

Mittlere Schaden-Kosten-Quote: 19,23 %

c) $\hat{\mu}_{QQ} = 0{,}6869 \quad \hat{\sigma}_{QQ} = 1{,}0310 \quad SCR_{QQ} = 27{,}296$

$\hat{\mu}_{ML} = 0{,}6869 \quad \hat{\sigma}_{ML} = 0{,}8834 \quad SCR_{ML} = 18{,}346$

$\hat{\mu}_{QIS} = -1{,}2818 \quad \hat{\sigma}_{QIS} = 1{,}6011 \quad SCR_{QIS} = 16{,}157$

Mittlere Schaden-Kosten-Quote: 305,55 %

Beurteilung:

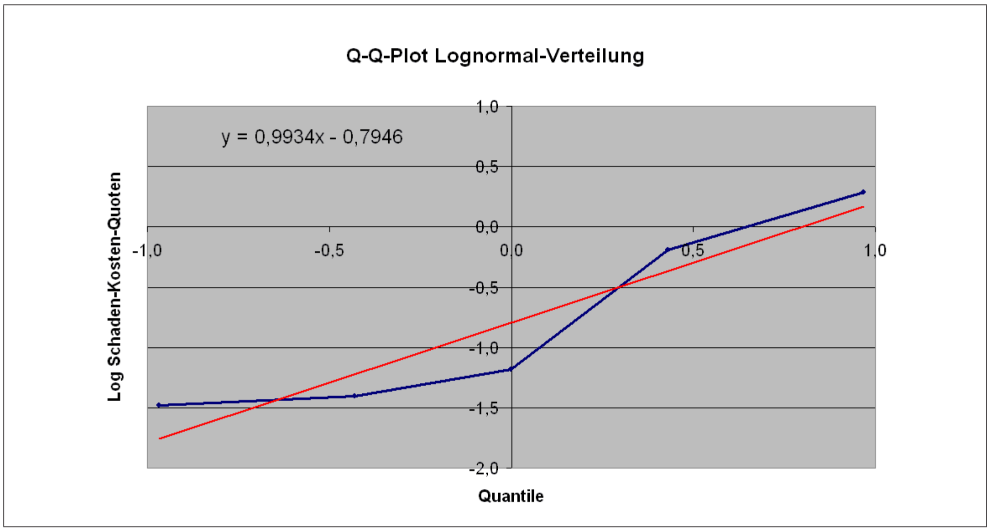
a) Obwohl die Risikosituation des Unternehmens durch die höheren Prämien jetzt wegen der mittleren Schaden-Kosten-Quote 30,55 % deutlich besser ist, fällt die Solvenzkapitalanforderung nach QIS-Standard deutlich höher aus als nach der Maximum-Likelihood-Methode. Die Q-Q-Plot-Methode schätzt dagegen wieder einen wesentlich höheren Kapitalbedarf.

b) Hier liegt der Extremfall einer äußerst geringen mittleren Schaden-Kosten-Quote vor, die Risikosituation des Unternehmens ist also sehr moderat. Trotzdem fällt das nach QIS-Standard berechnete Solvenzkapital höher aus als das nach aktuariellen Methoden berechnete, es ist sogar mehr als achtmal so hoch wie das SCR nach dem ML-Ansatz!

c) Dies entspricht dem gegenteiligen Extrem einer völlig untertarifierten Situation. Hier liegt das SCR nach QIS-Standard unter beiden anderen Alternativen. Diese Eigenkapitalanforderung ist erheblich zu gering.

Lösung 15

Die Berücksichtigung lediglich der letzten fünf Jahre führt zu folgendem Q-Q-Plot:



mit den Schätzungen

$$\hat{\mu}_{QQ} = -0{,}7946 \quad \hat{\sigma}_{QQ} = 0{,}9934 \quad SCR_{QQ} = 24{,}182$$

$$\hat{\mu}_{ML} = -0{,}7946 \quad \hat{\sigma}_{ML} = 0{,}7091 \quad SCR_{ML} = 9{,}034$$

$$\hat{\mu}_{QIS} = -0{,}1045 \quad \hat{\sigma}_{QIS} = 0{,}4572 \quad SCR_{QIS} = 9{,}624$$

bei einer mittleren Schaden-Kosten-Quote von 58,67 %.

Beurteilung: Obwohl sich die Risikosituation des Unternehmens durch die etwas geringere mittlere Schaden-Kosten-Quote besser darstellt, fällt die Solvenzkapitalanforderung nach der Q-Q-Plot-Methode geringfügig höher aus als vorher.

Die Kapitalanforderungen nach den beiden anderen Ansätzen sind dagegen deutlich geringer als vorher und unterscheiden sich numerisch nur wenig.

Literaturverzeichnis

Bühlmann, H./Gisler, A.: A Course in Credibility Theory and its Applications. Springer Verlag, Berlin 2005
Ein modernes mathematisch-theoretisches Grundlagenwerk zur Erfahrenstarifierung aus der klassischen schweizerischen Schule.

Cottin, C./Döhler, S.: Risikoanalyse. Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken mit Praxisbeispielen. Vieweg+Teubner GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009
Ein modernes Lehrbuch zur Versicherungsmathematik und Risikotheorie, das sich vorzüglich auch zum Selbststudium eignet.

Diers, D.: Interne Unternehmensmodelle in der Schaden- und Unfallversicherung. ifa-Schriftenreihe, Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften. Ifa-Verlag, Ulm 2007
Ein spezialisierter Beitrag zur Ausgestaltung Interner Modelle aus praktischer Sicht.

Grossi, P./Kunreuther, H. (Eds.): Catastrophe Modeling: A new Approach to Managing Risk. Springer Science+Business Media Inc., New York, 2005
Eines der wenigen allgemeinverständlichen Sachbücher zum Thema Risikomodellierung von Naturgefahren.

Kortebein, C. et al. (DAV-Arbeitsgruppe Interne Risikomodelle): Interne Risikomodelle in der Schaden-/Unfallversicherung. Schriftenreihe Versicherungs- und Finanzmathematik, Band 35, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 2008
Eine aktuelle Übersicht zum Stand der Diskussion um Interne Modelle aus Sicht der Deutschen Aktuarvereinigung.

Liebwein, P.: Klassische und moderne Formen der Rückversicherung. 2. Aufl., Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 2009
Ein sehr modernes, vollumfängliches Buch zu diversen Aspekten von Rückversicherung und Alternativem Risikotransfer.

Mack, T.: Schadenversicherungsmathematik. 2. Aufl., Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 2002
Ein von einem Praktiker verfasster Klassiker zu (fast) allen Aspekten der Versicherungsmathematik.

Radtke, M./Schmidt, K. D.: Handbuch zur Schadenreservierung. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 2004
Das mathematische Standardwerk zu allen Aspekten der Spätschadenreservierung.

Schmidt, K. D.: Versicherungsmathematik, Springer Verlag, 2. Aufl., Berlin 2009
Ein überwiegend akademisches Lehrbuch zur Versicherungsmathematik für alle, die es genauer wissen wollen.

Schwepcke, A.: Rückversicherung. Grundlagen und aktuelles Wissen. Ein Leitfaden zum Selbststudium. Herausgegeben von der Deutschen Versicherungsakademie, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 2001
Ein für Praktiker konzipiertes, sehr ausführliches Handbuch zu allen Aspekten der klassischen Rückversicherung.