Anmerkungen zur Bestimmung des SCR und zur “Kovarianzformel” im Standardmodell von GDV / BaFin

54. ASTIN-Tagung
Hamburg, 16.11.2006

Dietmar Pfeifer & Doreen Straßburger

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG
FAKULTÄT V
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Gliederung

1. Zur Begriffsbestimmung des “SCR”
2. Risikomessung unter Solvency II
3. Hält die Wurzelformel, was sie verspricht? (I)
4. Copulas
5. Hält die Wurzelformel, was sie verspricht? (II)
6. Implikationen für Solvency II
7. Literatur

1. Zur Begriffsbestimmung des “SCR”

Solvency: What Is It?

2.2 What Does Solvency Mean?

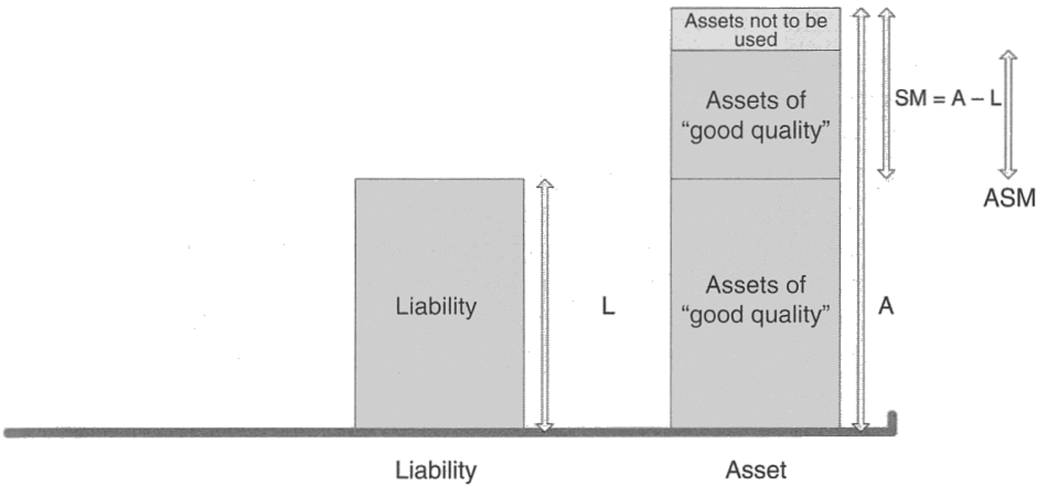
The solvency margin is a buffer in a company's assets covering its liabilities. For the supervisor, it is important that the policyholders are protected, but it is also important for him to ensure the stability on the financial market. In view of this, the definition of the *solvency margin* (SM) given by Pentikäinen (1952) is our benchmark:

The solvency margin, *SM*, is the difference between assets, *A*, and liabilities, *L*:

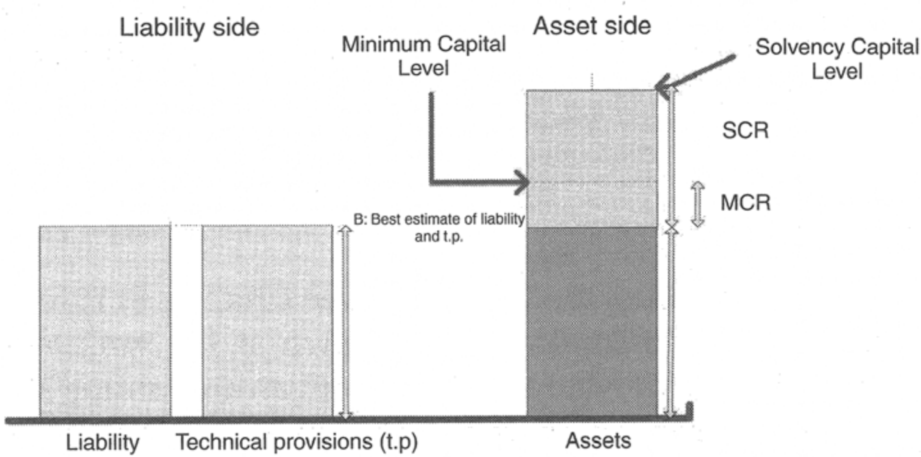
$$SM = A - L.$$

If we put some restrictions on the assets, e.g., that they should be of good quality, we have by this definition what could be called the *available solvency margin* (ASM). Note that in this definition there is no discussion on either the time horizon or the relative size of the buffer.

nach: Sandström (2006), p. 9



nach: Sandström (2006), p. 9



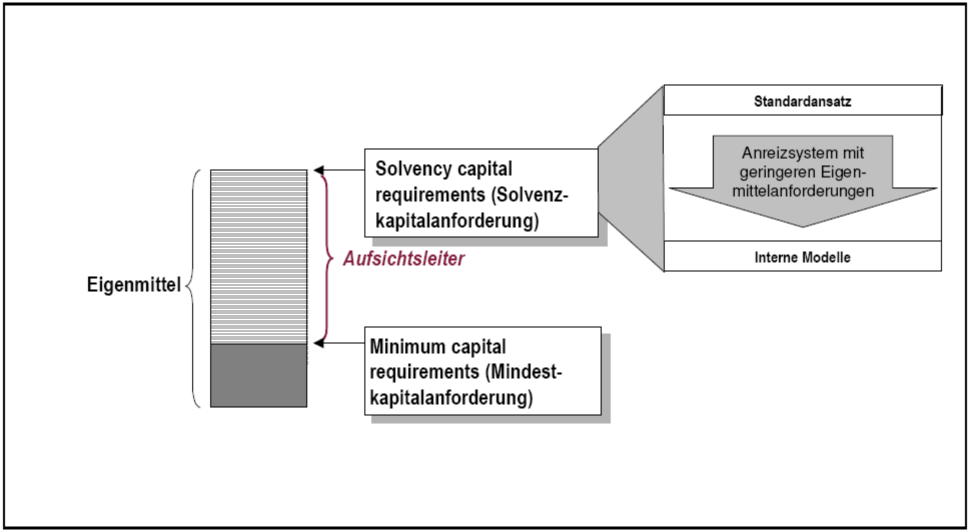
In the second phase of the EU project Solvency II, the commission introduced two distinct levels of solvency: an upper level, called solvency capital Requirement (SCR), an a lower level, the minimum capital requirement (MCR). The two levels are emanating as percentiles from a hypothetical **(skew [!!])** distribution.

nach: Sandström (2006), p. 185 f.

Standardansatz von GDV /BaFin (Dezember 2005):

Der vorliegende Standardansatz ist ein Solvency II-kompatibler Diskussionsbeitrag zur Berechnung der **vorhandenen Solvenzmittel** für Versicherungsunternehmen der Leben-, Schaden- und Krankensparte. Zugleich werden **Prinzipien** für die Berechnung der vorhandenen Solvenzmittel formuliert. Die **vorhandenen Solvenzmittel** werden im Folgenden als **„Available Solvency Margin“** oder kurz **ASM** bezeichnet.

Bei den erforderlichen Solvenzmitteln unterscheidet man zwei Größen: Die aus ökonomischer Sicht für einen geregelten Geschäftsablauf notwendigen Solvenzmittel werden als **„Solvency Capital Requirement“** – kurz **SCR** – bezeichnet und die zur Aufrechterhaltung des Geschäftsbetriebes unbedingt notwendigen Mittel heißen **„Minimum Capital Requirement“**, abgekürzt **MCR**. Mit Hilfe des vorliegenden Standardansatzes kann das SCR berechnet werden. Zudem werden Hinweise zum ASM gegeben. Die Bestimmung des MCR wird nicht betrachtet.


Standardansatz
Anreizsystem mit geringeren Eigen-mittelanforderungen
Interne Modelle
Solvency capital requirements (Solvenz-kapitalanforderung)
Aufsichtsleiter
Eigenmittel
Minimum capital requirements (Mindest-kapitalanforderung)

2. Risikomessung unter Solvency II

Risikomessung unter Solvency II

- **S**olvency **C**apital **R**equirement (SCR) je Risiko wird hier im Sinne von Sandström (2006) verstanden als **Differenz** zwischen einem geeigneten **Risikomaß** und gewissen **Eigenmitteln** (etwa Netto-Prämien = Erwartungswert als Basisgröße), der erforderliche Kapitalbedarf wird entsprechend als SCR-Level bezeichnet.

- Bei normalverteilten Risiken ist das SCR in der Regel ein Vielfaches der Standardabweichung des Risikos, dessen Größe nur vom Risikoniveau abhängt

- Das SCR für das Gesamtrisiko wird als **Wurzel** der Summe von Quadraten der einzelnen SCR's dargestellt (→ Wurzelformel der NAIC / IAA; ***Standardmodell von GDV / BaFin***).

<u>Definition</u> (kohärentes Risikomaß):

Ein *Risikomaß* R auf einer geeigneten Menge $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{Z}$ der reellwertigen Zufallsvariablen (Risiken) heißt *kohärent* im Sinne von ARTZNER, DELBAEN, EBER und HEATH (1999), wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

[1] R ist ***positiv homogen***, d.h.

$$R(cX) = c\,R(X) \text{ für alle } c > 0 \text{ und } X \in \mathfrak{D};$$

[2] R ist ***translationsinvariant***, d.h.

$$R(X+c) = R(X) + c \text{ für alle } X \in \mathfrak{D} \text{ und } c \in \mathbb{R};$$

[3] R ist ***monoton***, d.h.

$$R(X) \le R(Y) \text{ für alle } X, Y \in \mathfrak{D} \text{ mit } X \le Y;$$

[4] R ist ***subadditiv***, d.h.

$$R(X+Y) \le R(X) + R(Y) \text{ für alle } X, Y \in \mathfrak{D}.$$

Die internationale Diskussion über Risikomaße als Basis für die Bestimmung des **Zielkapitals** für Solvency II (IAA, DAV, SST) in Bezug auf das versicherungstechnische Gesamtrisiko S konzentriert sich im Wesentlichen auf

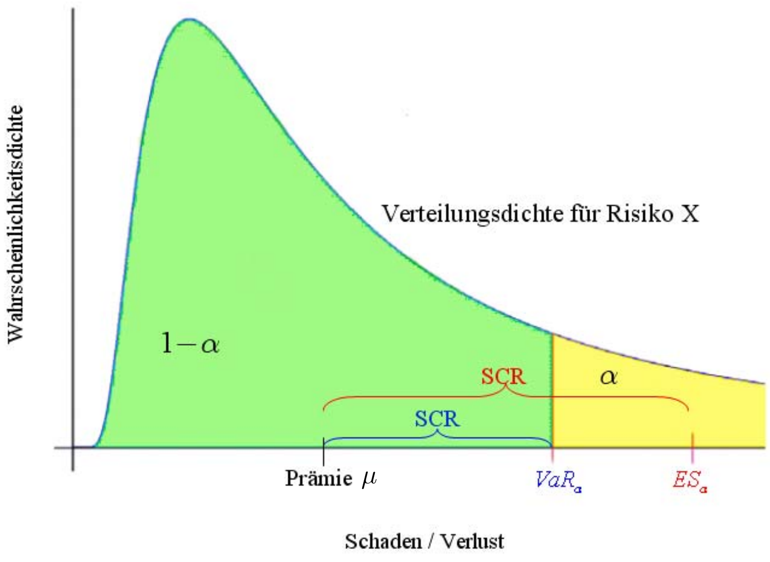
***Value at Risk*:** $VaR_\alpha(S) := q_{1-\alpha}(S) = F_S^{-1}(1-\alpha) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} \middle| F_S(x) \geq 1-\alpha\right\};$

[in der Versicherungstechnik bekannt unter:

***P**robable **M**aximum **L**oss* (PML) zur Wiederkehrperiode $1/\alpha$]

und

***Expected Shortfall*:** $ES_\alpha(S) := E\left(S \middle| S \geq VaR_\alpha(S)\right).$



ES_α : “Mittel” aller Werte oberhalb von VaR_α

Wurzelformel:

$$SCR_{gesamt} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} SCR_i^2 + 2\sum_{i<j}\sum \rho_{ij} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(R\left(X_i\right) - \mu_i\right)^2 + 2\sum_{i<j}\sum \rho_{ij} \left(R\left(X_i\right) - \mu_i\right)\left(R\left(X_j\right) - \mu_j\right)}$$

unter Berücksichtigung von Abhängigkeiten, z.B. paarweisen Korrelationen

$$\rho_{ij} = \frac{E\left(X_i X_j\right) - E\left(X_i\right)E\left(X_j\right)}{\sqrt{Var\left(X_i\right)}\sqrt{Var\left(X_j\right)}}$$

Eine Idee der „Wurzelformel" ist die Darstellung des **V**alue **at** **R**isk (VaR) als Risikomaß zur Berechnung des erforderlichen Risikokapitals für ein Einzelrisiko X_i als

$$VaR_\alpha(i) = \mu_i + k_\alpha \sigma_i, \; k_\alpha \in \mathbb{R},$$

mit Erwartungswert $\mu_i \in \mathbb{R}$ und Standardabweichung $\sigma_i \geq 0$.

Sind die Risiken X_i normalverteilt, gilt

$$k_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha) \quad \text{mit} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\, du,$$

wobei k_α unabhängig von μ_i und σ_i für $i = 1, \ldots, n$ ist.

Ähnlich: Der Expected Shortfall (ES) für normalverteilte Einzelrisiken X_i ist gegeben durch

$$ES_\alpha(i) = \mu_i + \frac{e^{-\frac{(k_\alpha)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\alpha}\sigma_i = \mu_i + \tau_\alpha \sigma_i \text{ mit } k_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha).$$

Kommentar:

- Bei Normalverteilung ist VaR ein kohärentes Risikomaß für $k_\alpha \geq 0 \left(\Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{2} \right)$.
- Bei Normalverteilung ist die gegenseitige Abhängigkeitsstruktur der Risiken vollständig und eindeutig durch die paarweisen Korrelationen bestimmt.

Folgerung:

Bei Normalverteilung ist die Wurzelformel konsistent mit der Definition des SCR, und zwar sowohl für VaR als auch für ES.

Aber:

- Bei Nicht-Normalverteilung ist VaR im Allgemeinen ***kein*** kohärentes Risikomaß.
- Bei Nicht-Normalverteilung ist das der Wurzelformel zu Grunde liegende Prämienprinzip (Standardabweichungsprinzip) ***nicht*** kohärent ($\rightarrow$ Monotonie)
- Bei Nicht-Normalverteilung ist die gegenseitige Abhängigkeitsstruktur der Risiken ***nicht*** eindeutig durch die paarweisen Korrelationen bestimmt.

Beispiel zu Punkt 2: Sei X über $[0,1]$ gleichverteilt. Betrachte $X_1 := X$, $X_2 := \frac{1+X}{2}$.

Dann gilt $X_1 \leq X_2$, aber

$$\mu_1 + 2\sigma_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{12}} = 1{,}07735... > 1{,}03867... = \frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{12}} = \mu_2 + 2\sigma_2$$

„Wie die Portfoliotheoretiker bislang Risiken gemessen haben, wird der Wirklichkeit nicht gerecht. Dem zugrunde liegen viele ***falsche Annahmen*** – darunter die der Gaußschen ***Normalverteilung***. Im Ergebnis werden ***Risiken*** an den Finanzmärkten ***signifikant unterschätzt***."

Honorar-Professor Benoit B. Mandelbrot, Yale University

„Uns ist durchaus bewusst, dass die klassischen Risikomaße keinesfalls die tatsächlichen Gegebenheiten des Marktes widerspiegeln. Langfristig wollen wir uns ***anderer Verteilungsfunktionen*** zur Berechnung des Value-at-Risks bedienen, die hohen Verlustereignissen höhere Wahrscheinlichkeiten zuordnen, um somit das Risiko noch besser steuern zu können."

Richard Peters**,** Vorstand der Versorgungsanstalt des Bundes und der Länder

aus: Deutsche Pensions- und Investment-Nachrichten vom 8.5.2006

3. Hält die Wurzelformel, was sie verspricht? (I)

Wesentlicher Aspekt des Standard-Modells von GDV / BaFin (in Einklang mit der IAA):

> Die Eigenkapitalausstattung des Versicherungsunternehmens muss so beschaffen sein, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Unternehmen innerhalb des nächsten Jahres seinen Verpflichtungen ***nicht*** nachkommen kann, höchstens α beträgt.

Aktuell wird bei VaR als Risikomaß $\alpha = 0.005,$ bei ES $\alpha = 0.01$ vorgegeben.

Das bedeutet: die Berechnung des SCR (insbesondere über die Wurzelformel) muss sich an dieser Forderung messen lassen!

Aber Beobachtung: insbesondere bei rechts-schiefen Verteilungen (vgl. Sandström (2006)) unterschätzt die Wurzelformel den Kapitalbedarf deutlich!

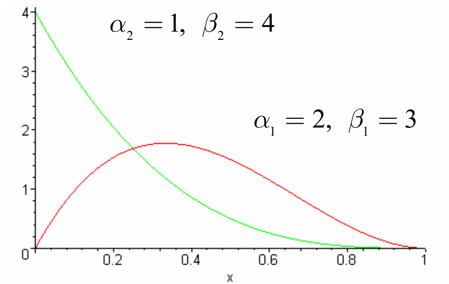
Beispiel 1: Überprüfung der Wurzelformel bei Beta-Verteilungen:

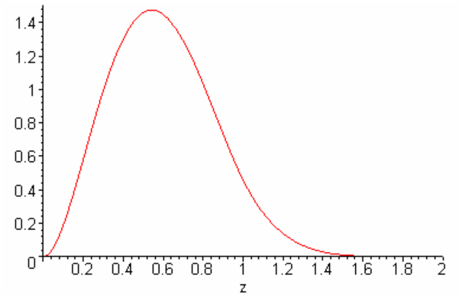
Wir betrachten zwei unabhängige Beta-verteilte Risiken X_1 und X_2 mit den Dichten

$$\boxed{f_i(x) = \frac{x^{\alpha_i - 1}(1-x)^{\beta_i - 1}}{B(\alpha_i, \beta_i)} \quad \text{für } 0 \le x \le 1, \ \ i = 1, 2.}$$

Für ganzzahlige Werte von α_i, β_i kann die Dichte g der Summe $S = X_1 + X_2$ explizit als stückweise definiertes Polynom bestimmt werden; beispielsweise ergibt sich für $\alpha_1 = 2,\ \beta_1 = 3,\ \alpha_2 = 1,\ \beta_2 = 4$:

$$g(z) = \begin{cases} 24z^2 - 56z^3 + 48z^4 - \dfrac{96}{5}z^5 + 4z^6 - \dfrac{12}{35}z^7 & \text{für } 0 \le z \le 1 \\[2ex] \dfrac{256}{35} - \dfrac{192}{5}z^2 + 64z^3 - 48z^4 + \dfrac{96}{5}z^5 - 4z^6 + \dfrac{12}{35}z^7 & \text{für } 1 \le z \le 2. \end{cases}$$





Graphen der Dichten f_1 (rot) und f_2 (grün)

sowie der Summendichte g

Legt man als Risikomaß den $\mathrm{VaR}_{0.005}$ zu Grunde, so ergibt sich für die Einzelrisiken:

$$SCR_i = F_i^{-1}(0.995) - \mu_i = F_i^{-1}(0.995) - \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}, \quad i = 1,2$$

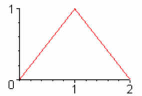
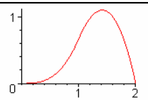
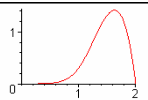
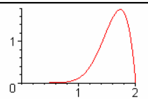
mit den Verteilungsfunktionen $F_i(x) = \int_0^x f_i(u)\, du,\ 0 \le x \le 1.$

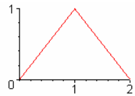
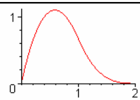
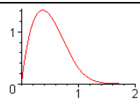
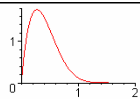
Die Quantile können trotz der polynomialen Form der Dichten bei ganzzahligen Parametern im Allgemeinen nur numerisch berechnet werden.

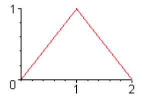
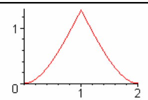
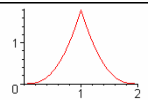
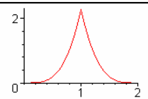
Die folgende Tabelle zeigt die jeweiligen Kapitalbedarfe (SCR-Levels) $K_{0.005}$, zum Einen nach Wurzelformel

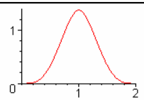
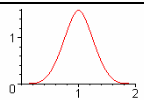
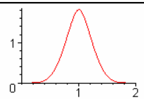
$$K_{0.005}^{\sqrt{}} = \mu_1 + \mu_2 + \sqrt{SCR_1^2 + SCR_2^2}\ ,$$

zum Anderen exakt (als $\mathrm{VaR}_{0.005}$ für das Summenrisiko).

α_1	β_1	α_2	β_2	**Dichte *g* der Summe**	$K^{\sqrt{}}_{0.005}$	**VaR$_{0.005}$**	**Abw. in %**
1	1	1	1		**1.7000**	**1.9000**	**11,76**
2	1	2	1		**1.7036**	**1.9491**	**14,41**
3	1	3	1		**1.7047**	**1.9659**	**15,32**
4	1	4	1		**1.7053**	**1.9743**	**15,77**

α_1	β_1	α_2	β_2	**Dichte g der Summe**	$K_{0.005}^{\sqrt{}}$	**$\mathrm{VaR}_{0.005}$**	**Abw. in %**
1	1	1	1		**1.7000**	**1.9000**	**11,76**
1	2	1	2		**1.6071**	**1.5838**	**-1,45**
1	3	1	3		**1.4653**	**1.3187**	**-10,00**
1	4	1	4		**1.3310**	**1.1230**	**-15,63**

α_1	β_1	α_2	β_2	**Dichte *g* der Summe**	$K^{\sqrt{}}_{0.005}$	**$\mathrm{VaR}_{0.005}$**	**Abw. in %**
1	1	1	1		**1.7000**	**1.9000**	**11,76**
1	2	2	1		**1.6571**	**1.8009**	**8,68**
1	3	3	1		**1.5971**	**1.7056**	**6,79**
1	4	4	1		**1.5510**	**1.6240**	**4,71**

α_1	β_1	α_2	β_2	**Dichte *g* der Summe**	$K^{\sqrt{}}_{0.005}$	**VaR$_{0.005}$**	**Abw. in %**
1	1	1	1		**1.7000**	**1.9000**	**11,76**
2	3	3	2		**1.6106**	**1.6852**	**4,63**
2	4	4	2		**1.5717**	**1.6276**	**3,56**
2	5	5	2		**1.5405**	**1.5760**	**2,30**

4. Copulas

Aus der **Modellbeschreibung** des GDV:

Wichtiges Ziel bei einer umfassenden Risikobetrachtung ist die Berücksichtigung von ***Korrelationseffekten*** zwischen verschiedenen Teilrisiken. Eine Bezugnahme auf die Gesamtrisikosituation des Versicherungsunternehmens ohne eine solche Betrachtung entspricht nicht dessen tatsächlicher Risikosituation.

Anmerkung: ***Korrelationseffekte*** alleine reichen leider auch nicht aus, die Gesamtrisikosituation des Versicherungsunternehmens angemessen abzubilden!

Definition (vereinfacht):

Eine Funktion $\mathbf{C}$ auf dem Einheitswürfel $I^n := [0,1]^n$ heißt ***Copula***, wenn sie Verteilungsfunktion eines n-dimensionalen Zufallsvektors mit uniformen Randverteilungen ist.

Sklar's Theorem:

Es sei H eine n-dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen $F_1, F_2, \dots, F_n$. Dann existiert eine Copula $\mathbf{C}$, so dass für alle $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}}^n$ gilt:

$$H(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{C}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

$\mathbf{C}$ ist eindeutig bestimmt auf $\mathrm{Ran}(F_1) \times \mathrm{Ran}(F_2) \times \dots \times Ran(F_n)$. Insbesondere ist die Copula $\mathbf{C}$ nur dann eindeutig, wenn alle Randverteilungsfunktionen F_i, $i = 1, \dots, n$, stetig sind. In diesem Fall gilt, wenn $F_1^{-1}, F_2^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ die (Pseudo-)Inversen der Randverteilungsfunktionen bezeichnen, die Darstellung

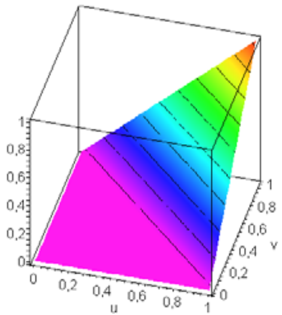
$$\mathbf{C}(u_1, \dots, u_n) = H\left(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)\right) \text{ für alle } \mathbf{u} \in [0,1]^n.$$

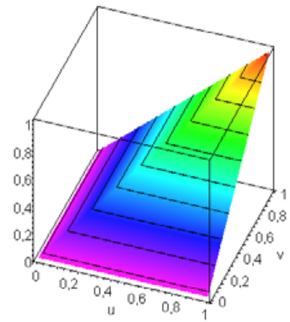
Fréchet-Hoeffding-Schranken:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i + 1 - n, 0\right\} =: \mathcal{W}^n(\mathbf{u}) \le \mathbf{C}(u_1,\ldots,u_n) \le \mathcal{M}^n(\mathbf{u}) := \min\{u_1,\ldots,u_n\},$$

$\uparrow$ keine Copula für $n > 2$

$\uparrow$ stets Copula





<u>Definition</u> (Komonotonie):

Die Zufallsvariablen (Risiken) $X, Y \in \mathcal{Z}$ heißen **komonoton**, wenn sie als Copula die obere Fréchet-Hoeffding Schranke haben:

$$\mathcal{M}^2(u_1, u_2) = \min\{u_1, u_2\} \text{ für alle } u_1, u_2 \in I^2.$$

<u>Definition</u> (Kontramonotonie):

Die Zufallsvariablen (Risiken) $X, Y \in \mathcal{Z}$ heißen **kontramonoton**, wenn sie als Copula die untere Fréchet-Hoeffding Schranke haben:

$$\mathcal{W}^2(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} \text{ für alle } u_1, u_2 \in I^2.$$

Ein weit verbreiteter Trugschluss ist, dass sich bei komonotonen Risiken das totale Risiko erhöht und bei kontramonotonen Risiken das totale Risiko vermindert ($\rightarrow$ Diversifikationseffekt). ***Dies ist im Allgemeinen falsch!***

Beispiel (Risiko-Verteilung mit *Heavy Tail*)**:**

Gegeben seien zwei Pareto-verteilte Risiken X_1 und X_2 mit Dichte

$$f(x) = \lambda(1+x)^{-(1+\lambda)}, \ \ x \geq 0 \ \ (\lambda > 0).$$

In Einzelfällen ist es möglich. die Dichte g und die dazugehörige Verteilungsfunktion G für $S_2 := X_1 + X_2$ explizit zu berechnen:

$\underline{\lambda = 1/2}$:

Fall 1: zwei *komonotone* Risiken X, Y vom selben Typ:

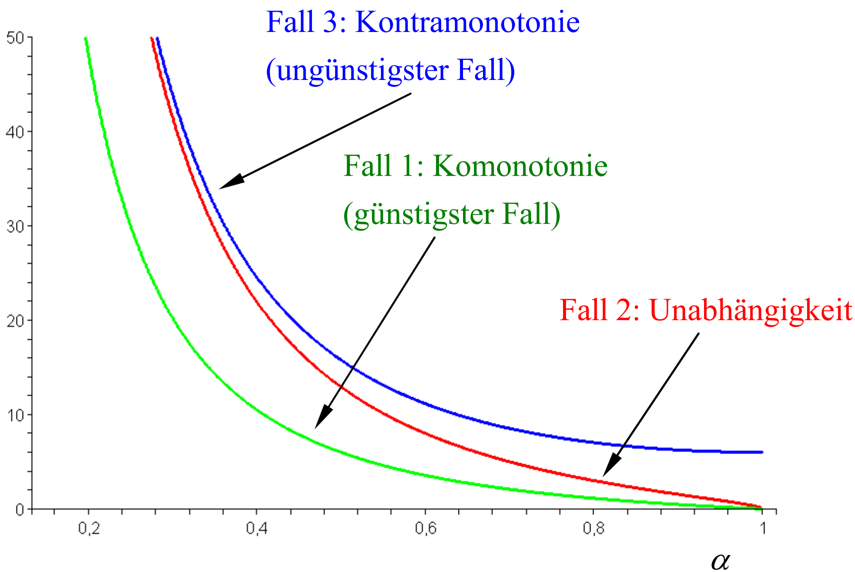
$$g_{S_2}(z) = \frac{1}{4\left(\sqrt{1+z/2}\right)^3} \approx \frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+z}\right)^3}, \quad z \geq 0;$$

Fall 2: zwei *unabhängige* Risiken X, Y vom selben Typ:

$$g_{S_2}(z) = \frac{z}{(2+z)^2\sqrt{1+z}} \approx \frac{1}{\left(\sqrt{1+z}\right)^3}, \quad z \geq 0;$$

Fall 3: zwei *kontamonotone* Risiken X, Y vom selben Typ:

$$g_{S_2}(z) = \frac{4+z-2\sqrt{3+z}}{\sqrt{z+6-4\sqrt{3+z}}\;\sqrt{3+z}\cdot\left(\sqrt{2+z}\right)^3} \approx \frac{1}{\left(\sqrt{1+z}\right)^3}, \quad z \geq 6.$$



Value at Risk für die drei Fälle

Berechnung des Value at Risk für $S_2 := X_1 + X_2$ und $0 < \alpha < 1$:

Fall 1: zwei *komonotone* Risiken X, Y vom selben Typ:

$$VaR_\alpha(S_2) = \frac{2}{\alpha^2} - 2;$$

Fall 2: zwei *unabhängige* Risiken X, Y vom selben Typ:

$$VaR_\alpha(S_2) = \frac{4}{\alpha^2} - 2 - \frac{2}{1+\sqrt{1-\alpha^2}} \sim \frac{4}{\alpha^2} - 4 \ \ (\alpha \to 0);$$

Fall 3: zwei *kontramonotone* Risiken X, Y vom selben Typ:

$$VaR_\alpha(S_2) = \frac{4}{\alpha^2} - 2 + \frac{4}{(2-\alpha)^2} \sim \frac{4}{\alpha^2} + 2 \ \ (\alpha \to 0).$$

Konsequenz:

1. Risikomaß für **ein** Portfolio aus **zwei** *unabhängigen* oder *komonotonen* Risiken vom selben Typ ist *strikt größer* als die Summe der Risikomaße für **zwei** Portfolios mit je **einem** Risiko!

→ Kein Diversifikations-Effekt!

2. Risikomaß für **ein** Portfolio aus **zwei** *unabhängigen* Risiken vom selben Typ ist *asymptotisch äquivalent* (für große Wiederkehrperioden) zum Risikomaß für **ein** Portfolio aus **zwei** *kontramonotonen* Risiken vom selben Typ!

→ Unabhängigkeit ist nahe dem „Worst Case"!

$\underline{\lambda = 2}$:

Fall 1: zwei *komonotone* Risiken X, Y vom selben Typ:

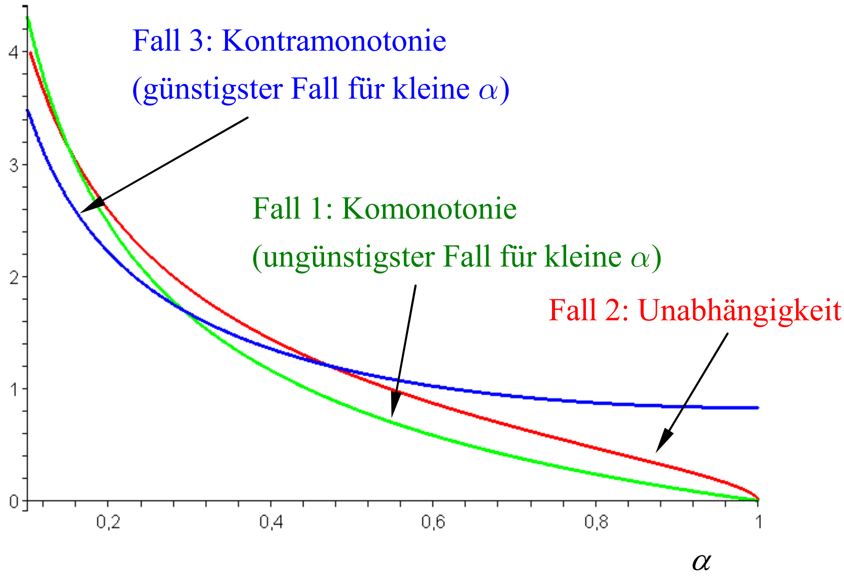
$$g_{S_2}(z) = \frac{8}{(2+z)^3} \approx \frac{8}{(1+z)^3}, \quad z \geq 0;$$

Fall 2: zwei *unabhängige* Risiken X, Y vom selben Typ:

$$g_{S_2}(z) = \frac{48 \ln(1+z)}{(2+z)^5} + \frac{4z(10+10z+z^2)}{(2+z)^4 (1+z)^2} \approx \frac{4}{(1+z)^3}, \quad z \geq 0;$$

Fall 3: zwei *kontramonotone* Risiken X, Y vom selben Typ:

$$g_{S_2}(z) = \frac{4(2+z)}{\sqrt{z^2+4z+2-2\sqrt{z^2+4z+5}} \cdot \left(\sqrt{z^2+4z+5}-1\right)^2 \sqrt{z^2+4z+5}} \approx \frac{4}{(1+z)^3}, \quad z \geq 2.$$



Value at Risk für die drei Fälle

Berechnung des Value at Risk für $S_2 := X_1 + X_2$ und $0 < \alpha < 1$:

Fall 1: zwei *komonotone* Risiken X, Y vom selben Typ:

$$VaR_\alpha(S_2) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} - 2;$$

Fall 3: zwei *kontramonotone* Risiken X, Y vom selben Typ:

$$VaR_\alpha(S_2) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-(1-\alpha)^2}}{2-\alpha}} - 2 \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} - 2 \ (\alpha \to 0).$$

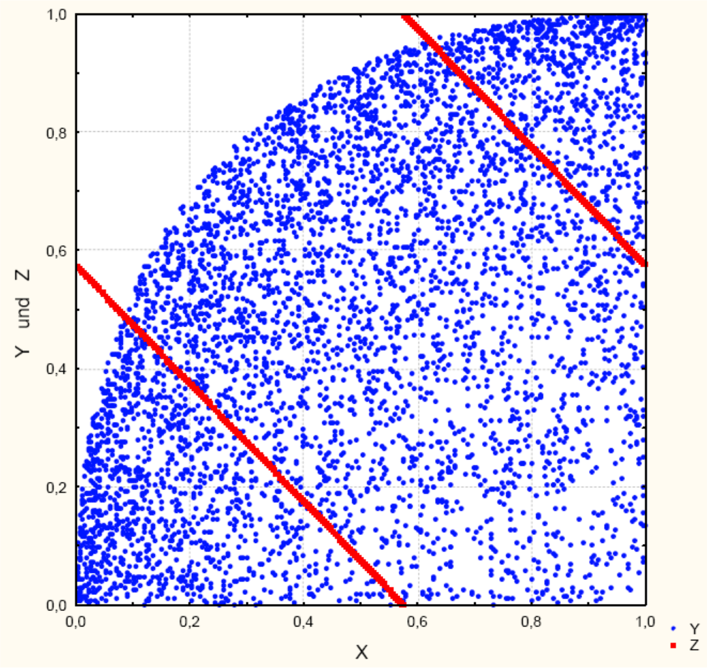
Abhängigkeit vs. Korrelation:

Beispiel:

Zufallsvariablen X, Y und Z mit identischen (uniformen) Randverteilungen und gleichen Korrelationen

$$\rho^L(X,Y) = \rho^L(X,Z) = 7/15$$

aber verschiedener gemeinsamer Verteilungsstruktur



Definition (Gittercopula):

Für $d, n \in \mathbb{N}$ definiere Intervalle $I_{i_1,\ldots,i_d}(n) := \bigtimes_{j=1}^{d} \left(\frac{i_j - 1}{n}, \frac{i_j}{n} \right]$ für alle möglichen Fälle $i_1, \ldots, i_d \in N_n{}^d := \{1, \ldots, n\}$. Für jedes Tupel $(i_1, \ldots, i_d) \in N_n{}^d$, sei $a_{i_1,\ldots,i_d}(n)$ eine nicht-negative reelle Zahl mit der Eigenschaft

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_d) \in J(i_k)} a_{i_1,\ldots,i_d}(n) = \frac{1}{n} \;\; \forall \;\; k \in \{1, \ldots, d\} \text{ und } i_k \in \{1, \ldots, n\},$$

mit $J(i_k) := \{(j_1, \ldots, j_n) \in N_n{}^d \mid j_k = i_k\}$. Dann ist

$$c_n := n^d \sum_{(i_1,\ldots,i_d) \in N_n{}^d} a_{i_1,\ldots,i_d}(n) \mathbb{1}_{I_{i_1,\ldots,i_d}(n)}$$

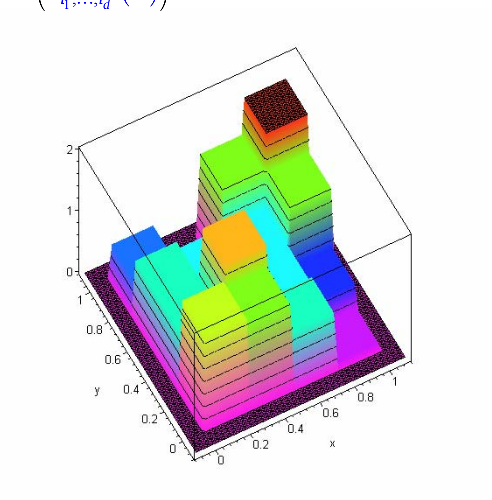
die Dichte einer d-dimensionalen Copula, die so genannte ***Gittercopula***, mit Parametern $\{a_{i_1,\ldots,i_d}(n) | (i_1, \ldots, i_d) \in N_n{}^d\}$.

Interpretation: Ein Zufallsvektor $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_d)$ besitzt eine ***Gittercopula*** als gemeinsame Verteilung genau dann, wenn

$$P^{\mathbf{X}}\left(\bullet \mid \mathbf{X}\in I_{i_1,\ldots,i_d}(n)\right)=\mathcal{R}\left(I_{i_1,\ldots,i_d}(n)\right)$$

gilt (stetige Gleichverteilung über $I_{i_1,\ldots,i_d}(n)$) mit

$$P\left(\mathbf{X}\in I_{i_1,\ldots,i_d}(n)\right)=a_{i_1,\ldots,i_d}(n).$$



Satz: $(X_1,\ldots,X_d)$ sei ein Zufallsvektor, dessen gemeinsame Verteilungsfunktion gegeben sei durch eine Gittercopula mit Dichte $c_n := n^d \sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in N_n{}^d} a_{i_1,\ldots,i_d}(n)\, \mathbb{1}_{I_{i_1,\ldots,i_d}(n)}$. Dann ist die Dichte $\tilde{f}_d(n;\bullet)$ und die zugehörige Verteilungsfunktion $\tilde{F}_d(n;\bullet)$ für die Summe $S_d := \sum_{i=1}^{d} X_i$ gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \tilde{f}_d(n;x) &= n \sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in N_n{}^d} a_{i_1,\ldots,i_d}(n)\cdot f_d\left(nx+d-\sum_{j=1}^{d} i_j\right) \\ \tilde{F}_d(n;x) &= \sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in N_n{}^d} a_{i_1,\ldots,i_d}(n)\cdot F_d\left(nx+d-\sum_{j=1}^{d} i_j\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{für } x\in\mathbb{R},$$

mit

$$\left.\begin{aligned} f_d(x) &= \frac{1}{2(d-1)!}\sum_{k=0}^{d}(-1)^k\binom{d}{k}(x-k)^{d-1}\operatorname{sgn}(x-k)\ \mathbb{1}_{[0,d]}(x) \\ F_d(x) &= \frac{1}{2d!}\sum_{k=0}^{d}(-1)^k\binom{d}{k}\left((-k)^d+(x-k)^d\operatorname{sgn}(x-k)\right)\mathbb{1}_{[0,d]}(x)+\mathbb{1}_{(d,\infty]}(x), \end{aligned}\right\} \quad x\in\mathbb{R},$$

$$\text{wobei } sgn(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

5. Hält die Wurzelformel, was sie verspricht? (II)

Frage: Wie reagiert das SCR auf ***unkorrelierte***, aber ***stochastisch abhängige*** Risiken?

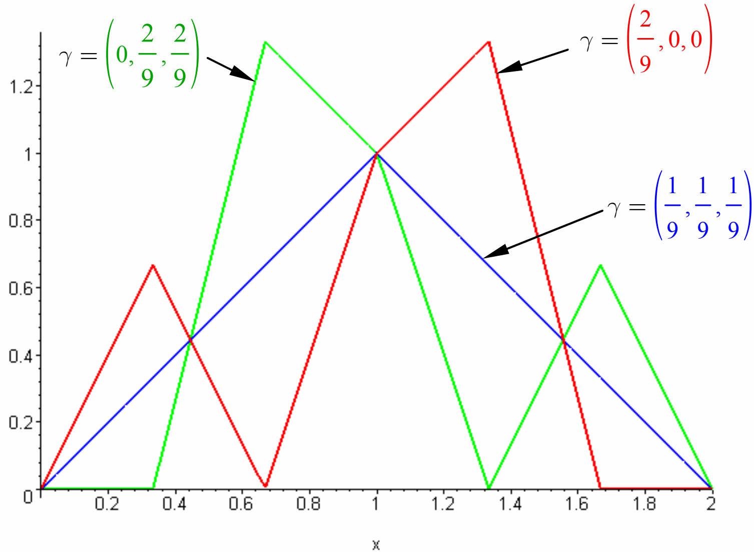
Beispiel: Gegeben sei eine Gitter-Copula mit 9 Unterquadraten, d.h. $d = 2$ und $n = 3$. Die Gewichte für die Copula-Dichte seien in Matrixform gegeben:

$$A(3) = [a_{ij}(3)] = \begin{bmatrix} a & b & 1/3 - a - b \\ c & 1 - 4a - 2b - 2c & -2/3 + 4a + 2b + c \\ 1/3 - a - c & -2/3 + 4a + b + 2c & 2/3 - 3a - b - c \end{bmatrix},$$

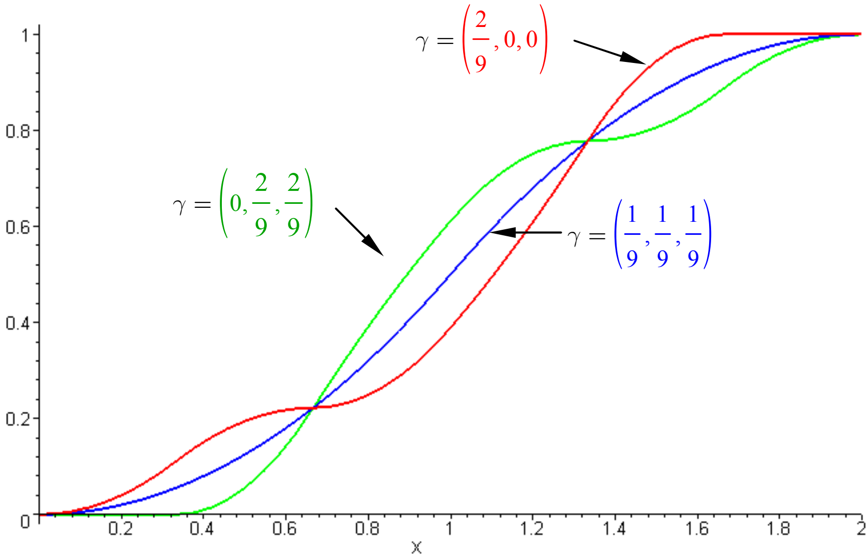
mit geeigneten reellen Zahlen $a, b, c \in [0, 1/3]$. Die Kovarianz der entsprechenden Zufallsvariablen X_1 und X_2 ist dann gegeben durch

$$E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = \left\{ \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij}(3) \left(i - \frac{1}{2} \right) \left(j - \frac{1}{2} \right) \right\} - \frac{1}{4} = 0,$$

d.h. die Risiken X_1 und X_2 sind ***unkorreliert, aber abhängig***.



Dichte $\tilde{f}_2\left(3;\gamma;\bullet\right)$ für verschiedene $\gamma = (a,b,c)$



Verteilungsfunktion $\tilde{F}_2(3;\gamma;\bullet)$ für verschiedene $\gamma = (a,b,c)$

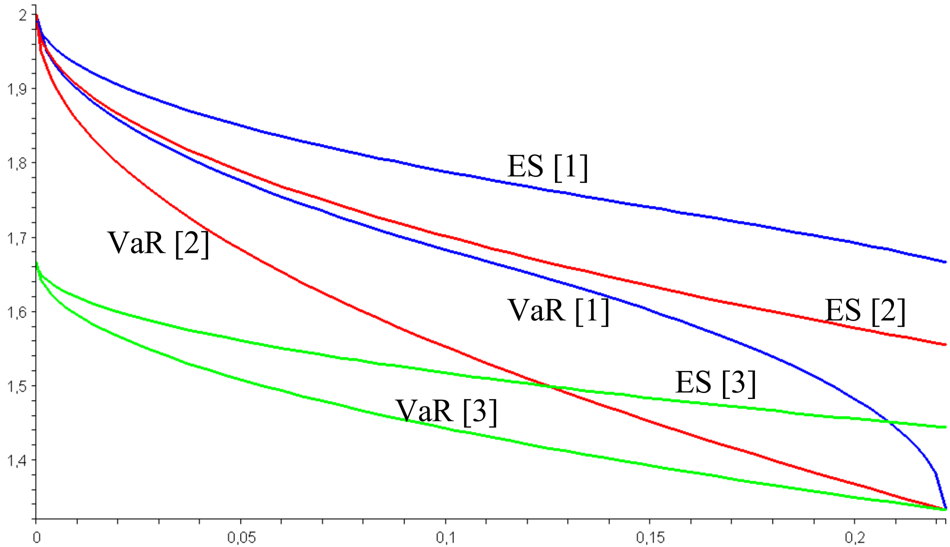
VaR-Szenarien für unkorrelierte, (un)abhängige Risiken

$$Q(3;\gamma;1-\alpha)=\begin{cases}\begin{cases}2-\sqrt{\alpha}, & 0\le\alpha\le\frac{1}{9},\\ \frac{4}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2-9\alpha}, & \frac{1}{9}\le\alpha\le\frac{2}{9},\end{cases} & \gamma=\left(0,\frac{2}{9},\frac{2}{9}\right) \quad \text{positiv abhängig } [1]\\ 2-\sqrt{2\alpha}, \quad 0\le\alpha\le\frac{2}{9}, & \gamma=\left(\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9}\right) \quad \text{unabhängig } [2]\\ \frac{5}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}, \quad 0\le\alpha\le\frac{2}{9}, & \gamma=\left(\frac{2}{9},0,0\right) \quad \text{negativ abhängig } [3]\end{cases}$$

Für den Expected Shortfall erhält man entsprechend

$$\mathrm{ES}(3;\gamma;\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} Q(3;\gamma;1-v)\,dv$$

$$=\begin{cases}\begin{cases}2\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{\alpha}\right), & 0\le\alpha\le\frac{1}{9},\\ \dfrac{\frac{2+36\alpha}{27}-\frac{2}{81}\sqrt{2-9\alpha}^{3}}{2-9\alpha}, & \frac{1}{9}\le\alpha\le\frac{2}{9},\end{cases} & \gamma=\left(0,\frac{2}{9},\frac{2}{9}\right) \quad \text{positiv abhängig } [1]\\ 2-\frac{1}{3}\sqrt{2\alpha}, \qquad 0\le\alpha\le\frac{2}{9}, & \gamma=\left(\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9}\right) \quad \text{unabhängig } [2]\\ \frac{5}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{2\alpha}, \qquad 0\le\alpha\le\frac{2}{9}, & \gamma=\left(\frac{2}{9},0,0\right) \quad \text{negativ abhängig } [3]\end{cases}$$



VaR und ES für den Fall
der pos. Abhängigkeit [1], der Unabhängigkeit [2] und der neg. Abhängigkeit [3]

Beispielsweise erhält man in den drei Fällen folgende Werte für die Risikomaße

	pos. abhängig	unabhängig	neg. abhängig	Wurzelformel
$VaR_{0.1}$	**1.6838**	**1.5528**	**1.4430**	**1.5657**
$ES_{0.1}$	**1.7892**	**1.7019**	**1.5269**	**1.6364**
$VaR_{0.01}$	**1.9000**	**1.8586**	**1.5960**	**1.6930**
$ES_{0.01}$	**1.9333**	**1.9057**	**1.6225**	**1.7000**
$VaR_{0.005}$	**1.9293**	**1.9000**	**1.6167**	**1.7000**
$ES_{0.005}$	**1.9411**	**1.9167**	**1.6260**	**1.7036**

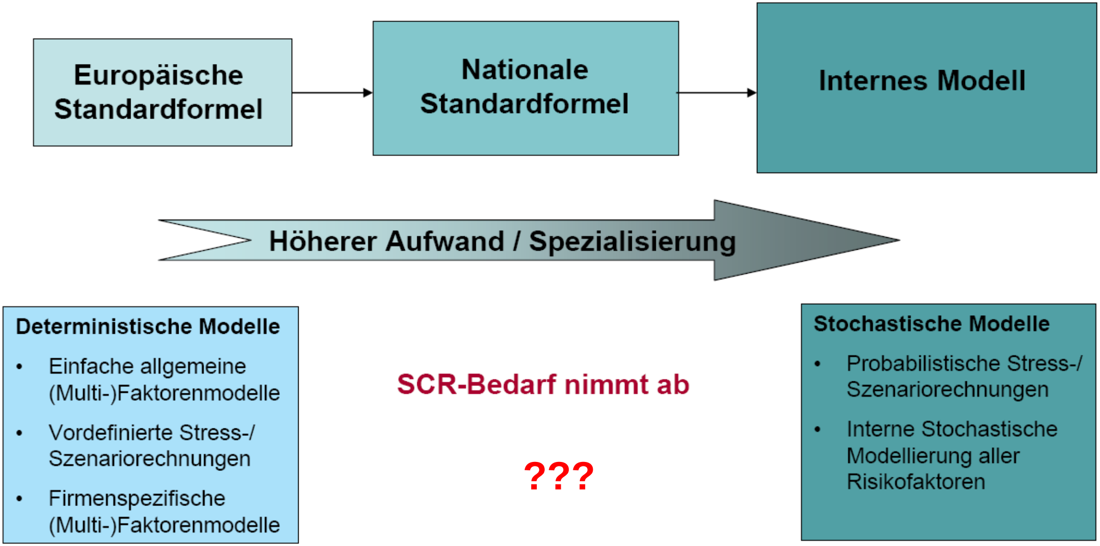
Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES)
mit $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.01$, und $\alpha = 0.005$

Abweichungen in % (bezogen auf Wurzelformel):

	pos. abhängig	unabhängig	neg. abhängig	Wurzelformel
$VaR_{0.1}$	**7.54**	**–0.82**	**–7.84**	**1.5657**
$ES_{0.1}$	**9.34**	**4.00**	**–6.69**	**1.6364**
$VaR_{0.01}$	**12.23**	**9.78**	**–5.73**	**1.6930**
$ES_{0.01}$	**13.72**	**12.10**	**–4.56**	**1.7000**
$VaR_{0.005}$	**13.49**	**11.76**	**–4.90**	**1.7000**
$ES_{0.005}$	**13.94**	**12.51**	**–4.56**	**1.7036**

Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES)
mit $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.01$, und $\alpha = 0.005$

6. Implikationen für Solvency II


Europäische Standardformel
Nationale Standardformel
Internes Modell
Höherer Aufwand / Spezialisierung
Deterministische Modelle
• Einfache allgemeine (Multi-)Faktorenmodelle
• Vordefinierte Stress-/ Szenariorechnungen
• Firmenspezifische (Multi-)Faktorenmodelle
SCR-Bedarf nimmt ab
???
Stochastische Modelle
• Probabilistische Stress-/ Szenariorechnungen
• Interne Stochastische Modellierung aller Risikofaktoren

- Eine einfache ***„Standardformel“*** (→ Wurzelformel), die allen wesentlichen Ansprüchen gerecht wird (Abbildung des Gesamtrisikos des Unternehmens, Berücksichtigung von Diversifikationseffekten, korrekte Berücksichtigung von gegenseitigen Abhängigkeiten, Einhaltung des Sicherheitsniveaus, tendenziell höhere Eigenmittelanforderungen als mit internem Modell)

gibt es nicht.

Besser wäre ein ***„Standardmodell“*** wie beim SST mit Fokussierung auf die Modellierung des Gesamtrisikos.

- Wenn man an der ***Wurzelfomel*** festhalten will, müssen aus Gründen der „Gerechtigkeit“ Korrekturen in Form von ***Zuschlagsfaktoren*** angebracht werden, sonst werden ggf. Unternehmen, die einen großen finanziellen und personellen Aufwand für interne Modelle betreiben, mit höheren Eigenmittelanforderungen bestraft.

Solche Korrekturvorschläge, die auf der Schiefe γ der Gesamtrisikoverteilung beruhen (→ Cornish-Fisher-Entwicklung), sind z.B. in Sandström (2006), Kapitel 9.3. zu finden:

Für VaR / Standardabweichungsprinzip:

$$SCR_{gesamt} = \delta_\alpha \sigma_{gesamt} \text{ mit } \delta_\alpha = k_\alpha + \frac{\gamma}{6}\left(k_\alpha^2 - 1\right).$$

Ggf. könnten die Korrekturfaktoren auch pragmatisch durch Vergleiche von SCR-Berechnungen mit Wurzelformel und internem Modell bei größeren Unternehmen ermittelt werden.

- Eine Berücksichtigung von ***Abhängigkeiten*** ausschließlich über die ***Korrelation*** ist unbefriedigend und verfälscht die SCR-Berechung ggf. merklich. Auch hier sollten geeignete Korrekturen (in Form passender Faktoren?) angebracht werden.

7. Literatur

A. Sandström (2006): *Solvency. Models, Assessment and Regulation*. Chapman & Hall, Boca Raton.

D. Straßburger (2006): *Risk Management and Solvency - Mathematical Methods in Theory and Practice*. Dissertation, Universität Oldenburg.