

Korrelation und Diversifikation - unvereinbare Konzepte unter Solvency II?

Dietmar Pfeifer

Universität Oldenburg

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Agenda

1. Ein paar einleitende Zitate
2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße
3. Ein kurzer Rückblick auf Copulas
4. Korrelation und Diversifikation (oder auch nicht)
5. Zusammenfassung
6. Literatur

1. Ein paar einleitende Zitate

“Although it is an old idea, the measurement and allocation of **diversification** in portfolios of asset and / or liability risks is a difficult problem, which has so far found many answers. The **diversification effect** of a portfolio of risks is the difference between the sum of the risk measures of stand-alone risks in the portfolio and the risk measure of all risks in the portfolio taken together, which is typically non-negative, at least for **positive dependent** risks.”

[Hürlimann (2009), p. 325]

1. Ein paar einleitende Zitate

“**Diversification** arises when different activities complement each other, in the field of both return and risk. [...] The **diversification effect** is calculated by using **correlation factors**. Correlations are statistical measures assessing the extend to which events could occur simultaneously. [...] A correlation factor of 1 implies that certain events will always occur simultaneously. Hence, there is no diversification effect and two risks identically add up. Risk managers tend to say that such risks are perfectly correlated (i.e., they have a high correlation factor), meaning that these two risks do not actually diversify at all. **A correlation factor of 0 implies that diversification effects are present and a certain diversification benefit holds.**”

[Doff (2007), p. 167f.]

1. Ein paar einleitende Zitate

“By **diversifiable** we mean that if a risk category can be subdivided into risk classes and the risk charge of the total risk is not higher than the sum of the risk charges of each subrisk, then we have the **effect of diversification**. [...] This effect can be measured as the difference between the sum of several capital charges and the total capital charge when **dependency** between them is taken into account.”

[Sandström (2006), p. 188]

1. Ein paar einleitende Zitate

“ ‘Diversification effects’ means the reduction in the risk exposure of insurance and reinsurance undertakings and groups related to the diversification of their business, resulting from the fact that the adverse outcome from one risk can be offset by a more favourable outcome from another risk, where those risks are not fully correlated. The Basic Solvency Capital Requirement shall comprise individual risk modules, which are aggregated [...] The correlation coefficients for the aggregation of the risk modules [...], shall result in an overall Solvency Capital Requirement [...] Where appropriate, diversification effects shall be taken into account in the design of each risk module.”

[Directive 2009/138/EC, (64) p. 7; (37) p. 24; Article 104, p. 52]

1. Ein paar einleitende Zitate

Die gerade zitierten Textstellen legen den Schluss nahe, dass sich ein **Diversifikationseffekt** prinzipiell dann einstellt, wenn die betrachteten Risiken nicht „**vollständig korreliert**“ sind.

Aber stimmt das wirklich?

2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Sei $\mathfrak{X}$ eine geeignete Menge nicht-negativer Zufallsvariablen X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ein Risikomaß R auf $\mathfrak{X}$ ist eine Abbildung $\mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$P^X = P^Y \Rightarrow R(X) = R(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X} \quad [\text{Verteilungsinvarianz}]$$

$$R(cX) = c R(X) \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{X} \text{ und } c \geq 0 \quad [\text{Skaleninvarianz}]$$

$$R(X + c) = R(X) + c \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{X} \text{ und } c \geq 0 \quad [\text{Translationsinvarianz}]$$

$$R(X) \leq R(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X} \text{ mit } X \leq Y \quad [\text{Monotonie}]$$

2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Das Risikomaß heißt *kohärent*, wenn es zusätzlich folgende Eigenschaft besitzt:

$$R(X + Y) \leq R(X) + R(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X} \quad \text{[Subadditivität]}$$

Diese letzte Eigenschaft ist der kritische Punkt: sie induziert nämlich den gewünschten **Diversifikationseffekt** für *beliebige* nicht-negative Risiken $X_1, \dots, X_n$ (abhängig oder nicht), da mittels vollständiger Induktion sofort folgt:

$$R\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \leq \sum_{k=1}^n R(X_k) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Im Folgenden verwenden wir den Ausdruck “(Risiko-)Konzentrations-effekt” im Gegensatz zu “*Diversifikationseffekt*”, charakterisiert durch die umgekehrte Ungleichung

$$R(X + Y) > R(X) + R(Y) \quad \text{für gewisse } X, Y \in \mathfrak{X}.$$

Das in der Versicherungsmathematik populäre *Standardabweichungsprinzip SAP* ist gegeben durch

$$SAP(X) = E(X) + \gamma \sqrt{\text{Var}(X)} \quad \text{für ein festes } \gamma > 0 \text{ und } X \in \mathfrak{X} = \mathfrak{L}_+^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

(die nicht-negativen quadrat-integrierbaren Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$).

SAP ist jedoch kein Risikomaß, da es *nicht monoton* ist.

2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Das **SAP** ist aber subadditiv wegen

$$\begin{aligned} SAP(X + Y) &= E(X) + E(Y) + \gamma \sqrt{Var(X) + Var(Y) + 2\rho(X, Y)\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} \\ &\leq E(X) + E(Y) + \gamma \sqrt{Var(X) + Var(Y) + 2\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} \\ &= E(X) + E(Y) + \gamma \sqrt{(\sqrt{Var(X)} + \sqrt{Var(Y)})^2} = SAP(X) + SAP(Y) \end{aligned}$$

mit der Korrelation

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}.$$

2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Das in Basel II/III und Solvency II verwendete Risikomaß ist der Value-at-Risk **VaR**, definiert als ein (typischerweise hohes) Quantil der Riskoverteilung:

$$\text{VaR}_\alpha(X) := Q_X(1 - \alpha) \quad \text{für } X \in \mathfrak{X} \text{ und } 0 < \alpha < 1,$$

wobei Q_X die Quantilfunktion bezeichnet:

$$Q_X(u) := \inf \{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq u\} \quad \text{für } 0 < u < 1.$$

VaR ist ein "echtes" Risikomaß, aber im Allgemeinen *nicht kohärent*.

2. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Das "kleinste" kohärente Risikomaß oberhalb von **VaR** ist der Expected Shortfall **ES**, der für stetig verteilte Risiken X gegeben ist durch

$$ES_{\alpha}(X) = E(X | X \geq \text{VaR}_{\alpha}(X)) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \text{VaR}_u(X) du \quad \text{für } 0 < \alpha < 1$$

(Integralmittel aller **VaR** _{α} über $0 < \alpha < 1$.)

Nachteil: der **ES** _{α} ist *immer* subadditiv, unabhängig von der Korrelationsstruktur der Risiken!

3. Ein kurzer Rückblick auf Copulas

Eine Copula kann vereinfachend als eine multivariate Verteilungsfunktion mit univariaten Randverteilungsfunktionen angesehen werden, die zu einer *stetigen Gleichverteilung* über dem Einheitsintervall $[0,1]$ gehören.

Jede Copula ist beschränkt durch die so-genannten Fréchet-Hoeffding-Schranken, d.h.

$$C_*(\mathbf{u}) := \max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq C^*(\mathbf{u}) := \min(u_1, \dots, u_n).$$

Die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke C^* ist selbst eine Copula in *jeder* Dimension n ; die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke C_* dagegen nur in der Dimension $n = 2$.

3. Ein kurzer Rückblick auf Copulas

Ist X eine beliebige reelle Zufallsvariable, so besitzt

- der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X, X, \dots, X)$ mit n Komponenten die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke C^* als Copula und
- der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X, -X)$ mit zwei Komponenten die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke C_* als Copula.

Zufallsvariablen, die C^* bzw. C_* als Copula besitzen, heißen *komonoton* bzw. *kontramonoton*. Sie sind dann *maximal* bzw. *minimal* korreliert.

3. Ein kurzer Rückblick auf Copulas

Sklar's Theorem: Es bezeichne H eine n -dimensionale Verteilungsfunktion mit den Randverteilungsfunktionen $F_1, \dots, F_n$. Dann existiert eine Copula C , so dass für alle reellen $(x_1, \dots, x_n)$ gilt:

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Die Copula ist eindeutig bestimmt, wenn alle Randverteilungsfunktionen *stetig* sind. Die Umkehrung ist auch richtig: bezeichnen $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ die Pseudo-Inversen der Randverteilungsfunktionen (Quantilfunktionen), dann gilt für alle $(u_1, \dots, u_n)$ im Einheitswürfel:

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)).$$

4. Korrelation und Diversifikation (oder auch nicht)

Beispiel 1. Die gemeinsame Verteilung der nicht-negativen Risiken X und Y sei durch die folgende Kontingenztafel gegeben (mit $\alpha = 0.005$):

$P(X = x, Y = y)$		x			$P(Y = y)$	$P(Y \leq y)$
		0	50	100		
y	0	β	$0.440 - \beta$	0.000	0.440	0.440
	40	$0.554 - \beta$	β	0.001	0.555	0.995
	50	0.000	0.001	0.004	0.005	1.000
$P(X = x)$		0.554	0.441	0.005		
$P(X \leq x)$		0.554	0.995	1.000		

mit $0 \leq \beta \leq 0.440$, d.h. $\text{VaR}_\alpha(X) = 50$, $\text{VaR}_\alpha(Y) = 40$.

4. Korrelation und Diversifikation (oder auch nicht)

Für die Momente von X und Y erhält man daraus (σ = Standardabweichung):

$E(X)$	$E(Y)$	$\sigma(X)$	$\sigma(Y)$	$\rho(\beta) = \rho(X, Y)$
22.550	22.450	25.377	19.912	$-0.9494 + 3.9579\beta$

Dies zeigt, dass der Bereich aller möglichen Risiko-Korrelationen gegeben ist durch das Intervall $[-0.9494; 0.7921]$, mit einer Korrelation von Null für die Wahl $\beta = 0.2399$.

4. Korrelation und Diversifikation (oder auch nicht)

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung des Summenrisikos $S = X + Y$:

s	0	40	50	90	100	140	150
$P(S = s)$	β	$0.554 - \beta$	$0.440 - \beta$	β	0.005	0.005	0.000
$P(S \leq s)$	β	0.554	$0.994 - \beta$	0.994	0.995	0.996	1.000

was zu einer immer gleich großen *Risiko-Konzentration* führt wegen

$$\text{VaR}_\alpha(S) = 100 > 90 = \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y),$$

unabhängig vom Parameter β und somit auch unabhängig von den möglichen Korrelationen zwischen X und Y !

4. Korrelation und Diversifikation (oder auch nicht)

Beispiel 2. Die gemeinsame Verteilung der nicht-negativen Risiken X und Y sei durch die folgende Kontingenztafel gegeben (mit $\alpha = 0.005$):

$P(X = x, Y = y)$		x			$P(Y = y)$	$P(Y \leq y)$
		0	50	100		
y	0	β	$0.441 - \beta$	0.000	0.441	0.441
	40	$0.554 - \beta$	β	0.000	0.554	0.995
	50	0.000	0.000	0.005	0.005	1.000
$P(X = x)$		0.554	0.441	0.005		
$P(X \leq x)$		0.554	0.995	1.000		

mit $0 \leq \beta \leq 0.441$, d.h. $\text{VaR}_\alpha(X) = 50$, $\text{VaR}_\alpha(Y) = 40$.

4. Korrelation und Diversifikation (oder auch nicht)

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung des Summenrisikos $S = X + Y$:

s	0	40	50	90	100	140	150
$P(S = s)$	β	$0.554 - \beta$	$0.441 - \beta$	β	0.000	0.000	0.005
$P(S \leq s)$	β	0.554	$0.995 - \beta$	0.995	0.995	0.995	1.000

was zu einem immer gleich großen *Diversifikationseffekt* führt wegen

$$\text{VaR}_\alpha(S) \leq 90 = \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y) \quad (\text{mit Gleichheit für } \beta > 0),$$

unabhängig vom Parameter β und somit auch unabhängig von den möglichen Korrelationen zwischen X und Y (Intervall $[-0.9504; 0.9946]$)!

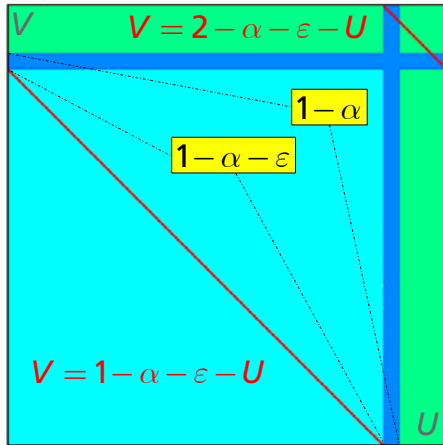
4. Korrelation und Diversifikation (oder auch nicht)

Satz. Es seien X und Y beliebige nicht-negative Risiken mit den Verteilungsfunktionen F_X und F_Y , die auf ihrem Träger stetig und streng monoton wachsend seien. Dann gibt es zu jedem $\alpha \in (0,1)$ eine Familie von Copulas Q_α sowie Darstellungen $Q_\alpha(u,v) = P(U \leq u, V \leq v)$ für $u,v \in (0,1)$ und $X = F_X^{-1}(U)$, $Y = F_Y^{-1}(V)$, so dass gilt:

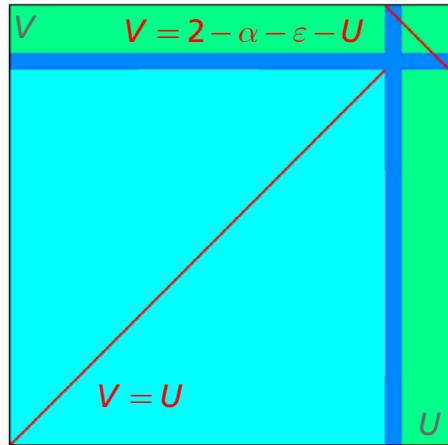
$$\text{VaR}_\alpha(X + Y) > \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y),$$

wobei sich ein stets gleich großer *Risiko-Konzentrationseffekt* mit einem ganzen Intervall möglicher (positiver wie negativer) Korrelationen ergibt. Korrelations-extremale (singuläre) Copulas lassen sich explizit angeben.

4. Korrelation und Diversifikation (oder auch nicht)



untere extremale Copula $\underline{C}_\alpha$



obere extremale Copula $\bar{C}_\alpha$

4. Korrelation und Diversifikation (oder auch nicht)

Beispiel 3. Die Risiken X und Y seien lognormalverteilt nach $\mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma\right)$ mit $\sigma > 0$, was $E(X) = E(Y) = 1$ entspricht (vgl. die QIS 4 und QIS 5 im Modul Non-Life).

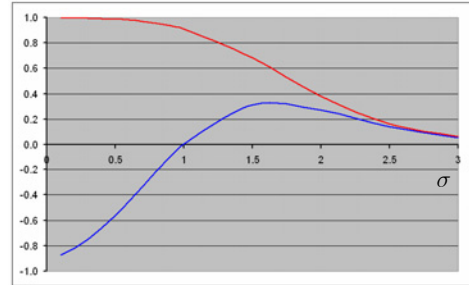
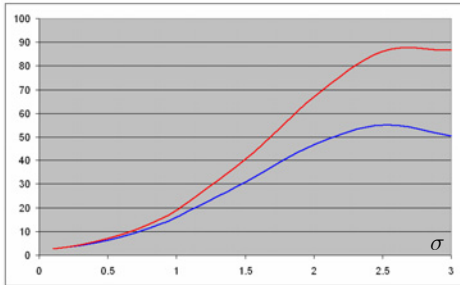
Die folgende Tabelle zeigt einige Ergebnisse als Anwendung des vorigen Satzes, mit der Wahl $\alpha = 0,005$ (Solvency II-Standard).

4. Korrelation und Diversifikation (oder auch nicht)

σ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\text{VaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(Y)$	1.2873	1.6408	2.0704	2.5866	3.1992	3.9177	4.7497
$\text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)$	2.5746	3.2816	4.1408	5.1732	6.3984	7.8354	9.4994
$\text{VaR}_\alpha(X + Y)$	2.6205	3.3994	4.3661	5.5520	6.9901	8.7134	10.7537
$\rho_{\min}(X, Y)$	-0.8719	-0.8212	-0.7503	-0.6620	-0.5598	-0.4480	-0.3310
$\rho_{\max}(X, Y)$	0.9976	0.9969	0.9951	0.9920	0.9873	0.9802	0.9700

$$P^X = P^Y = \mathcal{LN}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, \sigma\right)$$

4. Korrelation und Diversifikation (oder auch nicht)



Links: Graph von $\text{VaR}_\alpha(X+Y)$ und $\text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)$ als Funktion von σ

Rechts: Graph von $\rho_{\max}(X,Y)$ und $\rho_{\min}(X,Y)$ als Funktion von σ

5. Zusammenfassung

- *Korrelation* und *Diversifikation* von Risiken unter dem Risikomaß **VaR** stehen mathematisch grundsätzlich in keinem direkten Zusammenhang (bekannte Ausnahme: elliptisch konturierte gemeinsame Risikoverteilungen, z.B. Normalverteilungen).
- Das Riskomaß **VaR** ist nicht kohärent; die Kohärenzlücke (Differenz zwischen $\text{VaR}_\alpha(X + Y)$ und $\text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)$) kann bis zu 100% betragen (vgl. Embrechts et. al (2012)).
- Zwischen *Korrelation* und *Diversifikation* von Risiken gibt es einen direkten Zusammenhang (nur?) unter dem *Standardabweichungsprinzip*; dies ist aber kein Risikomaß und steht im Allgemeinen in keinem direkten Zusammenhang mit **VaR** (bekannte Ausnahme: elliptisch konturierte gemeinsame Risikoverteilungen, z.B. Normalverteilungen).

6. Literatur

- Doff, R. (2007). Risk Management for Insurers. Risk Control, Economic Capital and Solvency II. Risk Books, London.
- Embrechts, P., Puccetti, G., Rüschendorf, L. (2012): Model uncertainty and VaR aggregation. ETH Zürich, Preprint.
- Hürlimann, W. (2009). Optimisation of the Non-life Insurance Risk Diversification in Solvency II. In: Cruz, M. (ed.) (2009). The Solvency II Handbook. Developing ERM Frameworks in Insurance and Reinsurance Companies, Chapter 12, pp. 325 - 347, Risk Books, London.
- McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2005). Quantitative Risk Management - Concepts, Techniques, Tools. Princeton Univ. Press, Princeton.
- Nelsen, R. B. (2006). An Introduction to Copulas. 2nd ed., Springer, N.Y.
- Official Journal of the European Union (2009), Vol. 52, L 335: DIRECTIVE 2009/138/EC OF THE EUROPEAN PARLIAMENT AND OF THE COUNCIL of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II)
<http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:335:FULL:EN:PDF>
- Pfeifer, D.: (2012): Correlation, tail dependence and diversification. Univ. Oldenburg, Preprint.
- Sandström, A. (2006). Solvency. Models, Assessment and Regulation. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.