Was ist ein Aktuar und was macht er in einem Versicherungsunternehmen?

Dietmar Pfeifer
Institut für Mathematik
Schwerpunkt Versicherungs- und Finanzmathematik

Aktuare sind wissenschaftlich ausgebildete **Sachverständige**, die sich

- im Versicherungswesen,
- im Bausparwesen oder
- in der Altersversorgung

auf der Grundlage **mathematisch-statistischer Methoden** der **Versicherungsmathematik** mit der **Modellierung**, **Bewertung** und **Steuerung** von **Risiken** befassen. Insbesondere beschäftigen sie sich mit der **Wahrscheinlichkeitstheorie**, der **mathematischen Statistik** und der **Finanzmathematik.**

Sie unterscheiden sich von Versicherungsmathematikern durch umfassende Kenntnisse des **Versicherungswesens** auch **außerhalb der reinen Versicherungsmathematik.**

I. Das Prinzip der Versicherung

Versicherungsnehmer (VN)

Versicherungsunternehmen (VU)

Versicherungsnehmer (VN)

Versicherungsunternehmen (VU)

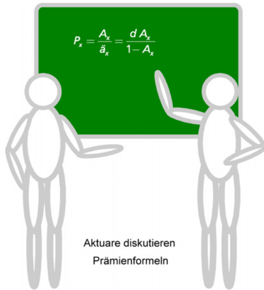
Prämienzahlung

Versicherungsnehmer (VN)

Versicherungsunternehmen (VU)

Prämienzahlung

Risikotragung



Versicherungsnehmer (VN)

Versicherungsunternehmen (VU)

Prämienzahlung

Risikotragung

Äquivalenzprinzip der Versicherung:

Erwartungswert des Barwerts der Prämien = Erwartungswert des Barwerts der Leistungen

Versicherung ist

- „die Beseitigung des Risikos eines Einzelnen durch Beiträge von Vielen“ (Alfred Manes)
- „die planmäßige Deckung eines im einzelnen ungewissen, im ganzen aber schätzbaren Geldbedarfs auf der Grundlage eines zwischenwirtschaftlichen Risikoausgleichs“ (Karl Hax)
- „die Deckung eines im Einzelnen ungewissen, insgesamt schätzbaren Geldbedarfs auf der Grundlage eines Risikoausgleiches im Kollektiv und in der Zeit“ (Dieter Farny)

Versicherung ist

- „die Beseitigung des Risikos eines Einzelnen durch Beiträge von Vielen“ (Alfred Manes)
- „die planmäßige Deckung eines im einzelnen ungewissen, im ganzen aber schätzbaren Geldbedarfs auf der Grundlage eines zwischenwirtschaftlichen Risikoausgleichs“ (Karl Hax)
- „die Deckung eines im Einzelnen ungewissen, insgesamt schätzbaren Geldbedarfs auf der Grundlage eines Risikoausgleiches im Kollektiv und in der Zeit“ (Dieter Farny)

Mathematische Grundlagen:

- Das „Gesetz der großen Zahlen“ (Jakob Bernoulli, um 1695)
  - ➢ Äquivalenzprinzip der Versicherung, Risikoausgleich im Kollektiv und in der Zeit
- Der „zentrale Grenzwertsatz“ (Abraham de Moivre, 1733)
  - ➢ Ruinwahrscheinlichkeit, Solvabilitäts-Aspekte

Personenversicherungsarten:

- Lebensversicherung (LV)
    - Risiko-LV („reine Todesfall-Versicherung“)
    - Erlebensfallversicherung (“Sparversicherung“)
    - Kapital-LV („gemischte Versicherung“)
    - Rentenversicherung
- (private) Krankenversicherung (PKV)
- betriebliche Altersversorgung (bAV)

Sachversicherungsarten (Auswahl):

- Haftpflicht
  - Kfz-Haftpflicht
  - Berufshaftpflicht
  - Privathaftpflicht
- Unfall
- Feuer (gewerblich und privat)
- Gebäudeversicherung
- Hausrat
- Elementargefahren (Sturm, Überschwemmung, Erdbeben)
- Vermögensschäden

Rückversicherungsarten (Auszug):

- Quotenrückversicherung
- Nicht-proportionale Rückversicherung
- Alternativer Risikotransfer (Kapitalmärkte)
- Captives
- Special Purpose Vehicles

II. Grundzüge der Lebensversicherung

Für die (private) Personenversicherung gelten folgende Grundsätze:

Für die (private) Personenversicherung gelten folgende Grundsätze:

- Gleichen Leistungen stehen in einem homogenen Kollektiv gleiche Prämien gegenüber (im Gegensatz z.B. zur gesetzlichen KV)

Für die (private) Personenversicherung gelten folgende Grundsätze:

- Gleichen Leistungen stehen in einem homogenen Kollektiv gleiche Prämien gegenüber (im Gegensatz z.B. zur gesetzlichen KV)
- Gebot der Konstanz der Prämie: LV-Prämien bleiben auch bei zeitlich veränderlichen Risiken über die Vertragslaufzeit konstant (Ausnahme: PKV mit „auslösenden Faktoren“ für Beitragsanpassungen)

Für die (private) Personenversicherung gelten folgende Grundsätze:

- Gleichen Leistungen stehen in einem homogenen Kollektiv gleiche Prämien gegenüber (im Gegensatz z.B. zur gesetzlichen KV)

- Gebot der Konstanz der Prämie: LV-Prämien bleiben auch bei zeitlich veränderlichen Risiken über die Vertragslaufzeit konstant (Ausnahme: PKV mit „auslösenden Faktoren“ für Beitragsanpassungen)

Konsequenz: das VU muss geeignete Rückstellungen (Deckungs-, Alterungsrückstellungen) bilden. Die Korrektheit der Berechnungen wird von einem „verantwortlichen Aktuar“ überprüft.

Für die Berechnung von Versicherungsprämien werden Sterbetafeln aus geeigneten statistischen Quellen, z.B. großen homogenen Versichertenbeständen oder Volkszählungen empirisch ermittelt („rohe Todeswahrscheinlichkeiten") und anschließend mit mathematischen Methoden ausgeglichen.

Sterbetafeln sind in der Regel nach Geschlecht differenziert (Index *x*: Männer, Index *y*: Frauen) und enthalten in der Regel mindestens die folgenden Größen:

Sterbetafel 2006/2008

Deutschland

Männlich*)

Vollendetes Alter	Sterbe- wahrscheinlichkeit vom Alter x bis x+1	Überlebens- wahrscheinlichkeit vom Alter x bis x+1	Überlebende im Alter x	Gestorbene im Alter x bis unter x+1	Von den Überlebenden im Alter x bis zum Alter x+1 durchlebte Jahre	Von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebende Jahre	Durchschnittliche Lebenserwartung im Alter x in Jahren
x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	$e_x l_x$	e_x

Sterbetafel 2006/2008

Deutschland

Männlich*)

Vollendetes Alter	Sterbe- wahrscheinlichkeit vom Alter x bis x+1	Überlebens- wahrscheinlichkeit vom Alter x bis x+1	Überlebende im Alter x	Gestorbene im Alter x bis unter x+1	Von den Überlebenden im Alter x bis zum Alter x+1 durchlebte Jahre	Von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebende Jahre	Durchschnittliche Lebenserwartung im Alter x in Jahren
x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	$e_x l_x$	e_x
0	0,00412898	0,99587102	100 000	413	99 650	7 716 667	77,17
1	0,00034097	0,99965903	99 587	34	99 570	7 617 016	76,49
2	0,00019479	0,99980521	99 553	19	99 543	7 517 446	75,51
3	0,00015594	0,99984406	99 534	16	99 526	7 417 903	74,53
4	0,00013277	0,99986723	99 518	13	99 512	7 318 377	73,54
5	0,00012375	0,99987625	99 505	12	99 499	7 218 865	72,55
6	0,00010433	0,99989567	99 493	10	99 488	7 119 366	71,56
7	0,00010028	0,99989972	99 482	10	99 477	7 019 879	70,56
8	0,00010393	0,99989607	99 472	10	99 467	6 920 401	69,57
9	0,00009503	0,99990497	99 462	9	99 457	6 820 934	68,58
10	0,00008668	0,99991332	99 453	9	99 448	6 721 477	67,58
11	0,00009638	0,99990362	99 444	10	99 439	6 622 029	66,59
12	0,00012273	0,99987727	99 434	12	99 428	6 522 590	65,60
13	0,00010216	0,99989784	99 422	10	99 417	6 423 161	64,60
14	0,00014751	0,99985249	99 412	15	99 405	6 323 744	63,61
15	0,00019766	0,99980234	99 397	20	99 388	6 224 340	62,62
16	0,00030682	0,99969318	99 378	30	99 362	6 124 952	61,63
17	0,00034807	0,99965193	99 347	35	99 330	6 025 590	60,65
18	0,00058370	0,99941630	99 313	58	99 284	5 926 260	59,67
19	0,00059337	0,99940663	99 255	59	99 225	5 826 976	58,71

Ausschnitt aus einer Sterbetafel des Statistischen Bundesamtes

Die meisten Größen können allein aus der Anzahl der Überlebenden l_x bestimmt werden (ω = rechnerisches Endalter):

$$d_x := l_x - l_{x+1}, \quad q_x := \frac{d_x}{l_x}, \quad p_x := 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Weitere „aktuarielle“ Symbole:

$${}_n p_x := \frac{l_{x+n}}{l_x} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k+1}}{l_{x+k}} = \prod_{k=0}^{n-1} p_{x+k} \quad \text{(n-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit)}$$

$${}_n q_x := 1 - {}_n p_x \quad \text{(n-jährige Sterbewahrscheinlichkeit)}$$

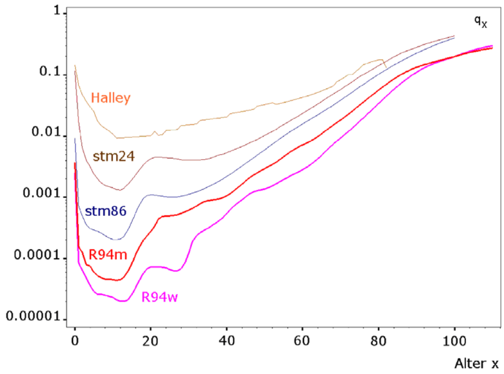
Restlebenserwartung $\left(K_x = \text{restliche Lebensdauer einer } x\text{-jährigen Person}\right)$:

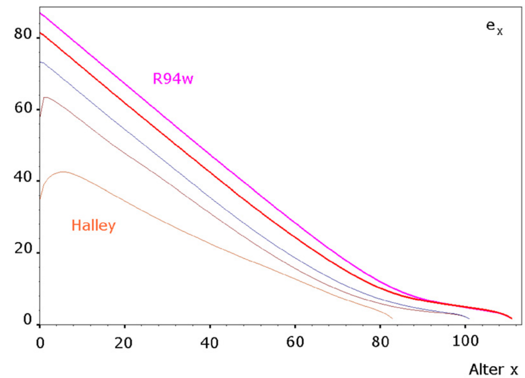
$$E\left(K_x\right) = e_x = \left(\frac{1}{2} + \right) \sum_{k=1}^{\omega - x} {}_k p_x = \left(\frac{1}{2} + \right) \sum_{k=1}^{\omega - x} \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

Wahrscheinlichkeiten:

$$P\left(K_x = k\right) = {}_k p_x \, q_{x+k} \quad \text{und} \quad P\left(K_x > k\right) = {}_{k+1} p_x, \quad x, k \geq 0.$$

Entwicklung der Sterblichkeiten über die Zeit:





Erläuterung:

Halley: Sterbetafel von 1693, basierend auf Bevölkerungsdaten der Stadt Breslau

stm24: Sterbetafel der Jahre 1924/26 (männlich)

stm86: Sterbetafel der Jahre 1986/88 (männlich)

R94m: Renten-Sterbetafel der Deutschen Aktuarvereinigung (DAV) von 1994 (männlich)

R94w: Renten-Sterbetafel der Deutschen Aktuarvereinigung (DAV) von 1994 (weiblich)

Sterbetafeln werden je nach Verwendungszweck aus Vorsichtsgründen mit *Sicherheitszu-* oder *Abschlägen* versehen. Damit steigen rechnerisch die Prämien nach dem Äquivalenzprinzip zu Gunsten des VU.

Todesfallversicherung:	Sicherheitszuschläge (→ erhöhtes Todesfallrisiko)
Erlebensfallversicherung:	Sicherheitsabschläge (→ erhöhtes Erlebensfallrisiko)
Rentenversicherung:	Sicherheitsabschläge (→ erhöhtes Erlebensfallrisiko)

Sterbetafeln werden je nach Verwendungszweck aus Vorsichtsgründen mit *Sicherheitszu-* oder *Abschlägen* versehen. Damit steigen rechnerisch die Prämien nach dem Äquivalenzprinzip zu Gunsten des VU.

Todesfallversicherung:	Sicherheitszuschläge (→ erhöhtes Todesfallrisiko)
Erlebensfallversicherung:	Sicherheitsabschläge (→ erhöhtes Erlebensfallrisiko)
Rentenversicherung:	Sicherheitsabschläge (→ erhöhtes Erlebensfallrisiko)

Sterbetafeln für Todesfallversicherungen werden in der Regel mit dem Symbol „T“, solche für Erlebensfall- bzw. Rentenversicherungen mit dem Symbol „R“ versehen.

Sterbetafeln werden je nach Verwendungszweck aus Vorsichtsgründen mit *Sicherheitszu-* oder *Abschlägen* versehen. Damit steigen rechnerisch die Prämien nach dem Äquivalenzprinzip zu Gunsten des VU.

Todesfallversicherung:	Sicherheitszuschläge (→ erhöhtes Todesfallrisiko)
Erlebensfallversicherung:	Sicherheitsabschläge (→ erhöhtes Erlebensfallrisiko)
Rentenversicherung:	Sicherheitsabschläge (→ erhöhtes Erlebensfallrisiko)

Sterbetafeln für Todesfallversicherungen werden in der Regel mit dem Symbol „T“, solche für Erlebensfall- bzw. Rentenversicherungen mit dem Symbol „R“ versehen.

Bezeichnung:

Rechnungsgrundlagen **erster Ordnung:** **mit** Zu-/ Abschlägen
Rechnungsgrundlagen **zweiter Ordnung:** **ohne** Zu-/ Abschläge

III. Prämienkalkulation

Es wird regelhaft zwischen **Einmalprämien** und **laufenden Prämien** unterschieden. Die Berechnung erfolgt über Erwartungswerte nach Diskontierung der zukünftigen Zahlungsströme mit dem Diskontfaktor $v = 1/(1+i)$ mit dem Rechnungszins i.

„Netto-Prämie" bedeutet hier die Prämie nach dem Äquivalenzprinzip.

Symbol	Bedeutung
$A_x = E\left(v^{K_x+1}\right)$	Netto-Einmalprämie einer Todesfallversicherung der Höhe 1, unbegrenzte Deckung
$A^1_{x\overline{n}\rceil} = E\left(v^{K_x+1}\mathbb{1}_{\{K_x<n\}}\right)$	Netto-Einmalprämie einer Todesfallversicherung der Höhe 1, n–jährige Deckung
$A_{x\overline{n}\rceil}^{\;\;1} = E\left(v^n\mathbb{1}_{\{K_x\geq n\}}\right) = v^n P\left(K_x \geq n\right)$	Netto-Einmalprämie einer Erlebensfallversicherung der Höhe 1
$A_{x\overline{n}\rceil} = A^1_{x\overline{n}\rceil} + A_{x\overline{n}\rceil}^{\;\;1}$	Netto-Einmalprämie einer Kapital-Lebensversicherung der Höhe 1

Symbol Indikatorfunktion: $\mathbb{1}_{\{K_x\geq n\}} = 1$ genau dann, wenn $K_x \geq n$, sonst 0.

Laufende Prämien: Nach dem Äquivalenzprinzip ist die jährliche vorschüssige Prämie jeweils so zu bestimmen, dass die erwarteten Barwerte der Einzahlungen und der Versicherungsleistung (Auszahlung) gleich ausfallen. Für eine Todesfallversicherung unbegrenzter Deckung bedeutet das zunächst die Bestimmung des Leibrentenbarwerts $\ddot{a}_x$, der geschrieben werden kann als

$$\ddot{a}_x = E\left(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}\right) = \sum_{k=0}^{K_x} {}_k p_x \, v^k = \frac{1 - E\left(v^{K_x+1}\right)}{1-v} = \frac{1-A_x}{d}.$$

Bezeichnen wir mit P_x die entsprechende jährliche Prämie für diese Versicherung, muss also die Gleichung

$$P_x \cdot \ddot{a}_x = A_x$$

gelten, woraus folgt

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{d\,A_x}{1-A_x}$$

Ähnlich lassen sich auch die übrigen jährlichen Prämien darstellen. Für den Barwert einer vorschüssigen Rente bis zum Tod, längstens n Jahre erhält man entsprechend:

$$\ddot{a}_{x\,\overline{n}|} := E\left(\ddot{a}_{\overline{\min\{K_x+1,n\}}|}\right) = \frac{1-E\left(v^{\min\{K_x+1,n\}}\right)}{1-v} = \frac{1-E\left(v^{K_x+1}\mathbb{1}_{\{K_x<n\}} + v^n\mathbb{1}_{\{K_x\geq n\}}\right)}{1-v}$$
$$= \frac{1-\left(A^1_{x\,\overline{n}|} + A_{x\,\overline{n}|}^{\;\;1}\right)}{1-v} = \frac{1-A_{x\,\overline{n}|}}{d}.$$

Dementsprechend bestimmen sich die jährlichen Prämien $P^1_{x\,\overline{n}|}$ für die temporäre Todesfallversicherung und $P_{x\,\overline{n}|}^{\;\;1}$ für die Erlebensfallversicherung nach dem Äquivalenzprinzip aus den Gleichungen

$$P^1_{x\,\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x\,\overline{n}|} = A^1_{x\,\overline{n}|} \quad \text{und} \quad P_{x\,\overline{n}|}^{\;\;1}\cdot\ddot{a}_{x\,\overline{n}|} = A_{x\,\overline{n}|}^{\;\;1}.$$

Die jährliche Prämie für die Kapital-Lebensversicherung ergibt sich hieraus durch Addition.

Zusammenfassung:

$\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{1-v} = \frac{1-A_x}{d}$	erwarteter Rentenbarwert der Höhe 1 bei lebenslanger Zahlung
$\ddot{a}_{x\overline{n}\vert} = \frac{1-A_{x\overline{n}\vert}}{1-v} = \frac{1-A_{x\overline{n}\vert}}{d}$	erwarteter Rentenbarwert der Höhe 1 bei maximal n Jahre dauernder Zahlung
$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{d\,A_x}{1-A_x}$	jährliche Netto-Prämie einer Todesfallver-sicherung der Höhe 1, unbegrenzte Deckung
$P^1_{x\overline{n}\vert} = \frac{A^1_{x\overline{n}\vert}}{\ddot{a}_{x\overline{n}\vert}} = \frac{dA^1_{x\overline{n}\vert}}{1-A_{x\overline{n}\vert}}$	jährliche Netto-Prämie einer Todesfallver-sicherung der Höhe 1, n–jährige Deckung
$P_{x\overline{n}\vert}^{\;\;1} = \frac{A_{x\overline{n}\vert}^{\;\;1}}{\ddot{a}_{x\overline{n}\vert}} = \frac{dA_{x\overline{n}\vert}^{\;\;1}}{1-A_{x\overline{n}\vert}}$	jährliche Netto-Prämie einer Erlebensfall-versicherung der Höhe 1
$P_{x\overline{n}\vert} = P^1_{x\overline{n}\vert} + P_{x\overline{n}\vert}^{\;\;1} = \frac{A_{x\overline{n}\vert}}{\ddot{a}_{x\overline{n}\vert}} = \frac{dA_{x\overline{n}\vert}}{1-A_{x\overline{n}\vert}}$	jährliche Netto-Prämie einer Kapital-Lebens-versicherung der Höhe 1

IV. Kommutationswerte

Traditionell werden in vielen Sterbtafeln zur Vereinfachung der Rechnungen mit festen Zinssätzen so genannte *Kommutationswerte* mit ausgegeben. Die Basisgrößen sind folgendermaßen definiert:

Symbol	Bedeutung	Ableitung
$D_x := v^x l_x$	„diskontierte Zahl der Lebenden"	$N_x := \sum_{k=x}^{\infty} D_k$
$C_x := v^{x+1} d_x$	„diskontierte Zahl der Toten"	$M_x := \sum_{k=x}^{\infty} C_k$

In dieser Terminologie lassen sich alle relevanten Rechnungsgrößen folgendermaßen ausdrücken:

Symbol	Darstellung
$\ddot{a}_x$	$\frac{N_x}{D_x}$
A_x	$\frac{M_x}{D_x}$
$A_{x,\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}$	$\frac{D_{x+n}}{D_x}$
$\ddot{a}_{x,\overline{n}\rceil}$	$\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$
$A^1_{x,\overline{n}\rceil}$	$\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$
$A_{x,\overline{n}\rceil}$	$\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$

Symbol	Darstellung
$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$	$\frac{M_x}{N_x}$
$P^1_{x,\overline{n}\rvert} = \frac{A^1_{x,\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x,\overline{n}\rvert}}$	$\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$
$P_{x,\overset{1}{\overline{n}\rvert}} = \frac{A_{x,\overset{1}{\overline{n}\rvert}}}{\ddot{a}_{x,\overline{n}\rvert}}$	$\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$
$P_{x,\overline{n}\rvert} = P^1_{x,\overline{n}\rvert} + P_{x,\overset{1}{\overline{n}\rvert}}$	$\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$

2. Ein 25 jähriger Mann will durch eine Einmalzahlung bei seinem Tode für seine Hinterbliebenen, oder falls er 60 Jahre alt wird, für sich die Summe von a ℳ sichern.

Die Einmalzahlung sei E_a ℳ. Berechne Leistung und Gegenleistung unter Diskontierung auf den Anfang des 1. Jahres und begründe die Gleichung:

$$E_a \cdot D_{25} = a\,(C_{25} + C_{26} + \dots + C_{59} + D_{60})$$

Nun ist

$$C_{25} + C_{26} + \dots C_{59} + C_{60} + \dots + C_{100} = M_{25}$$

$$C_{60} + C_{61} + \dots\dots + C_{100} = M_{60};$$ somit wird

$$C_{25} + C_{26} + \dots\dots C_{59} = M_{25} - M_{60}$$

$$E_a \cdot D_{25} = a \cdot (M_{25} - M_{60} + D_{60})$$

$$E_a = a \cdot \frac{M_{25} - M_{60} + D_{60}}{D_{25}}$$

3. Der 25 jährige Mann will dieselbe Versicherung abschließen wie in Nr. 2, jedoch statt einer Einmalzahlung eine Jahresprämie leisten.

Die Jahresprämie sei P ℳ. Zeige, daß die Gleichung gilt:

$$P \cdot \left(\frac{l_{25}}{q^{25}} + \frac{l_{26}}{q^{26}} + \dots \frac{l_{59}}{q^{59}}\right) = a\left(\frac{d_{25}}{q^{26}} + \frac{d_{26}}{q^{27}} + \dots \frac{d_{59}}{q^{60}} + \frac{l_{60}}{q^{60}}\right)$$

$$P = a \cdot \frac{M_{25} - M_{60} + D_{60}}{N_{25} - N_{60}}$$

Frank: Arithmetik und Algebra. Oberstufe (1927)

V. Die Deckungsrückstellung

Werden bei einer Lebensversicherung jährliche Prämienzahlungen vereinbart, besteht in der Regel nur zu Beginn der Versicherung eine Äquivalenz im Sinne der Gleichheit der erwarteten Barwerte der künftigen Versicherungsleistung und der künftigen Prämienzahlungen. In späteren Jahren verschiebt sich dieses Gleichgewicht, und zwar zu Gunsten des VU, wenn die Sterblichkeit des VN mit der Zeit zunimmt.

Werden bei einer Lebensversicherung jährliche Prämienzahlungen vereinbart, besteht in der Regel nur zu Beginn der Versicherung eine Äquivalenz im Sinne der Gleichheit der erwarteten Barwerte der künftigen Versicherungsleistung und der künftigen Prämienzahlungen. In späteren Jahren verschiebt sich dieses Gleichgewicht, und zwar zu Gunsten des VU, wenn die Sterblichkeit des VN mit der Zeit zunimmt.

Die Differenz der genannten erwarteten Barwerte heißt das *Deckungskapital* (Deckungsrückstellung) des Versicherungsvertrags und wird üblicherweise mit dem Symbol V bezeichnet. Das Deckungskapital „gehört“ eigentlich dem VN, das VU muss diesen Betrag also für die Finanzierung der zukünftigen Versicherungsleistungen reservieren.

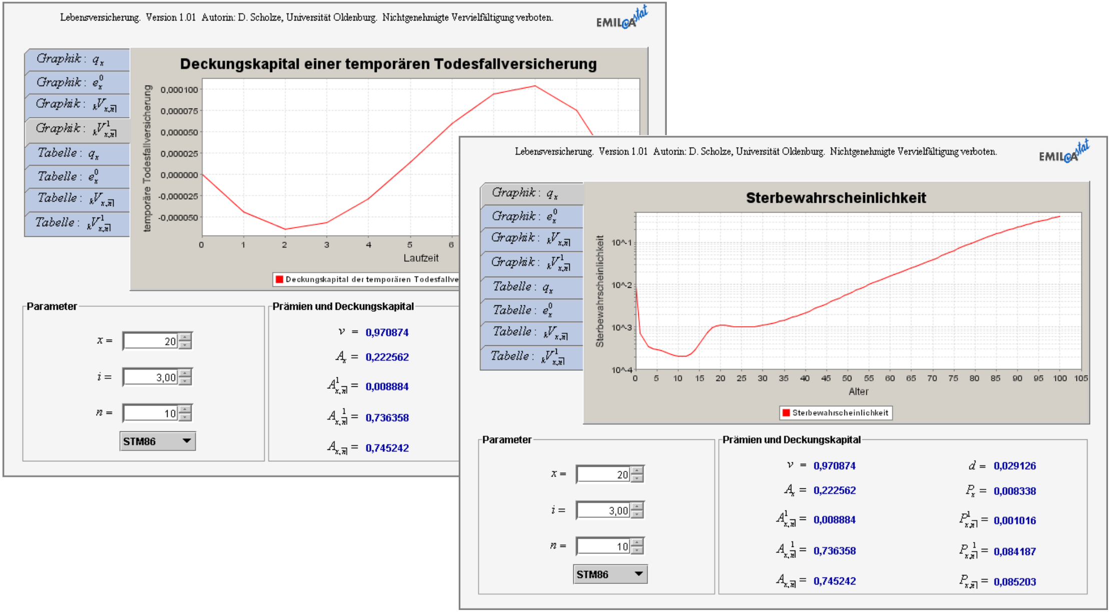
Werden bei einer Lebensversicherung jährliche Prämienzahlungen vereinbart, besteht in der Regel nur zu Beginn der Versicherung eine Äquivalenz im Sinne der Gleichheit der erwarteten Barwerte der künftigen Versicherungsleistung und der künftigen Prämienzahlungen. In späteren Jahren verschiebt sich dieses Gleichgewicht, und zwar zu Gunsten des VU, wenn die Sterblichkeit des VN mit der Zeit zunimmt.

Die Differenz der genannten erwarteten Barwerte heißt das *Deckungskapital* (Deckungsrückstellung) des Versicherungsvertrags und wird üblicherweise mit dem Symbol V bezeichnet. Das Deckungskapital „gehört" eigentlich dem VN, das VU muss diesen Betrag also für die Finanzierung der zukünftigen Versicherungsleistungen reservieren.

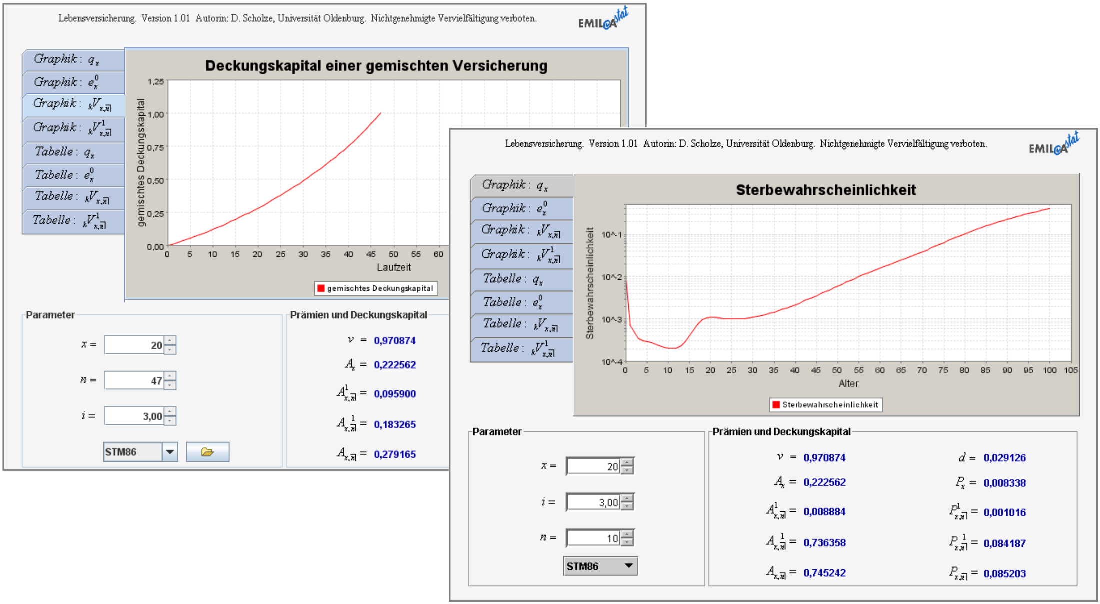
Deckungsrückstellungen bilden auch die Grundlage von *Rückkaufswerten* und können als *Einmalprämie* zur Umwandlung in eine *beitragsfreie Versicherung* herangezogen werden.

Symbol	Bedeutung
${}_kV_x = A_{x+k} - P_x \ddot{a}_{x+k},\ k = 0, 1, \cdots$	Deckungskapital zu Beginn des Jahres k der Versicherung, Todesfallversicherung mit unbegrenzter Deckung
${}_kV^1_{x\overline{n}\rceil} = A^1_{x+k;\overline{n-k}\rceil} - P^1_{x\overline{n}\rceil} \ddot{a}_{x+k;\overline{n-k}\rceil},\ k = 0, \cdots, n-1$	Deckungskapital zu Beginn des Jahres k der Versicherung, Todesfallversicherung mit n–jähriger Deckung
${}_kV_{x\overline{n}\rceil}^{\ \ 1} = A_{x+k;\overline{n-k}\rceil}^{\ \ \ \ 1} - P_{x\overline{n}\rceil}^{\ \ 1} \ddot{a}_{x+k;\overline{n-k}\rceil},\ k = 0, \cdots, n-1$	Deckungskapital zu Beginn des Jahres k der Versicherung, Erlebensfallversicherung mit n–jähriger Dauer
${}_kV_{x\overline{n}\rceil} = A_{x+k;\overline{n-k}\rceil} - P_{x\overline{n}\rceil} \ddot{a}_{x+k;\overline{n-k}\rceil},\ k = 0, \cdots, n-1$	Deckungskapital zu Beginn des Jahres k einer Kapital-Lebensversicherung der Höhe 1

Die folgenden Graphiken zeigen Verläufe von Deckungsrückstellungen für temporäre Todesfall- bzw. Kapital-Lebensversicherungen:



Die folgenden Graphiken zeigen Verläufe von Deckungsrückstellungen für temporäre Todesfall- bzw. Kapital-Lebensversicherungen:



VI. Das kollektive Modell der Risikotheorie

Typischerweise ist in der Sachversicherung das Risiko eines jedes einzelnen Versicherten *zusammengesetzt*. Sehen wir dazu das folgende Beispiel an:

- die jährlichen Schäden aus einer Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung männlicher Fahranfänger mit einer bestimmten Regional- und Typklasse

Typischerweise ist in der Sachversicherung das Risiko eines jedes einzelnen Versicherten *zusammengesetzt*. Sehen wir dazu das folgende Beispiel an:

- die jährlichen Schäden aus einer Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung männlicher Fahranfänger mit einer bestimmten Regional- und Typklasse

Erfahrungsgemäß verursachen gerade Fahranfänger häufiger Unfälle pro Jahr, deren Schäden sich dann zu dem individuellen Jahresschaden des Versicherten saldieren. Charakteristisch für diese Situation sind zwei Zufallsgrößen:

Typischerweise ist in der Sachversicherung das Risiko eines jedes einzelnen Versicherten *zusammengesetzt*. Sehen wir dazu das folgende Beispiel an:

- die jährlichen Schäden aus einer Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung männlicher Fahranfänger mit einer bestimmten Regional- und Typklasse

Erfahrungsgemäß verursachen gerade Fahranfänger häufiger Unfälle pro Jahr, deren Schäden sich dann zu dem individuellen Jahresschaden des Versicherten saldieren. Charakteristisch für diese Situation sind zwei Zufallsgrößen:

- die (zufällige) Schadenfrequenz N, das ist die Anzahl der Schäden, die sich für dasselbe versicherte Risiko in der Versicherungsperiode ereignen
- die *positiven* Einzelschadenhöhen $Y_1, \cdots, Y_N$, die dabei eintreten

Typischerweise ist in der Sachversicherung das Risiko eines jedes einzelnen Versicherten *zusammengesetzt*. Sehen wir dazu das folgende Beispiel an:

- die jährlichen Schäden aus einer Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung männlicher Fahranfänger mit einer bestimmten Regional- und Typklasse

Erfahrungsgemäß verursachen gerade Fahranfänger häufiger Unfälle pro Jahr, deren Schäden sich dann zu dem individuellen Jahresschaden des Versicherten saldieren. Charakteristisch für diese Situation sind zwei Zufallsgrößen:

- die (zufällige) Schadenfrequenz N, das ist die Anzahl der Schäden, die sich für dasselbe versicherte Risiko in der Versicherungsperiode ereignen
- die *positiven* Einzelschadenhöhen $Y_1, \cdots, Y_N$, die dabei eintreten

Der individuelle Schaden pro Versicherungsperiode ist damit gegeben durch die zufällige Summe

$$\boxed{X = \sum_{k=1}^{N} Y_i.}$$

Hier wird davon ausgegangen, dass die Einzelschadenhöhen identisch (wie Y) verteilt sind und sowohl untereinander als auch von der Schadenfrequenz stochastisch unabhängig sind.

Die Beschreibung von Risiken über Schadenfrequenz und Einzelschadenhöhe ist das charakteristische Merkmal des *kollektiven Modells der Risikotheorie*.

Das sogenannte *individuelle Modell der Risikotheorie* ist ein Spezialfall des kollektiven Modells, bei dem die Schadenfrequenz deterministisch ist, z. B. der Anzahl der Versicherten im Kollektiv entspricht. Grundsätzlich kann das kollektive Modell aber auch hier zur Beschreibung sinnvoll sein, nämlich dann, wenn nicht alle Versicherten tatsächlich Schadenfälle verursachen. In diesem Fall wäre N die Anzahl der von echten (d. h. positiven) Schäden betroffenen Versicherten im Kollektiv. $N = 0$ bedeutet also beispielsweise, dass während der Versicherungsperiode kein Schaden für dieses Risiko eingetreten ist.

Für die analytische Berechnung der Verteilung von X gibt es mehrere Möglichkeiten (darunter die *schnelle Fourier-Transformation*), von denen wir hier aber nur eine spezielle besprechen, nämlich die *Panjer-Rekursion* für eine *Poisson-verteilte Schadenfrequenz*.

Zur Verwendung des Panjer-Algorithmus muss die Einzelschadenhöhenverteilung geeignet *diskretisiert* werden, z. B. aufgerundet als Vielfache von 1.000 € oder anderen, geeigneten monetären Einheiten. Das so diskretisierte (positive!) Risiko wollen wir mit Y_Δ bezeichnen. Abkürzend setzen wir noch:

$$\boxed{f_k := P(Y_\Delta = k),\; g_k := P(X_\Delta = k),\; k = 0,1,2,\cdots.}$$

Die f_k geben also die Wahrscheinlichkeiten der diskretisierten Einzelschadenhöhen wieder, die g_k die Wahrscheinlichkeiten des gesuchten (diskretisierten) Summenschadens $X_\Delta = \sum_{k=1}^{N} Y_{\Delta i}$.

Diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich sukzessive folgendermaßen berechnen (*Panjer-Rekursion*):

$$g_0 = e^{-\lambda}, \ g_k = \frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k} j \cdot f_j \cdot g_{k-j}, \ k = 1, 2, \cdots.$$

Oder explizit:

$$\begin{aligned}
g_0 &= e^{-\lambda} \\
g_1 &= \lambda f_1 g_0 \\
g_2 &= \frac{\lambda}{2}\left(f_1 g_1 + 2 f_2 g_0\right) \\
g_3 &= \frac{\lambda}{3}\left(f_1 g_2 + 2 f_2 g_1 + 3 f_3 g_0\right) \\
g_4 &= \frac{\lambda}{4}\left(f_1 g_3 + 2 f_2 g_2 + 3 f_3 g_1 + 4 f_4 g_0\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Beispiel. Wir betrachten eine private Haftpflichtversicherung, für die wir annehmen, dass je Versicherten die jährliche Schadenfrequenz Poisson-verteilt ist mit Parameter 0,1. (Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass der Versicherte im Schnitt alle zehn Jahre einen Haftpflichtschaden verursacht.) Die diskretisierte Einzelschadenhöhenverteilung sei tabellarisch folgendermaßen gegeben (monetäre Einheit: 1.000 €):

k	1	2	3
f_k	0,7	0,2	0,1

Beispiel. Wir betrachten eine private Haftpflichtversicherung, für die wir annehmen, dass je Versicherten die jährliche Schadenfrequenz Poisson-verteilt ist mit Parameter 0,1. (Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass der Versicherte im Schnitt alle zehn Jahre einen Haftpflichtschaden verursacht.) Die diskretisierte Einzelschadenhöhenverteilung sei tabellarisch folgendermaßen gegeben (monetäre Einheit: 1.000 €):

k	1	2	3
f_k	0,7	0,2	0,1

Als Lösung erhält man (gerundet):

k	0	1	2	3	4	5
g_k	0,9048	0,0633	0,0203	0,0104	0,0009	0,0002

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Versicherter einen jährlichen Schaden von 3.000 € und mehr verursacht, beträgt hier also:

$$P\left(X_\Delta \geq 3\right) = 1 - P\left(X_\Delta \leq 2\right) = 1 - (0{,}9048 + 0{,}0633 + 0{,}0203) = 0{,}0116.$$

VII. Spätschadenreservierung

Ein zentrales, in der Versicherungspraxis immer wieder zu beobachtendes Problem stellt die verzögerte Abwicklung von Schäden dar, die z. B. in der Kfz-Haftpflichtversicherung oder in der Krankenversicherung durch aufwändige Gutachten, Gerichtsprozesse usw. verursacht werden können. Manchmal können sogar mehrere Jahre oder Jahrzehnte zwischen dem Auftreten des Schadens und seiner abschließenden Regulierung liegen, z. B. bei Produkthaftpflichtschäden oder Verkehrsunfällen mit Personenschäden, die zu lebenslangen Rentenzahlungen führen.

Ein zentrales, in der Versicherungspraxis immer wieder zu beobachtendes Problem stellt die verzögerte Abwicklung von Schäden dar, die z. B. in der Kfz-Haftpflichtversicherung oder in der Krankenversicherung durch aufwändige Gutachten, Gerichtsprozesse usw. verursacht werden können. Manchmal können sogar mehrere Jahre oder Jahrzehnte zwischen dem Auftreten des Schadens und seiner abschließenden Regulierung liegen, z. B. bei Produkthaftpflichtschäden oder Verkehrsunfällen mit Personenschäden, die zu lebenslangen Rentenzahlungen führen.

Aus diesem Grund müssen die Versicherungsunternehmen frühzeitig geeignete Rückstellungen bilden, um die Konsequenzen möglicher Spätschäden finanziell ausreichend tragen zu können. Außerdem müssen solche Rückstellungen streng genommen auch in die Berechnung der Bedarfsprämie einfließen. Mathematisch stellt sich dabei das Problem, aus den finanziell eher geringen Anfangsschäden auf die Größenordnung der Gesamtschäden zu schließen. Dies wird formal durch die Betrachtung so genannter *Abwicklungsdreiecke* geregelt, wobei noch zwischen den *Schadenzuwächsen* und den *Schadenständen* unterschieden wird.

Beispiel. Einem VU liegen aus den letzten Jahren folgende Informationen zu Schadenzahlungen aus der Kfz-Haftpflichtversicherung vor (in 1.000 €):

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenzuwächse)				
	2008	2009	2010	2011	2012
2008	255	354	199	153	34
2009		312	427	155	88
2010			165	201	123
2011				178	204
2012					148

Man sieht, dass die Zahlungen im zweiten Jahr nach Eintritt des Schadens am höchsten ausfallen, um dann in den Folgejahren langsam abzunehmen. Diesen Effekt sieht man allerdings bei der hier gewählten Form der tabellarischen Darstellung nicht sehr deutlich.

Aus diesem Grund werden Abwicklungsdreiecke fast immer als *relative Abwicklungsdreiecke* (engl.: *run-off-triangle*) behandelt, d. h. in dieser Form:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenzuwächse)				
	0	1	2	3	4
0	255	354	199	153	34
1	312	427	155	88	
2	165	201	123		
3	178	204			
4	148				

Der genannte Effekt wird jetzt wesentlich deutlicher sichtbar.

Für die saldierten *Schadenstände* erhält man analog:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenstände)				
	0	1	2	3	4
0	255	609	808	961	995
1	312	739	894	982	
2	165	366	489		
3	178	382			
4	148				

Ziel der mathematischen Analyse ist es, diese Dreiecke in der unteren Hälfte sinnvoll zu vervollständigen, um somit eine Übersicht über die zukünftig zu erwartenden Schadenlasten zu erhalten.

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenstände)				
	0	1	2	3	4
0	255	609	808	961	995
1	312	739	894	982	
2	165	366	489		
3	178	382			
4	148				

Es ist nahe liegend, hierfür die Verhältniszahlen zwischen den einzelnen Spalten in geeigneter Weise zu benutzen. Da im Abwicklungsjahr 4 nur eine Beobachtung zur Verfügung steht, wird man hier das Verhältnis $995:961=1{,}0354$ ansetzen; beim Übergang von Abwicklungsjahr 2 nach Abwicklungsjahr 3 stehen aber schon vier Werte (graue Felder) zur Verfügung, so dass hier die Betrachtung des Verhältnisses der *Jahresgesamtschadenstände* sinnvoll scheint, also der Quotient

$$\boxed{(961+982):(808+894)=1943:1702=1{,}1416.}$$

Diese Vorgehensweise ist charakteristisch für das so genannte *Chain-Ladder*-Verfahren („Strickleiter"-Verfahren), das mit seinen diversen Varianten das am häufigsten verwendete Verfahren zur Berechnung von Spätschadenreserven darstellt und auch im Rahmen der Reservenbewertung unter Solvency II eine fundamentale Rolle spielt.

Für den Rest dieses Abschnitts verwenden wir folgende allgemeine Notation für Abwicklungsdreiecke:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenstände)								
	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-i$	$\cdots$	$n-1$	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	$\cdots$	$S_{0,k}$	$\cdots$	$S_{0,n-i}$	$\cdots$	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	$\cdots$	$S_{1,k}$	$\cdots$	$S_{1,n-i}$	$\cdots$	$S_{1,n-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\iddots$		
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	$\cdots$	$S_{i,k}$	$\cdots$	$S_{i,n-i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\iddots$				
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	$\cdots$	$S_{n-k,k}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$						
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$							
n	$S_{n,0}$								

Die Schadenstände $S_{i,j}$ sind positiv und in der Regel – als kumulierte Jahresschäden – monoton wachsend in j. Es werden nun so genannte *Abwicklungsfaktoren* betrachtet, die in Anlehnung an die oben beschriebene Vorgehensweise formal definiert sind durch

$$F_k := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}, \quad k = 1, \cdots, n,$$

also das Verhältnis der durch Saldieren bekannten Schadenstände der benachbarten Spalten k und $k-1$. Das Abwicklungsdreieck wird dann in der unteren Hälfte durch sukzessive Multiplikation der letzten bekannten Schadenstände mit den Abwicklungsfaktoren ergänzt:

$$\hat{S}_{i,k} := S_{i,n-i} \cdot \prod_{m=n-i+1}^{k} F_m, \quad i = 0, \cdots, n, \; k = n-i, \cdots, n.$$

Beispiel (Fortsetzung). Als Vervollständigung nach dem Chain-Ladder-Verfahren ergibt sich (graue Felder):

Anfalljahr	Abwicklungsjahr (Schadenstände)					Benötigte Reserve
	0	1	2	3	4	
0	255	609	808	961	**995**	–
1	312	739	894	982	**1016,743**	34,743
2	165	366	489	558,241	**577,992**	88,992
3	178	382	488,309	557,453	**577,175**	195,175
4	148	340,888	435,756	497,458	**515,058**	367,058
F_k	–	**2,3033**	**1,2783**	**1,1416**	**1,0354**	Summe: 685,968

Die Zahlen in Spalte 4 stellen die endgültigen erwarteten Schadenstände dar (so genannte „Ultimates"). Die letzte Spalte enthält als benötigte Reserve die Differenzen zwischen den Ultimates und den letzten bekannten Anfalljahresschäden auf der Diagonalen. Die Gesamtreserve beläuft sich auf 685.968 €.

VIII. Proportionale Rückversicherung

Unter Rückversicherung versteht man im Allgemeinen eine „Versicherung der Versicherer". Sie basiert auf einem frei vereinbarten Vertrag zwischen einem Erstversicherer, der *Zedent* genannt wird, und einem Rückversicherer, genannt *Zessionär*. Rückversicherung dient zum einen als eine Form von Eigenkapitalersatz, zum anderen dazu, große Risiken – etwa aus Naturkatastrophen – und damit eventuell verbundene hohe finanzielle, eventuell sogar ruinöse Belastungen zu mildern oder sogar fast völlig zu vermeiden.

Unter Rückversicherung versteht man im Allgemeinen eine „Versicherung der Versicherer“. Sie basiert auf einem frei vereinbarten Vertrag zwischen einem Erstversicherer, der *Zedent* genannt wird, und einem Rückversicherer, genannt *Zessionär*. Rückversicherung dient zum einen als eine Form von Eigenkapitalersatz, zum anderen dazu, große Risiken – etwa aus Naturkatastrophen – und damit eventuell verbundene hohe finanzielle, eventuell sogar ruinöse Belastungen zu mildern oder sogar fast völlig zu vermeiden.

Bei der *proportionalen Rückversicherung* übernimmt der Zessionär einen bestimmten Anteil am versicherungstechnischen Risiko des Zedenten und erhält dafür auch einen entsprechenden proportionalen Anteil an der Originalprämie des Erstversicherers (plus ggf. weiterer Zuschläge). Wenn die Bemessungsgrundlage für die Bestimmung des Beteiligungsverhältnisses des Rückversicherers eine gestaffelte Versicherungssumme ist, spricht man auch von einer *Summenexzedenten-Rückversicherung*.

Die Grundform der proportionalen Rückversicherung bildet ein einfacher *Quotenvertrag*, bei dem sich der Rückversicherer in Bezug auf das Geschäft seines Zedenten wie ein stiller Teilhaber verhält. Er übernimmt im Verhältnis zum Zedenten die Verpflichtungen, die sich aus dessen Verträgen ergeben (inklusive der anteiligen Verwaltungskosten), und stellt auf diesem Wege indirekt Eigenkapital zur Bewältigung der vom Erstversicherer übernommenen Verpflichtungen bereit. Mit einer Quote übernimmt der Rückversicherer seinen Anteil von allen Deckungen so, wie sie der Erstversicherer original übernommen hat.

Eine *Summenexzedenten-Rückversicherung* funktioniert im Prinzip wie ein *Quotenvertrag*, jedoch werden hier ein Selbstbehalt und die Rückversicherungsabgabe für jede Risikoklasse individuell festgelegt. Maßgeblich ist der auch als „erstes Maximum“ bezeichnete Selbstbehalt des Erstversicherers. Er wird als absoluter Betrag festgelegt. Hierzu wird eine die Größe der einzelnen Risiken beschreibende Summe herangezogen, in der Regel die Versicherungssumme, in einigen Sparten auch das vom Risiko ausgehende Höchstschadenpotenzial. Die maximale Aufnahmefähigkeit eines solchen Vertrages wird als Vielfaches des Selbstbehalts („Anzahl Maxima“) festgelegt. Die je Risikoklasse resultierende Quote ergibt sich aus dem Verhältnis der Anzahl der Maxima in Bezug auf die Risikosumme (Versicherungssumme).

Beispiel. Eine Gebäudeversicherung vereinbart mit ihrem Rückversicherer für das Privatkundensegment mit 17.245 Verträgen eine 60-prozentige Quotenabgabe. Die Gebäude sind in fünf Versicherungssummenklassen in Schritten von 100.000 € gruppiert.

Das teuerste Gebäude hat eine Versicherungssumme von 495.000 €. Die Prämie des Erstversicherers beträgt 0,75 ‰ der Obergrenze der jeweiligen VS-Klasse. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Versicherungsstruktur und die je VS-Klasse angefallenen Jahresschäden (Bruttoschadenaufwand). Die monetäre Einheit ist durchgängig 1.000 €.

VS-Klasse	Anzahl Verträge	Beitragssatz (in ‰ der VS)	Beiträge EV (brutto)	Abgabequote (in %)	zedierte Beiträge	Beiträge EV (netto)	Brutto-Schaden-aufwand	zedierte Schäden	Selbstbehalt
100	7.841	0,75	588	60,00%	353	235	507	304	203
200	4.785	0,75	718	60,00%	431	287	707	424	283
300	2.573	0,75	579	60,00%	347	232	443	266	177
400	1.289	0,75	387	60,00%	232	155	276	166	110
500	757	0,75	284	60,00%	170	114	260	156	104
Summe	17.245		2.555		1.533	1.022	2.193	1.316	877
						Brutto-SQ:	85,82%	Netto-SQ:	85,82%

Die Schadenquote beträgt in diesem Beispiel erwartungsgemäß mit oder ohne Quotenrückversicherung (Netto-/Brutto-SQ) 85,82 %.

Beispiel. Die Gebäudeversicherung vereinbart mit ihrem Rückversicherer eine Summenexzedenten-Rückversicherung mit vier Maxima. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Auswirkungen dieser pro-portionalen Rückversicherung:

VS-Klasse	Anzahl Verträge	Beitragssatz (in ‰ der VS)	Beiträge EV (brutto)	Maxima	Zession (in %)	zedierte Beiträge	Beiträge EV (netto)	Brutto-Schaden-aufwand	zedierte Schäden	Selbstbehalt
100	7841	0,75	588	0	0,00%	0	588	507	0	507
200	4785	0,75	718	1	50,00%	359	359	707	354	354
300	2573	0,75	579	2	66,67%	386	193	443	295	148
400	1289	0,75	387	3	75,00%	290	97	276	207	69
500	757	0,75	284	4	80,00%	227	57	260	208	52
Summe	17.245		2.555			1.262	1.293	2.193	1.064	1.129
					in % der Brutto-Beiträge	49,39%	50,61%	RV-SQ:	84,30%	Netto-SQ: 87,30%

Die Nettoschadenquote steigt in diesem Beispiel gegenüber vorher leicht an auf 87,30 %; die Schadenquote des Rückversicherers beträgt dagegen nur 84,30 %, also leicht weniger als die Schadenquote von 85,82 % vorher. Insgesamt zediert die Gebäudeversicherung mit diesem Vertragstyp knapp 50 % ihrer Bruttobeiträge.

IX. Nichtproportionale Rückversicherung

Bei der nichtproportionalen Rückversicherung vereinbaren Erst- und Rückversicherer Ursache und Höhe eines Schadens beim Erstversicherer, der eine Leistung des Rückversicherers auslöst, sowie den Umfang der Leistungspflicht des Rückversicherers. Der Rückversicherer erhält für sein Leistungsversprechen einen von der Originalprämie unabhängigen Rückversicherungsbeitrag. Bei Eintreten der rückversicherten Umstände ist er im Rahmen der zur Verfügung gestellten Haftungssumme nach Abzug des im Vertrag vorgesehenen Selbstbehalts des Erstversicherers (Priorität genannt) zu einer Ersatzleistung an diesen verpflichtet.

Bei der nichtproportionalen Rückversicherung vereinbaren Erst- und Rückversicherer Ursache und Höhe eines Schadens beim Erstversicherer, der eine Leistung des Rückversicherers auslöst, sowie den Umfang der Leistungspflicht des Rückversicherers. Der Rückversicherer erhält für sein Leistungsversprechen einen von der Originalprämie unabhängigen Rückversicherungsbeitrag. Bei Eintreten der rückversicherten Umstände ist er im Rahmen der zur Verfügung gestellten Haftungssumme nach Abzug des im Vertrag vorgesehenen Selbstbehalts des Erstversicherers (Priorität genannt) zu einer Ersatzleistung an diesen verpflichtet.

Ein *Einzelschadenexzedent* wird beschrieben durch die „Haftung *excess* (kurz: xs) *of* Priorität“. Die Priorität gibt an, bis zu welcher Höhe der Erstversicherer selbst Anteile am Schaden trägt. Der Rückversicherer übernimmt dann alle Kosten aus Schäden zwischen der Priorität und dem sogenannten Plafond; die Differenz aus Plafond und Priorität heißt *Haftungsstrecke*, das zugehörige Intervall wird meist als *Layer* bezeichnet. Bei einem XL-Vertrag mit „6 Mio. € xs of 2 Mio.€“ trägt also der Erstversicherer am eventuellen Schaden einen Kostenanteil bis zu 2 Mio. EUR, der Rückversicherer trägt das, was darüber hinausgeht, bis zu einer Höhe von 8 Mio. € mit einer Haftungsstrecke von 6 Mio. €.

Die folgende Tabelle zeigt exemplarisch die technischen Aspekte dieses Rückversicherungsvertrags.

Einzelschadenhöhe	Anteil Erstversicherer	Anteil Rückversicherer	nicht versichert sind
1,5 Mio. €	1,5 Mio. €	---	---
2,8 Mio. €	2,0 Mio. €	0,8 Mio. €	---
9,4 Mio. €	2,0 Mio. €	6,0 Mio. €	1,4 Mio. €

In der Praxis werden in der Regel mehrere aufeinander aufbauende Layer, zur Diversifikation des Risikos häufig bei verschiedenen Unternehmen, rück-versichert.

Die folgende Tabelle zeigt exemplarisch die technischen Aspekte dieses Rückversicherungsvertrags.

Einzelschadenhöhe	Anteil Erstversicherer	Anteil Rückversicherer	nicht versichert sind
1,5 Mio. €	1,5 Mio. €	---	---
2,8 Mio. €	2,0 Mio. €	0,8 Mio. €	---
9,4 Mio. €	2,0 Mio. €	6,0 Mio. €	1,4 Mio. €

In der Praxis werden in der Regel mehrere aufeinander aufbauende Layer, zur Diversifikation des Risikos häufig bei verschiedenen Unternehmen, rück-versichert.

Für einen Stop-Loss-Vertrag gilt in Bezug auf das Formelwerk dasselbe wie für einen XL-Vertrag, außer dass hier der aggregierte Jahresschaden X und kein Ereignisschaden betrachtet wird.

Die folgende Tabelle zeigt exemplarisch die technischen Aspekte dieses Rückversicherungsvertrags.

Einzelschadenhöhe	Anteil Erstversicherer	Anteil Rückversicherer	nicht versichert sind
1,5 Mio. €	1,5 Mio. €	---	---
2,8 Mio. €	2,0 Mio. €	0,8 Mio. €	---
9,4 Mio. €	2,0 Mio. €	6,0 Mio. €	1,4 Mio. €

In der Praxis werden in der Regel mehrere aufeinander aufbauende Layer, zur Diversifikation des Risikos häufig bei verschiedenen Unternehmen, rück-versichert.

Für einen Stop-Loss-Vertrag gilt in Bezug auf das Formelwerk dasselbe wie für einen XL-Vertrag, außer dass hier der aggregierte Jahresschaden X und kein Ereignisschaden betrachtet wird.

Das Verhältnis aus Rückversicherungsprämie und Haftungsstrecke wird in der Rückversicherungsbranche auch als *Rate on Line* (RoL) bezeichnet.

Die Tarifierung eines solchen Rückversicherungsvertrags erfolgt nach denselben Prinzipien wie bei der Erstversicherung. Bezeichnen wir das Risiko des Erstversicherers wieder mit X und mit a bzw. b die Priorität bzw. den Plafond, trägt der Rückversicherer das Risiko

$$X_{a|b} := \begin{cases} 0, & X \le a \\ X - a, & a < X \le b \\ b - a, & X > b. \end{cases}$$

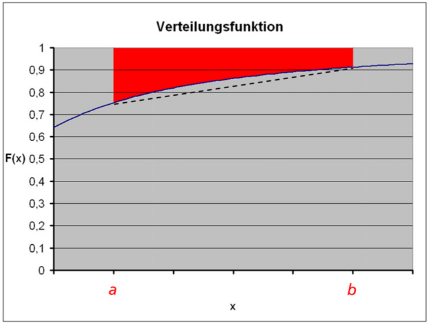
Die Bedarfsprämie des Rückversicherers für einen solchen XL-Vertrag kann aus der Verteilungsfunktion F_X des Risikos X berechnet werden nach der Formel

$$E\left[X_{a|b}\right] = \int_a^b \left(1 - F_X(x)\right) dx.$$

Für $a = 0$ und $b = \infty$ ergibt sich $E\left[X_{a|b}\right] = E[X]$, d.h. in diesem Fall transferiert der Erstversicherer sein Risiko vollständig an den Rückversicherer, so dass Erst- und Rückversicherungs(bedarfs)prämie übereinstimmen.

Eine einfache Abschätzung für die Bedarfsprämie nach oben ist i.A. die Fläche des unten dargestellten gestrichelten Trapezes, wenn die Verteilungsfunktion F des Risikos im Intervall $[a,b]$ konkav (rechtsgekrümmt) ist. Dies ist z.B. der Fall, wenn für die Dichte f gilt: $f'(x) \leq 0$ für $a \leq x \leq b$. Man erhält dann die Ungleichung

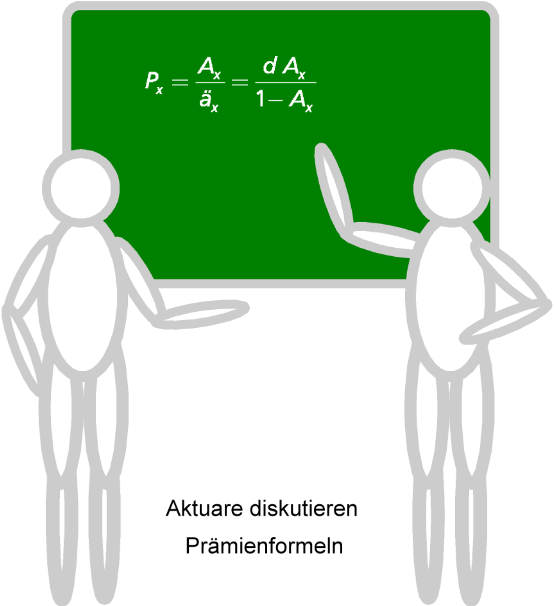
$$E\left[X_{a|b}\right] \leq \left(1 - \frac{F(a)+F(b)}{2}\right) \times (b-a).$$



Beispiel. Eine Gebäudeversicherung mit einem Prämienvolumen von 2,45 Mio. € hat mit ihrem Rückversicherer einen Stop-Loss-Vertrag mit der Priorität 1,8 Mio. € und der Haftungsstrecke 600.000 € abgeschlossen. Der Aktuar der Rückversicherung hat auf der Basis der Daten der Versicherung herausgefunden, dass sich die Schäden durch eine Lognormal-Verteilung mit $E[X] = 2{,}219$ Mio. € und der Streuung $\sqrt{Var[X]} = 222.000$ € beschreiben lassen. Mit diesen Zahlen hat der Aktuar eine Bedarfsprämie für die Rückversicherung von 392.000 € errechnet. Die Rückversicherung stellt der Gebäudeversicherung eine Prämie von 450.000 € für den SL-Vertrag in Rechnung (entsprechend einer RoL von 75 %).

Beispiel. Eine Gebäudeversicherung mit einem Prämienvolumen von 2,45 Mio. € hat mit ihrem Rückversicherer einen Stop-Loss-Vertrag mit der Priorität 1,8 Mio. € und der Haftungsstrecke 600.000 € abgeschlossen. Der Aktuar der Rückversicherung hat auf der Basis der Daten der Versicherung herausgefunden, dass sich die Schäden durch eine Lognormal-Verteilung mit $E[X]=2{,}219$ Mio. € und der Streuung $\sqrt{Var[X]}=222.000$ € beschreiben lassen. Mit diesen Zahlen hat der Aktuar eine Bedarfsprämie für die Rückversicherung von 392.000 € errechnet. Die Rückversicherung stellt der Gebäudeversicherung eine Prämie von 450.000 € für den SL-Vertrag in Rechnung (entsprechend einer RoL von 75 %).

Der Bruttogesamtschaden der Gebäudeversicherung beläuft sich im aktuellen Versicherungsjahr auf 2,193 Mio. €, daher trägt die Gebäudeversicherung 1,8 Mio. € selbst; 393.000 € übernimmt die Rückversicherung. Die Nettoschadenquote der Gebäudeversicherung beläuft sich damit auf 90 %, die Schadenquote der Rückversicherung beträgt 87,33 %.


$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{d\,A_x}{1-A_x}$
Aktuare diskutieren
Prämienformeln