CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Aktien, Derivate, Arbitrage:

Eine Einführung in die moderne Finanzmathematik

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer
Institut für Mathematik
Schwerpunkt Versicherungs- und Finanzmathematik


ORGANIZED UNDER THE MANUFACTURING LAWS OF OHIO.
No.
Shares
STANDARD OIL COMPANY.
CAPITAL STOCK
$3,500,000.
ALL PAID.
35,000 SHARES.
$100 EACH.
This is to Certify that
is entitled to
Shares of One Hundred Dollars each
in the Capital Stock of the Standard Oil Company, transferable on the Books of the Company in person or by Attorney only on the surrender of this Certificate and due payment of all liabilities on the part of the holder to the Company, subject to the provisions of Law and the By Laws of the Company.
This Certificate is valid only when signed by the President and Secretary.
Cleveland O.
187

Amperwerke Elektrizitäts-Aktiengesellschaft
AKTIE
1000 Mark
No. 4868
über
Eintausend Mark :1000: Reichs-Währung
Inhaber dieser mit 1000 Mark, Eintausend Mark, voll einbezahlten Aktie ist an der Amperwerke Elektrizitäts-Aktiengesellschaft als Aktionär beteiligt.
München, 1. Januar 1913.
Amperwerke Elektrizitäts-Aktiengesellschaft
Der Aufsichtsrat:
Der Vorstand:
Bezugsrecht 1922 ausgeübt
II. Bezugsrecht ausgeübt 1923
Bezugsrecht 1917 ausgeübt.
Bezugsrecht 1920 ausgeübt
Bezugsrecht 1921 ausgeübt
Bezugsrecht 1923
Hubert Reichsmark
Versteuert

Aktien, Derivate, Arbitrage

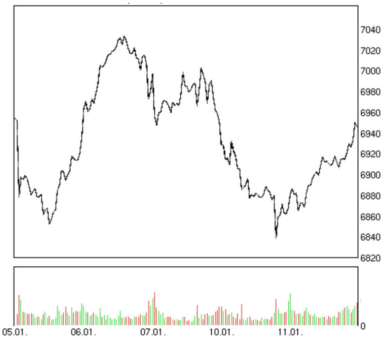
Kursverläufe des DAX:

Tageschart

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

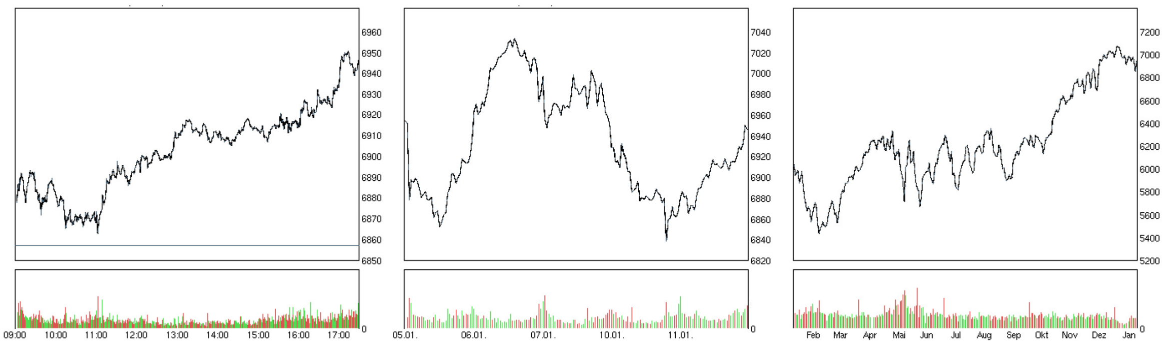
Kursverläufe des DAX:

Tageschart



Wochenchart

Kursverläufe des DAX:



Tageschart | Wochenchart | Jahreschart

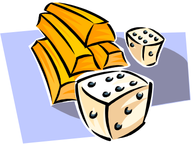
(Selbstähnlichkeit auf allen Zeitskalen!)

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Möglichkeiten, auf schwankende Kurse zu reagieren:

Möglichkeiten, auf schwankende Kurse zu reagieren:

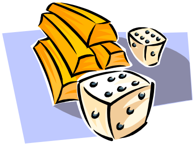
- spekulativ (in der Hoffnung auf schnelle Gewinne)



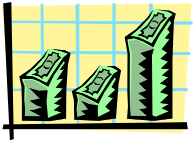
CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Möglichkeiten, auf schwankende Kurse zu reagieren:

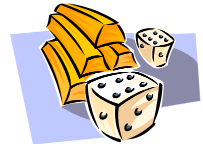
- spekulativ (in der Hoffnung auf schnelle Gewinne)



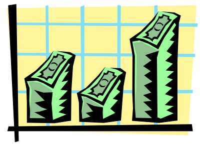
- konservativ (Portfolio-Hedging)



Möglichkeiten, auf schwankende Kurse zu reagieren:



- spekulativ (in der Hoffnung auf schnelle Gewinne)



- konservativ (Portfolio-Hedging)
- verfügbare Finanzinstrumente:

Derivative (Optionen, Futures, ...)

Option:

Option:

Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Gutes zu einem im voraus festgesetzten Preis

Option:

Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Gutes zu einem im voraus festgesetzten Preis

➢ *innerhalb einer bestimmten Frist* (amerikanische Option)

Option:

Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Gutes zu einem im voraus festgesetzten Preis

- *innerhalb einer bestimmten Frist* (amerikanische Option)

  oder

- *zu einem bestimmten Zeitpunkt* (europäische Option)

Option:

Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Gutes zu einem im voraus festgesetzten Preis

- *innerhalb einer bestimmten Frist* (amerikanische Option)

  oder

- *zu einem bestimmten Zeitpunkt* (europäische Option)

  - zu kaufen (Call-Option)

Option:

Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Gutes zu einem im voraus festgesetzten Preis

- *innerhalb einer bestimmten Frist* (amerikanische Option)

  oder

- *zu einem bestimmten Zeitpunkt* (europäische Option)

  - zu kaufen (Call-Option)

    oder

  - zu verkaufen (Put-Option).

Bezeichnungen:

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Bezeichnungen:

T:	Laufzeit; Verfalltag
X:	Ausübungspreis, Basispreis
S_t :	Kurswert zur Zeit t, mit $0 \leq t \leq T$
i:	risikoloser Zins
$r = 1 + i$:	Zinsfaktor
$v = 1/r$:	Diskontfaktor

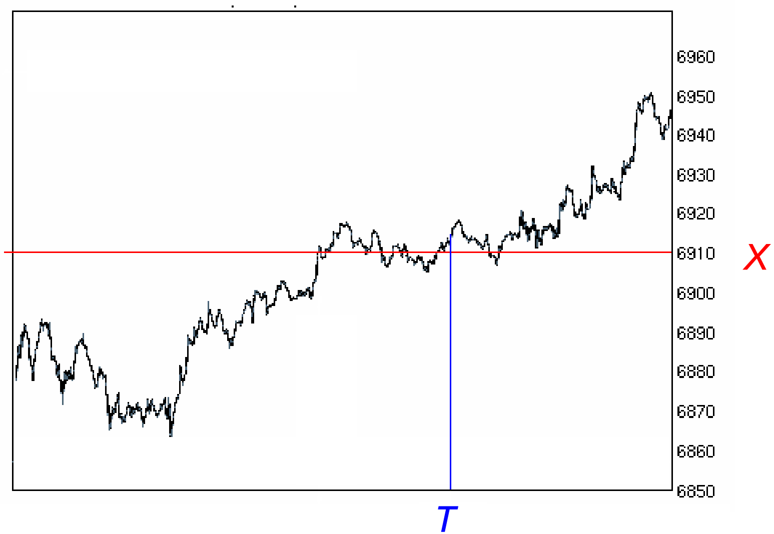
CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Bezeichnungen:

T:	Laufzeit; Verfalltag
X:	Ausübungspreis, Basispreis
S_t :	Kurswert zur Zeit t, mit $0 \leq t \leq T$
i:	risikoloser Zins
$r = 1 + i$:	Zinsfaktor
$v = 1/r$:	Diskontfaktor

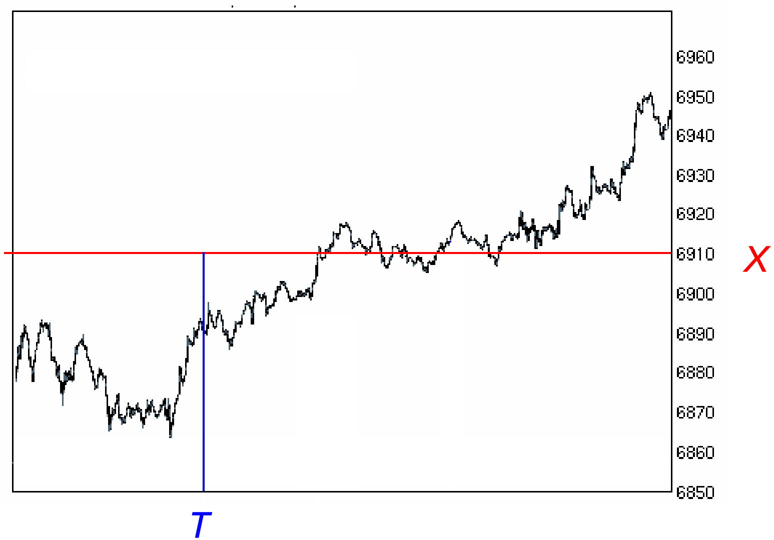
Call-Option:	$S_T > X$:	Option *ausüben*
	$S_T \leq X$:	Option *nicht ausüben*
Put-Option:	$S_T < X$:	Option *ausüben*
	$S_T \geq X$:	Option *nicht ausüben*

Veranschaulichung:



Call-Option *ausüben*, Put-Option *nicht ausüben*

Veranschaulichung:



Put-Option *ausüben*, Call-Option *nicht ausüben*

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Ziel: Bestimmung des „richtigen" Optionswertes

Ziel: Bestimmung des „richtigen“ Optionswertes

z.B. C_t : Wert der Call-Option zur Zeit $t \in [0,T]$

Ziel: Bestimmung des „richtigen" Optionswertes

z.B. C_t : Wert der Call-Option zur Zeit $t \in [0,T]$

Es gilt am Verfalltag $t = T$:

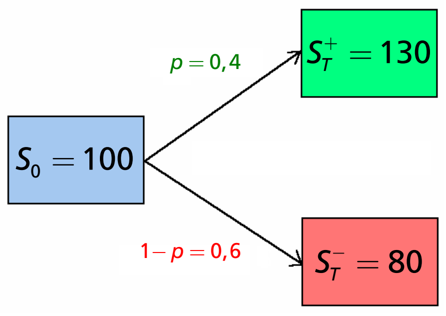
Ziel: Bestimmung des „richtigen“ Optionswertes

z.B. C_t : Wert der Call-Option zur Zeit $t \in [0,T]$

Es gilt am Verfalltag $t = T$:

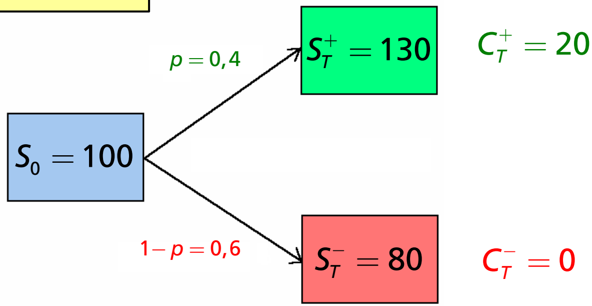
$$\boxed{C_T = \max(S_T - X;0) = (S_T - X)^+}$$

Beispiel:



Beispiel:

$i = 5\% \quad X = 110$



Beispiel:

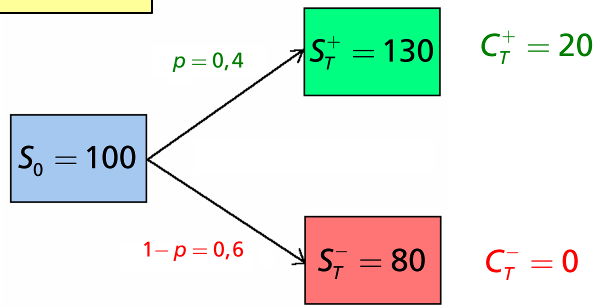
$i = 5\% \quad X = 110$

$$
\begin{tikzcd}
 & S_T^+ = 130 & C_T^+ = 20 \\
S_0 = 100 \arrow[ur, "p = 0{,}4"] \arrow[dr, "1 - p = 0{,}6"'] & & \\
 & S_T^- = 80 & C_T^- = 0
\end{tikzcd}
$$

Callpreis nach Erwartungswert-Prinzip (→ faires Spiel):

$$C_0 = E\left[v \cdot C_T\right]$$

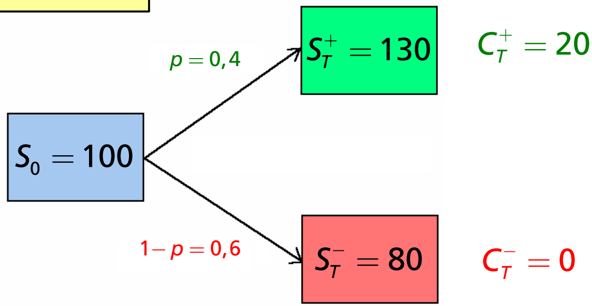
Beispiel: $i = 5\% \quad X = 110$



Callpreis nach Erwartungswert-Prinzip (→ faires Spiel):

$$C_0 = E\left[v \cdot C_T\right] = v \cdot p \cdot C_T^+ = v \cdot p \cdot \left(S_T^+ - X\right)$$

Beispiel: $i = 5\% \quad X = 110$

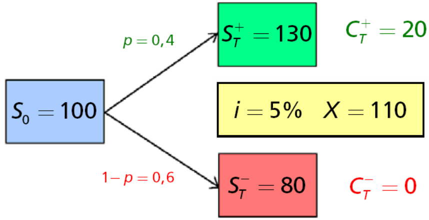


Callpreis nach Erwartungswert-Prinzip (→ faires Spiel):

$$C_0 = E\left[v \cdot C_T\right] = v \cdot p \cdot C_T^+ = v \cdot p \cdot \left(S_T^+ - X\right) = \frac{0{,}4 \cdot 20}{1{,}05} = \underline{\underline{7{,}62}}$$

Analyse:

$C_0 = 7{,}62$

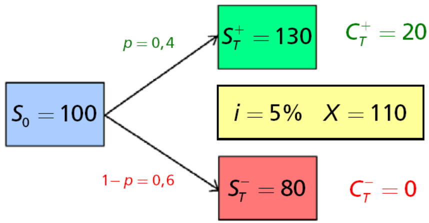


$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Analyse:

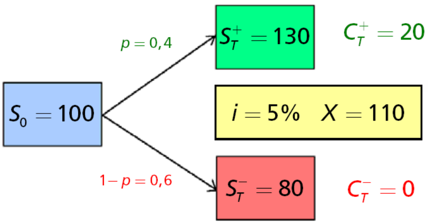
$C_0 = 7{,}62$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Leerverkauf 2 Aktien	+200,00	–260,00	–160,00

Analyse:

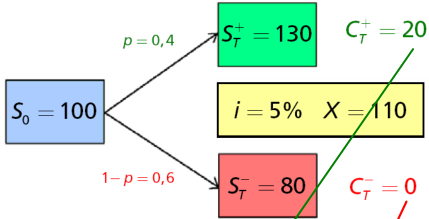
$C_0 = 7{,}62$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Leerverkauf 2 Aktien	+200,00	–260,00	–160,00
Kauf 5 Call-Optionen	–38,10	+100,00	0,00

Analyse:

$C_0 = 7{,}62$

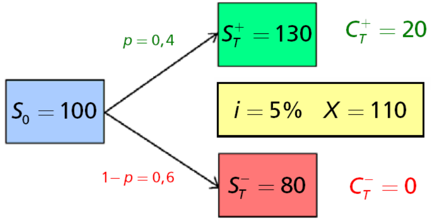


$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Leerverkauf 2 Aktien	+200,00	–260,00	–160,00
Kauf 5 Call-Optionen	–38,10	+100,00	0,00

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Analyse:

$C_0 = 7{,}62$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Leerverkauf 2 Aktien	+200,00	–260,00	–160,00
Kauf 5 Call-Optionen	–38,10	+100,00	0,00
Kredit vergeben	–161,90	+170,00	+170,00
Saldo	0,00	+10,00	+10,00

Analyse:

$C_0 = 7{,}62$

$S_0 = 100$

$p = 0{,}4$

$S_T^+ = 130$ $\quad C_T^+ = 20$

$i = 5\% \quad X = 110$

$1 - p = 0{,}6$

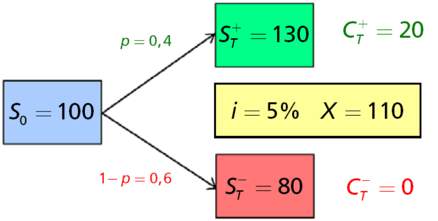
$S_T^- = 80$ $\quad C_T^- = 0$

Arbitrage-Möglichkeit!

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kredit vergeben	–161,90	+170,00	+170,00
Saldo	0,00	+10,00	+10,00

Analyse:

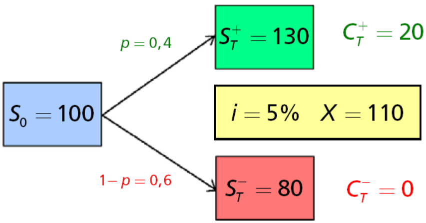
höherer Preis $C_0 = 12$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$

Analyse:

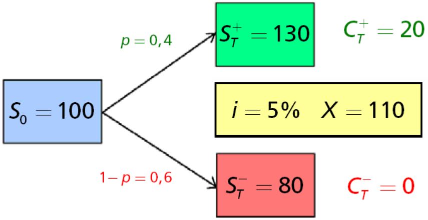
höherer Preis $C_0 = 12$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf 2 Aktien	–200,00	+260,00	+160,00

Analyse:

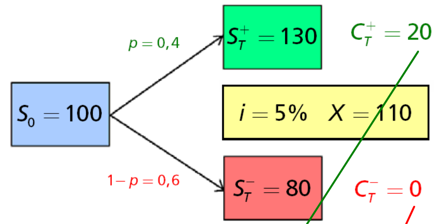
höherer Preis $C_0 = 12$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf 2 Aktien	–200,00	+260,00	+160,00
Verkauf 5 Call-Optionen	+60,00	–100,00	0,00

Analyse:

höherer Preis $C_0 = 12$

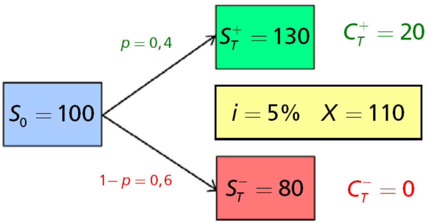


$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf 2 Aktien	–200,00	+260,00	+160,00
Verkauf 5 Call-Optionen	+60,00	–100,00	0,00

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Analyse:

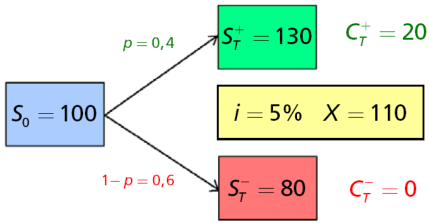
höherer Preis $C_0 = 12$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf 2 Aktien	–200,00	+260,00	+160,00
Verkauf 5 Call-Optionen	+60,00	–100,00	0,00
Kredit aufnehmen	+140,00	–147,00	–147,00
Saldo	0,00	+13,00	+13,00

Analyse:

höherer Preis $C_0 = 12$



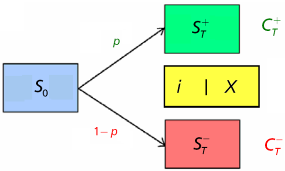
$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kredit aufnehmen	+140,00	−147,00	−147,00
Saldo	0,00	+13,00	+13,00

Arbitrage-Möglichkeit!

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Analyse:

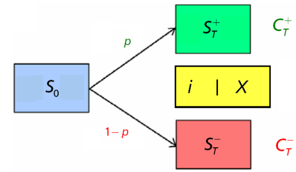
richtiger Preis $C_0 = ?$



$t=0$		$t=T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf n Aktien	$-n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$

Analyse:

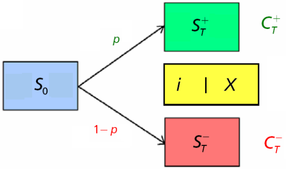
richtiger Preis $C_0 = ?$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf n Aktien Verkauf m Call-Optionen	$-n \cdot S_0$ $+m \cdot C_0$	$+n \cdot S_T^+$ $-m \cdot (S_T^+ - X)$	$+n \cdot S_T^-$ 0,00

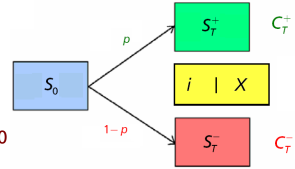
Analyse:

richtiger Preis $C_0 = ?$



$t=0$		$t=T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf n Aktien	$-n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Verkauf m Call-Optionen	$+m \cdot C_0$	$-m \cdot (S_T^+ - X)$	0,00
Kredit aufnehmen	$+(n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

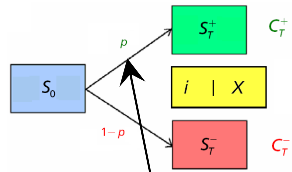
Analyse: richtiger Preis C_0



$t=0$		$t=T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf n Aktien	$-n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Verkauf m Call-Optionen	$+m \cdot C_0$	$-m \cdot (S_T^+ - X)$	0,00
Kredit aufnehmen	$+(n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

Notwendige Bedingung: $n \cdot S_T^- = n \cdot S_T^+ - m \cdot (S_T^+ - X)$

$\Rightarrow$ Hedge Ratio $\boxed{h_{Call} = \frac{n}{m} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-}}$ und $\boxed{C_0 = h_{Call} \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-)}$



Analyse:

richtiger Preis $C_0 = ?$

$t=0$		$t=T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf *n* Aktien	$n \cdot S$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Kredit aufnehmen	$+(n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

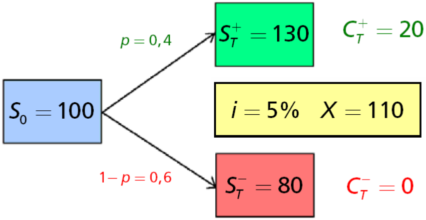
Lösung ist unabhängig von *p*!

Notwendige Bedingung: $n \cdot S_T^- = n \cdot S_T^+ - m \cdot (S_T^+ - X)$

$\Rightarrow$ Hedge Ratio $\boxed{h_{Call} = \frac{n}{m} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-}}$ und $\boxed{C_0 = h_{Call} \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-)}$

Probe:

$C_0 = 9{,}52$



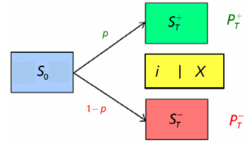
$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf 2 Aktien	–200,00	+260,00	+160,00
Verkauf 5 Call-Optionen	+47,60	–100,00	0,00
Kredit aufnehmen	–152,40	–160,00	–160,00
Saldo	0,00	0,00	0,00

$$h_{Call} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} = \frac{20}{50}$$

$$C_0 = h_{Call} \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-) = \frac{2}{5} \cdot \frac{105 - 80}{1{,}05} = 9{,}52$$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Analyse für Put-Preis: richtiger Preis $P_0 = ?$

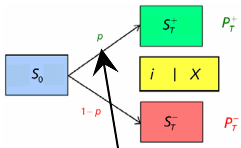


$t=0$		$t=T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf n Aktien	$-n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Kauf m Put-Optionen	$-m \cdot P_0$	0,00	$+m \cdot (X - S_T^-)$
Kredit aufnehmen	$+(n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

Notwendige Bedingung: $n \cdot S_T^+ = n \cdot S_T^- + m \cdot (X - S_T^-)$

$\Rightarrow$ Hedge Ratio $\boxed{h_{Put} = \dfrac{n}{m} = \dfrac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-}}$ und $\boxed{P_0 = h_{Put} \cdot (v \cdot S_T^+ - S_0)}$

Analyse für Put-Preis: richtiger Preis $P_0 = ?$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kredit aufnehmen	$+(n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

Lösung ist unabhängig von p!

Notwendige Bedingung: $n \cdot S_T^+ = n \cdot S_T^- + m \cdot (X - S_T^-)$

$\Rightarrow$ Hedge Ratio $\boxed{h_{Put} = \dfrac{n}{m} = \dfrac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-}}$ und $\boxed{P_0 = h_{Put} \cdot (v \cdot S_T^+ - S_0)}$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Beobachtung:

Beobachtung:

➢ *Für die Hedge Ratios gilt:*

$$\boxed{h_{Call} + h_{Put} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} + \frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = 1}$$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Beobachtung:

- *Für die Hedge Ratios gilt:* $$\boxed{h_{Call} + h_{Put} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} + \frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = 1}$$

- *Optionspreise sind genau dann positiv, wenn* $\boxed{S_T^- < rS_0 < S_T^+}$ *gilt, d.h. wenn positive Kursbewegungen potenziell mehr Gewinn erzielen als die risikolose Geldanlage*

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Beobachtung:

- *Für die Hedge Ratios gilt:* $$h_{Call} + h_{Put} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} + \frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = 1$$
- *Optionspreise sind genau dann positiv, wenn* $S_T^- < rS_0 < S_T^+$ *gilt, d.h. wenn positive Kursbewegungen potenziell mehr Gewinn erzielen als die risikolose Geldanlage*
- *Bei Arbitrage-freien (fairen) Optionspreisen ist durch keine mengenmäßige Kombination von Derivaten eine Arbitragemöglichkeit gegeben*

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Beobachtung:

- *Für die Hedge Ratios gilt:* $$\boxed{h_{Call} + h_{Put} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} + \frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = 1}$$

- *Optionspreise sind genau dann positiv, wenn* $\boxed{S_T^- < rS_0 < S_T^+}$ *gilt, d.h. wenn positive Kursbewegungen potenziell mehr Gewinn erzielen als die risikolose Geldanlage*

- *Bei Arbitrage-freien (fairen) Optionspreisen ist durch keine mengenmäßige Kombination von Derivaten eine Arbitragemöglichkeit gegeben*

- *Die Arbitrage-freien (fairen) Optionspreise hängen nicht von p ab!*

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Aber:

„Äquivalentes" Erwartungswertprinzip: *Im Fall von* $S_T^- < rS_0 < S_T^+$ *gilt*

$$\boxed{0 < p^* = \frac{r\,S_0 - S_T^{\,-}}{S_T^{\,+} - S_T^{\,-}} = 1 - q^* < 1}$$

carl von ossietzky universität OLDENBURG

Aber:

„Äquivalentes" Erwartungswertprinzip: Im Fall von $S_T^- < rS_0 < S_T^+$ *gilt*

$$\boxed{0 < p^* = \frac{r\,S_0 - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = 1 - q^* < 1}$$

mit

$$C_0 = h_{Call} \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-) = E^*\left[v \cdot C_T\right] = v \cdot p^* \cdot C_T^+$$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Aber:

„Äquivalentes" Erwartungswertprinzip: Im Fall von $S_T^- < rS_0 < S_T^+$ *gilt*

$$\boxed{0 < p^* = \frac{r\,S_0 - S_T^{\;-}}{S_T^{\;+} - S_T^{\;-}} = 1 - q^* < 1}$$

mit

$$C_0 = h_{Call} \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-) = E^*\left[v \cdot C_T\right] = v \cdot p^* \cdot C_T^+$$

$$P_0 = h_{Put} \cdot (v \cdot S_T^+ - S_0) = E^*\left[v \cdot P_T\right] = v \cdot q^* \cdot P_T^-$$

Aber:

„Äquivalentes" Erwartungswertprinzip: Im Fall von $S_T^- < rS_0 < S_T^+$ *gilt*

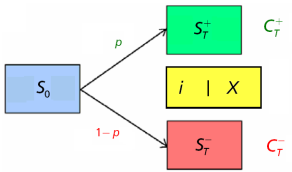
$$\boxed{0 < p^* = \frac{r\,S_0 - S_T^{\;-}}{S_T^{\;+} - S_T^{\;-}} = 1 - q^* < 1}$$

mit dem Arbitrage-freien Preis

$$D_0 = E^*\left[v \cdot D_T\right] = v \cdot \left(p^* \cdot D_T^+ + q^* \cdot D_T^-\right)$$

für jedes beliebige Derivat D!

Hedging mit Call-Optionen:

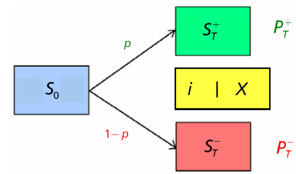


$t=0$		$t=T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Besitz n Aktien	$+n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Verkauf m Call-Optionen	$+m \cdot C_0$	$-m \cdot (S_T^+ - X)$	0,00
Kredit vergeben	$-m \cdot C_0$	$+r \cdot m \cdot C_0$	$+r \cdot m \cdot C_0$
Saldo	$+n \cdot S_0$	$+r \cdot n \cdot S_0$	$+r \cdot n \cdot S_0$

mit der Hedge Ratio $h_{Call} = n / m = \left(S_T^+ - X\right) / \left(S_T^+ - S_T^-\right)$ wegen

$$n \cdot S_T^- + r \cdot m \cdot C_0 = n \cdot S_T^- + m \cdot h_{Call} \cdot \left(rS_0 - S_T^-\right) = n \cdot S_T^- + n \cdot \left(rS_0 - S_T^-\right) = r \cdot n \cdot S_0$$

Hedging mit Put-Optionen:



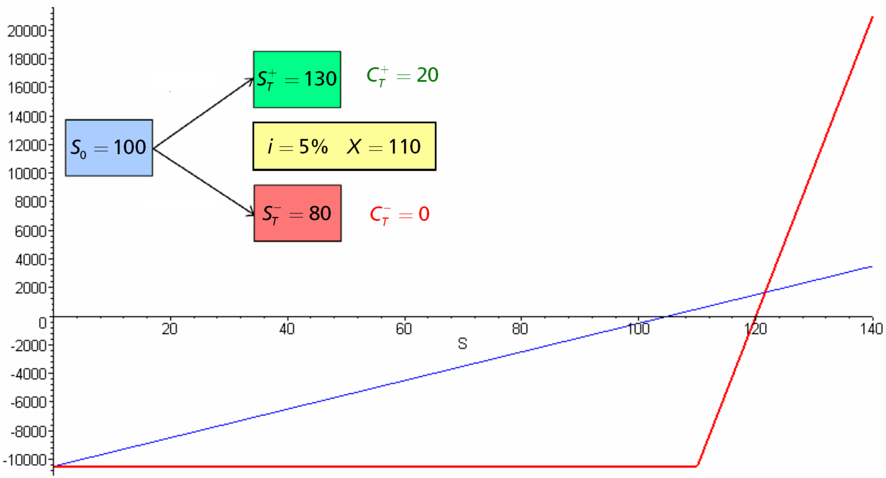
$t=0$		$t=T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Besitz n Aktien	$+n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Kauf m Put-Optionen	$-m \cdot P_0$	0,00	$+m \cdot (X - S_T^-)$
Kredit aufnehmen	$+m \cdot P_0$	$-r \cdot m \cdot P_0$	$-r \cdot m \cdot P_0$
Saldo	$+n \cdot S_0$	$+r \cdot n \cdot S_0$	$+r \cdot n \cdot S_0$

mit der Hedge Ratio $h_{Put} = n / m = \left(X - S_T^+\right) / \left(S_T^+ - S_T^-\right)$ wegen

$$n \cdot S_T^+ - r \cdot m \cdot P_0 = n \cdot S_T^+ - m \cdot h_{Put} \cdot \left(S_T^+ - rS_0\right) = n \cdot S_T^+ - n \cdot \left(S_T^+ - rS_0\right) = r \cdot n \cdot S_0$$

Hebelwirkung von Optionsgeschäften:

Gewinn aus Call-Optionen und Aktien als Funktion des Kurses bei Kapitaleinsatz 10.000 €

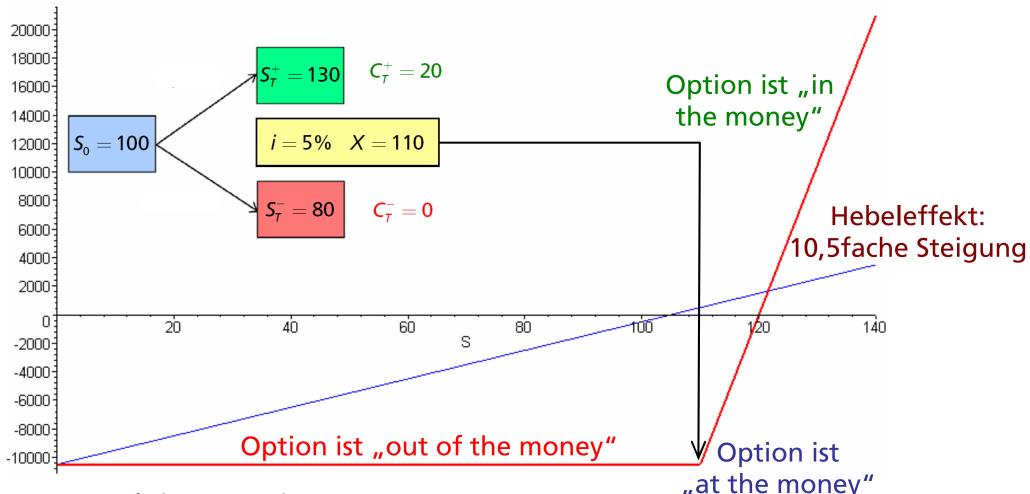


100 Aktien zu je 100 €

1050 Optionen zu je 9,52 €

Hebelwirkung von Optionsgeschäften:

Gewinn aus Call-Optionen und Aktien als Funktion des Kurses bei Kapitaleinsatz 10.000 €

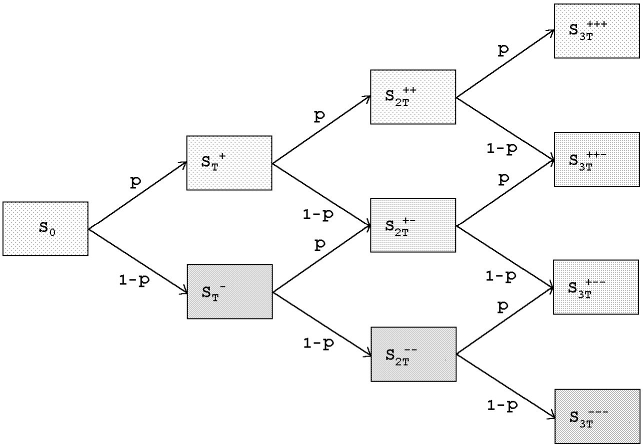


100 Aktien zu je 100 €

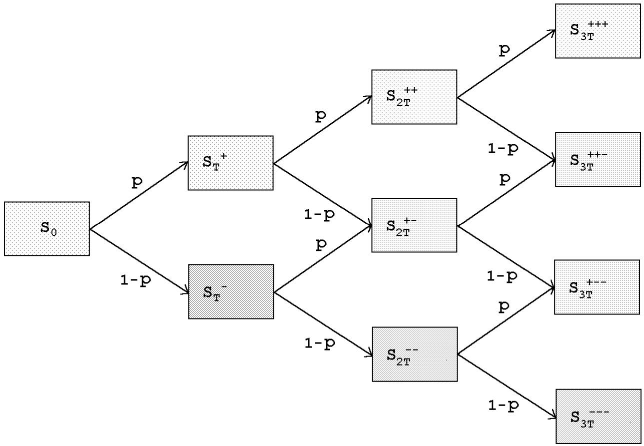
1050 Optionen zu je 9,52 €

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Mehr-Perioden-Modell von Cox-Ross-Rubinstein:



Mehr- Perioden -Modell von Cox-Ross-Rubinstein:

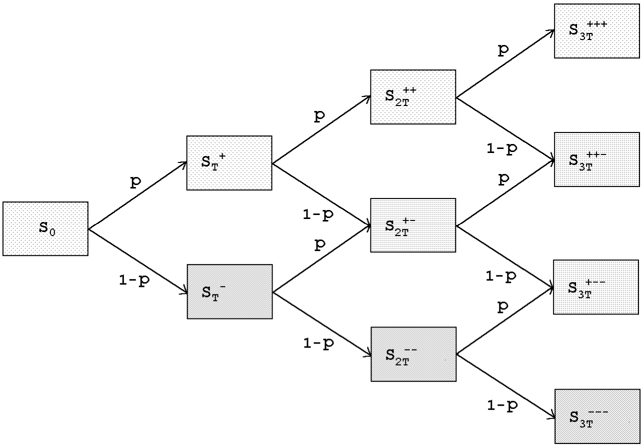


Annahmen:

konstante Kursverhältnisse:

$$k^{\pm} = \frac{S_T^{\pm}}{S_0} - 1 \quad \text{(Volatilitäten)}$$

Mehr- Perioden -Modell von Cox-Ross-Rubinstein:



Annahmen:

konstante Kursverhältnisse:

$$k^{\pm} = \frac{S_T^{\pm}}{S_0} - 1 \quad \text{(Volatilitäten)}$$

stochastisch unabhängige Auf-/ Abwärtsbewegungen:

$$S_{nT} = \left(1 + k^+\right)^N \cdot \left(1 + k^-\right)^{n-N} \cdot S_0$$

$$\boxed{P(N = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}, \quad j = 0, \dots, n.}$$

Arbitrage-freie Berechnung von Optionspreisen:

$$C_0 = E^*(v^n C_{nT}) = v^n E^*(S_{nT} - X)^+$$

$$= v^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^{*\,j} q^{*\,n-j} [S_0(1+k^+)^j(1+k^-)^{n-j} - X]^+$$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Arbitrage-freie Berechnung von Optionspreisen:

$$C_0 = E^*(v^n C_{nT}) = v^n E^*(S_{nT} - X)^+$$

$$= v^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^{*j} q^{*\,n-j} [S_0 (1+k^+)^j (1+k^-)^{n-j} - X]^+$$

mit

$$p^* = \frac{rS_0 - (1+k^-)S_0}{(1+k^+)S_0 - (1+k^-)S_0} = \frac{i_T - k^-}{k^+ - k^-}$$

und $i_T = (1+i)^T - 1$ **(Zins für Periodenlänge *T*)**

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Die Formel von Black und Scholes:

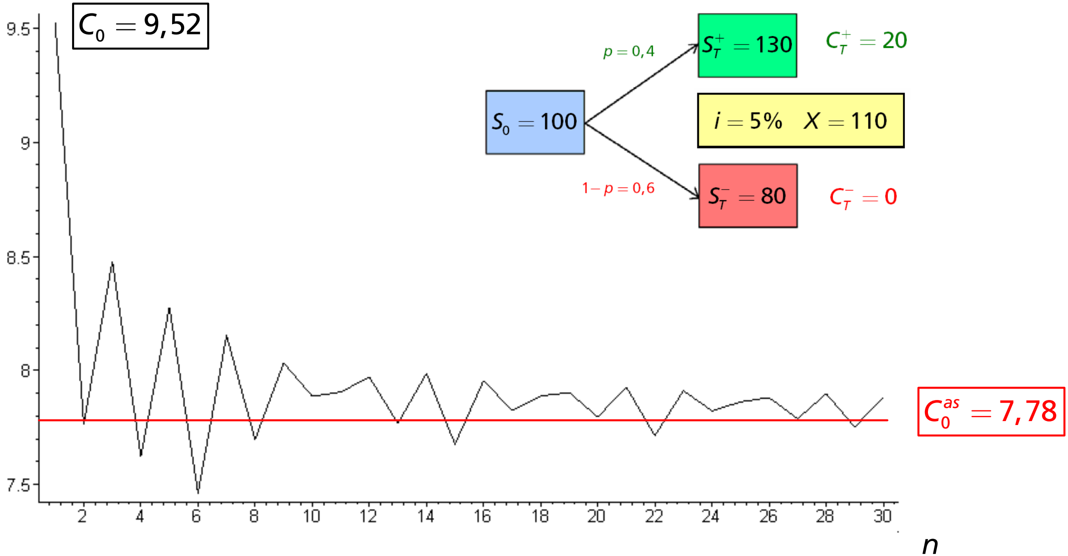
- Grenzfall für wachsende n mit angepassten Volatilitäten:

$$k_n^+ = \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}, \quad k_n^- = -\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$$

- Approximation der Binomial- durch die Normalverteilung:

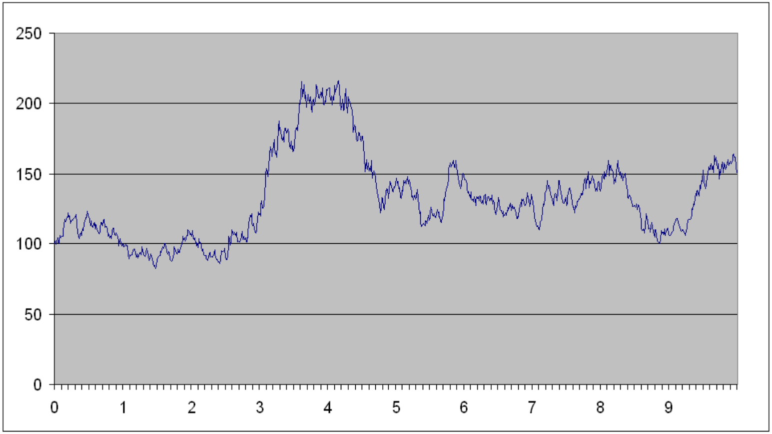
$$C_0^{as} = S_0\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{r^T S_0}{X}\right) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - v^T X\,\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{r^T S_0}{X}\right) - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Die Formel von Black und Scholes:



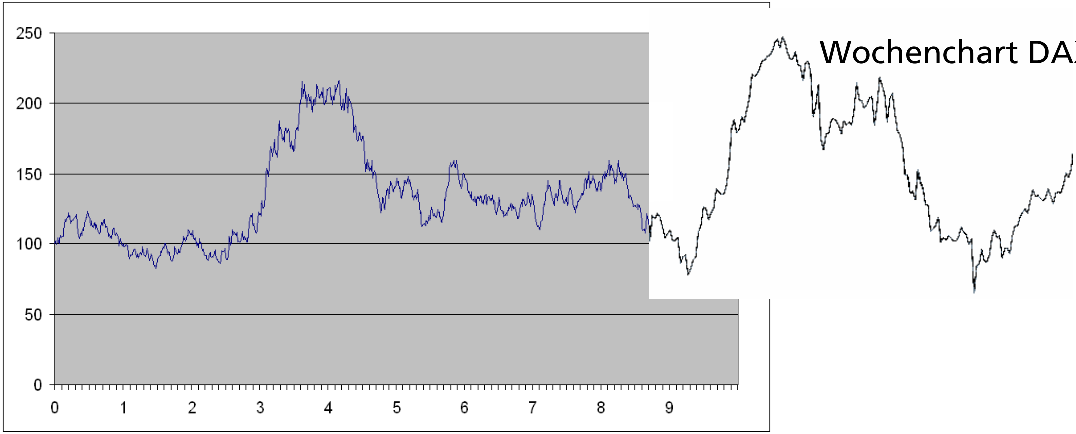
Simulation des Grenzprozesses

(geometrische Brownsche Bewegung)



Simulation des Grenzprozesses

(geometrische Brownsche Bewegung)



Solche Funktionen sind überall stetig, aber nirgends differenzierbar!

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Exkurs: Stochastische Integration

Die (Standard-)Brown'sche Bewegung $\{B_t\}_{t\geq 0}$ ist auch Grundlage zahlreicher *stochastischer Differenzialgleichungen*, die (rein) formal so aussehen:

$$\boxed{dX_t = \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t}$$

mit geeigneten (in der Regel stetigen) Funktionen $\mu, \sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($\sigma \geq 0$) und bekanntem Anfangswert $X_0 \in \mathbb{R}$. Es handelt sich hier eigentlich um eine (Itô-)Integralgleichung der Art

$$\boxed{X_t = \int_0^t \mu(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dB_s.}$$

Exkurs: Stochastische Integration

Dazu zunächst eine heuristische Erklärung des „Differenzial"-Terms dB_t :
Für stetige Funktionen σ und $X_\bullet$ gilt approximativ:

$$\int_t^{t+h} \sigma(s,X_s)\,dB_s \approx \sigma(t,X_t)\cdot(B_{t+h}-B_t) = \sigma(t,X_t)\cdot\sqrt{h}\cdot Z \quad \text{für kleine } h>0,$$

wobei Z eine standard-normalverteilte Zufallsgröße ist.

Hieraus folgt: Im Gegensatz zur „klassischen" Theorie existiert *kein* „Grenz-wert"

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\sigma(s,X_s)\,dB_s \sim \lim_{h\to 0}\frac{\sigma(t,X_t)\cdot Z}{\sqrt{h}}$$

Exkurs: Stochastische Integration

Approximative Monte-Carlo Simulation:

- Zerlege das Zeitintervall $[0,T]$ in n äquidistante Teilintervalle mit den Stützpunkten $t_k = k\Delta$ mit $\Delta = \frac{T}{n}$, $k = 0,\cdots n$ und konstruiere rekursiv

$$\boxed{X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = \Delta \cdot \mu\left(t_k, X_{t_k}\right) + \sqrt{\Delta} \cdot \sigma\left(t_k, X_{t_k}\right) Z_{k+1}, \ k = 0,1,\cdots,n-1}$$

mit stochastisch unabhängigen standard-normalverteilten Zufallsvariablen $Z_1,\cdots,Z_n$.

- Plotte die Paare $(0, X_0)$ (Anfangswert) und $(k\Delta, X_{k\Delta})$ für $k = 1,2,\cdots,n$.

Exkurs: Stochastische Integration

Eine spezielle stochastische Differenzialgleichung ist

$$\boxed{dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dB_t}$$

mit Konstanten $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ (*Trend* und *Volatilität*).

Die Lösung mit dem Itô-Integral lautet hier, abweichend von der Intuition:

$$\boxed{X_t = X_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right), \; t \geq 0.}$$

Dieser stochastische Prozess heißt wegen des auftretenden Exponentialterms *geometrische Brown'sche Bewegung* ($\rightarrow$ Black-Scholes-Modell).

Exkurs: Stochastische Integration

Eine spezielle stochastische Differenzialgleichung ist

$$dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dB_t$$

mit Konstanten $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ (*Trend* und *Volatilität*).

Für $\sigma = 0$ ergibt sich – wie erwartet – das gewöhnliche exponentielle Wachstumsmodell:

$$X_t = X_0 \cdot \exp(\mu t),\ t \geq 0.$$

Ausblick:

- Preisfindung für
  - nicht-arbitragefreie (unvollständige) Märkte
  - allgemeinere Finanzprodukte (z.B. FOREX, CDO's, CFD's)
  - Derivate an Warenterminbörsen
  - Derivate an Energiebörsen
  - Realoptionen
- Modellierung von Zinsstrukturkurven
- Asset-Liability-Management

Aktien, Derivate, Arbitrage:

Eine Einführung in die moderne Finanzmathematik

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer
Institut für Mathematik
Schwerpunkt Versicherungs- und Finanzmathematik