



DGVFM

DEUTSCHE GESELLSCHAFT
FÜR VERSICHERUNGS-UND
FINANZMATHEMATIK e.V.

Neue Entwicklungen bei der Modellierung von Abhängigkeiten zwischen Risiken

Dietmar Pfeifer, Universität Oldenburg

Zweiter Weiterbildungstag der DGVFM zum Thema
Risikoaggregation und -allokation

21. Mai 2015

VGH Versicherungen
Schiffgraben 4
30159 Hannover

- überarbeitete Fassung -



Teil I: Theoretische Grundlagen

Stochastische Abhängigkeiten entstehen im Versicherungsgeschäft z.B.

- zwischen ähnlichen Sparten (z.B. Hausrat- und Gebäudeversicherung),
- aufgrund räumlicher Kohärenz (z.B. bei großräumigen Stürmen oder Erdbeben)
- aufgrund gemeinsamer klimatischer Trigger (z.B. in der Gebäudeversicherung bei Sturm- und Hochwasserschäden)
- bei bestimmten Marktrisiken (z.B. Aktienkurse ähnlicher Wirtschaftssektoren).

Beschreibung von Abhängigkeiten:

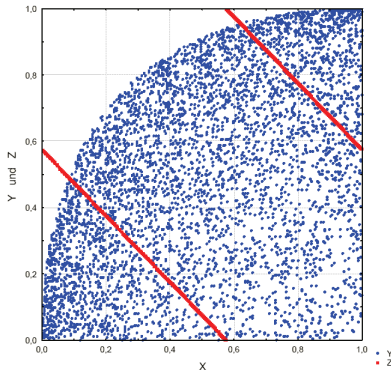
- Korrelationen (?)
- Copulas (!)

Beispiel:

Zufallsvariablen X , Y und Z mit *identischen* (uniformen) Randverteilungen und *gleichen* (linearen) Korrelationen

$$\rho^L(X, Y) = \rho^L(X, Z) = 7/15$$

aber *verschiedener* gemeinsamer Verteilungsstruktur.



Eine *Copula* ist eine Funktion C von d Variablen auf dem Würfel $[0,1]^d$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Der Wertebereich von C ist das Einheitsintervall $[0,1]$;
2. $C(\mathbf{u}) = 0$ für alle \mathbf{u} in $[0,1]^d$, für die mindestens eine Komponente 0 ist;
3. $C(\mathbf{u}) = u_k$ falls alle Koordinaten von \mathbf{u} gleich 1 sind außer der k -ten;
4. C ist Δ -monoton in dem Sinne, dass für alle $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ in $[0,1]^d$ das Maß $\Delta C_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$, das C dem Intervall $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ beimisst, nicht-negativ ist, d.h.

$$\Delta C_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} := \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{0,1\}^d} (-1)^{\sum_{i=1}^d \varepsilon_i} C(\varepsilon_1 a_1 + (1 - \varepsilon_1) b_1, \dots, \varepsilon_d a_d + (1 - \varepsilon_d) b_d) \geq 0.$$

In anderen Worten: Eine Copula C ist die Verteilungsfunktion eines d -dimensionalen Zufallsvektors mit uniformen Randverteilungen.

Sklar's Theorem: Es sei H eine n -dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n . Dann existiert eine n -Copula C , so dass

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \text{ für alle } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Wenn alle Randverteilungsfunktionen stetig sind, ist die Copula eindeutig bestimmt, anderenfalls ist sie nur eindeutig auf den Wertebereichen der F_1, \dots, F_n bestimmt. Umgekehrt gilt bei Stetigkeit: bezeichnen $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ die (Pseudo-)Inversen der Randverteilungsfunktionen, dann ist

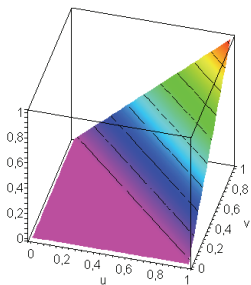
$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \text{ für } u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$$

eine Repräsentation der Copula.

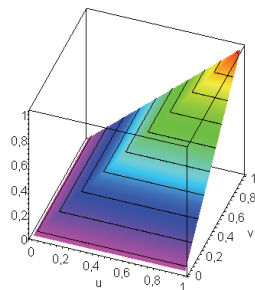
[Pseudo – Inverse einer Verteilungsfunktion F : $F^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}$]

Fréchet-Hoeffding-Schranken:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n u_i + 1 - n, 0 \right\} =: \mathcal{W}^n(\mathbf{u}) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq \mathcal{M}^n(\mathbf{u}) := \min \{u_1, \dots, u_n\},$$



keine Copula für $n > 2$
Repräsentanten: $(X, 1 - X)$



stets Copula
 (X, X, \dots, X)

Vorteile des Copula-Ansatzes:

- Die Copula hängt nicht von den Randverteilungen der Einzelrisiken ab.
- Die Copula charakterisiert bei Stetigkeit der Randverteilungen die gemeinsame Abhängigkeitsstruktur der Einzelrisiken eindeutig.
- Die Copula ist invariant gegen alle gleichsinnig monotonen Transformationen der Einzelrisiken, insbesondere nichtlineare.
- Paarweise Korrelationen zwischen den Einzelrisiken können über die Copula ausgedrückt werden, aber nicht umgekehrt.
- Stochastische Mischungen von Copulas sind wieder Copulas.

Man kann grob drei Typen von Copulas unterscheiden:

1. Copulas, die nur implizit angegeben, aber explizit stochastisch konstruiert werden können und damit auch einfach simulierbar sind (dazu gehören die Gauß-, t - und allgemeiner die elliptischen Copulas)
2. Copulas, die explizit angegeben werden können, aber nur aufwändig stochastisch konstruierbar sind (dazu gehören in der Regel die so genannten Archimedischen Copulas)
3. Copulas, die explizit angegeben werden **und** explizit stochastisch konstruiert werden können (z.B. Zerlegung-der-Eins-Copulas).

Beispiele für Copulas vom Typ 1 ($\Sigma =$ positiv-definite symmetrische Matrix):

Gauß-Copula C_{Σ}^G :

$$C_{\Sigma}^G(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{v}^{\text{tr}} \Sigma^{-1} \mathbf{v}\right) dv_1 \dots dv_n$$

t -Copula $C_{\Sigma}^{t_{\nu}}$ mit $\nu \in \mathbb{N}$ Freiheitsgraden:

$$C_{\Sigma}^{t_{\nu}}(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_n)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{(\pi\nu)^n \det(\Sigma)}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{v}^{\text{tr}} \Sigma^{-1} \mathbf{v}\right)^{\left(-\frac{\nu+n}{2}\right)} dv_1 \dots dv_n$$

Gauß-Copula: Wir betrachten zunächst den Fall, dass die zugehörigen Randverteilungen des Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^{tr}$ sämtlich Normalverteilungen sind (ansonsten arbeitet man mit dem Satz von Sklar). In diesem Fall genügt \mathbf{X} einer multivariaten Normalverteilung $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ mit Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ und nicht-negativ-definiten Varianz-Kovarianz-Matrix Σ . Unter Verwendung der linearen Struktur normalverteilter Zufallsvektoren bietet sich dann folgendes Konstruktionsverfahren an:

- Zerlege die vorgegebene Matrix Σ in ein Matrixprodukt $\Sigma = AA^{tr}$, z.B. mittels *Spektralzerlegung* [über Eigenwerte und Eigenvektoren] oder mittels der *Cholesky-Zerlegung*.
- Ist \mathbf{Z} ein Zufallsvektor aus n unabhängigen standard-normalverteilten Komponenten Z_1, \dots, Z_n , dann kann \mathbf{X} dargestellt werden als $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ}$.

Bei der *Spektralzerlegung* kann man Σ darstellen als

$$\Sigma = T\Delta T^{-1} = T\Delta T^{tr}$$

mit der Diagonalmatrix $\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ der (nicht-negativen) Eigenwerte

von Σ und einer Orthonormalmatrix T aus den zugehörigen Eigenvektoren.

Die benötigte Transformationsmatrix A ergibt sich dann zu

$$A = T\Delta^{1/2} \quad \text{mit} \quad \Delta^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Dieses Verfahren ist auch als *symmetrische Quadratwurzelzerlegung* von Σ bekannt.

Beispiel: Für $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ erhält man mit der Einheitsmatrix I das charakteristische Polynom

$$\varphi(\lambda) = \det(\Sigma - \lambda I) = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 11\lambda + 1$$

mit den drei Nullstellen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 5 \pm 2\sqrt{6}$$

und der zugehörigen Orthonormalmatrix

$$T = \begin{bmatrix} -0,7071 & 0,6739 & -0,2142 \\ 0 & 0,3029 & 0,9530 \\ 0,7071 & 0,6739 & -0,2142 \end{bmatrix}.$$

Hiermit ergibt sich

$$A = T\Delta^{1/2} = \begin{bmatrix} -0,7071 & 2,1202 & -0,0681 \\ 0 & 0,9530 & 0,3029 \\ 0,7072 & 2,1202 & -0,0681 \end{bmatrix}.$$

Die Spektralzerlegung ist insbesondere in höheren Dimensionen sehr aufwändig.

Demgegenüber ist die Methode der *Cholesky-Zerlegung*, die rekursiv arbeitet, effizienter. Die gesuchte Matrix A wird dabei als *untere Dreiecksmatrix* angenommen:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Hiermit ergibt sich

$$\Sigma = [\sigma_{ij}] = \mathbf{A}\mathbf{A}^{tr} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{21} & \cdots & a_{11}a_{n1} \\ a_{21}a_{11} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & \cdots & a_{21}a_{n1} + a_{22}a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}a_{11} & a_{n1}a_{21} + a_{n2}a_{22} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk}^2 \end{bmatrix}.$$

Diese Gleichung kann rekursiv aufgelöst werden zu

$$a_{11} = \sqrt{\sigma_{11}}, \quad a_{kk} = \sqrt{\sigma_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki}^2}, \quad a_{k1} = \frac{\sigma_{k1}}{a_{11}}, \quad a_{kj} = \frac{\sigma_{kj} - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ki}a_{ji}}{a_{jj}}, \quad 1 \leq k, j \leq n.$$

Für das obige Beispiel $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ergibt dies

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{4}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,2361 & 0 & 0 \\ 0,8944 & 0,4472 & 0 \\ 1,7889 & 0,8944 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bemerkung: Die Gleichung $\Sigma = AA^{tr}$ kann im Allgemeinen noch weitere

Lösungen besitzen, hier z.B. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Für die Dimension 2 lassen sich abhängige standard-normalverteilte Zufallsvektoren \mathbf{X} direkt auch folgendermaßen erzeugen:

$$X_1 := \sqrt{-2\ln(U)} \cdot \cos(2\pi V)$$

$$X_2 := \sqrt{-2\ln(U)} \cdot \cos(2\pi V + \alpha),$$

wobei U und V über $[0,1]$ stetig gleichverteilt, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen sind und $\alpha \in [0,2\pi]$ ein beliebiger Winkel ist. Es folgt dann nämlich mit $R := \sqrt{-\ln(U)}$ (R^2 ist $\mathcal{E}(1)$ -exponentialverteilt):

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(R^2) \int_0^1 \cos(2\pi v) \cdot \cos(2\pi v + \alpha) dv = \frac{E(R^2)}{2} \cos(\alpha) = \cos(\alpha)$$

mit $\text{Korr}(X_1, X_2) = \cos(\alpha) \in [-1,1]$.

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist $\cos(2\pi V + \alpha) = \sin(2\pi V)$, d.h. X_1, X_2 sind dann unkorreliert (Box-Muller-Transformation).

Die Gauß-Copula kommt natürlicherweise bei der Brown'schen Bewegung (Aktienmärkte, Zinsstrukturkurven) vor. Die oben vorgestellten Methoden können damit insbesondere zur alternativen Simulation der Brown'schen Bewegung zu diskreten Zeitpunkten verwendet werden.

t-Copula: Durch eine so genannte *Varianz-Mischung* erhält man aus der multivariaten Normalverteilung $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ eine *multivariate t-Verteilung* $t_\nu(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ mit ν Freiheitsgraden. Zur Simulation eines entsprechenden Zufallsvektors \mathbf{X} erzeugt man einen $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ -verteilten Zufallsvektor \mathbf{Z} sowie unabhängig davon eine χ_ν^2 -verteilte Zufallsvariable W und setzt

$$\mathbf{X} := \boldsymbol{\mu} + \sqrt{\frac{\nu}{W}} \mathbf{Z}.$$

Auf ähnliche Weise lassen sich allgemeiner Zufallsvektoren mit Verteilungen aus der Klasse der so genannten *elliptisch konturierten Verteilungen* erzeugen, indem man

$$\mathbf{X} := \boldsymbol{\mu} + A\mathbf{R}\mathbf{S}$$

setzt, wobei wieder A eine geeignete Transformationsmatrix bezeichnet. Die nicht-negative Zufallsvariable R und der auf der Sphäre $\mathcal{S} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^t \mathbf{x} = 1\}$ gleichverteilte Zufallsvektor \mathbf{S} sind dabei stochastisch unabhängig.

Ein solcher Zufallsvektor \mathbf{S} kann z.B. dargestellt werden durch $\mathbf{S} = \frac{1}{\|\mathbf{Z}\|} \mathbf{Z}$ mit einem $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ -verteilten Zufallsvektor \mathbf{Z} .

Die multivariate Normal- und t -Verteilung sind Spezialfälle elliptisch konturierter Verteilungen (vgl. MCNEIL, FREY UND EMBRECHTS (2005)).

Beispiele für Copulas vom Typ 2: *Archimedische Copulas*:

Diese sind charakterisiert durch ihren so genannten *Erzeuger* φ vermöge

$$C_n(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \right) \quad \text{für } u_1, \dots, u_n \in [0, 1].$$

Wichtigster Spezialfall:

$$\varphi(x) = -\ln x$$

mit

$$C_n(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \right) = \exp \left(\sum_{i=1}^n \ln u_i \right) = \prod_{i=1}^n u_i$$

(Unabhängigkeitscopula II)

Charakterisierung "geeigneter" (so genannter *strikt*) Erzeuger:

Sei $\varphi: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton fallend und konvex mit $\varphi(1) = 0$ und $\lim_{z \downarrow 0} \varphi(z) = \infty$; φ^{-1} bezeichne die zugehörige Inverse auf dem Intervall $[0, \infty)$.
Dann ist die durch

$$C_n(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \right) \quad \text{für } u_1, \dots, u_n \in [0,1]$$

gegebene Abbildung C_n eine Copula für $n=2$. Sie ist eine Copula für alle $n \geq 2$ genau dann, wenn φ^{-1} *total monoton* ist, d.h. wenn gilt

$$(-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \varphi^{-1}(s) \geq 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } s > 0.$$

Nach einem klassischen Satz von *Bernstein* können die Inversen solcher Erzeuger als Laplace-Transformierte nicht-negativer Zufallsvariablen Z dargestellt werden vermöge

$$\varphi^{-1}(s) = E(e^{-sZ}), \quad s \geq 0,$$

denn:

$$\varphi^{-1}(0) = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(s) = 0, \quad \text{und} \quad (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \varphi^{-1}(s) = E(Z^k e^{-sZ}) \geq 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $s > 0$ (vgl. Joe (1997), Chapter 4 und Appendix).

Für die spezielle Wahl $Z \equiv 1$ ist $\varphi^{-1}(s) = e^{-s}$, $s \geq 0$, und die resultierende Copula ist die Unabhängigkeitscopula Π , wie bereits oben gezeigt wurde.

Clayton-Copula:

$$C_{\theta}(u_1, \dots, u_n) = \left[\sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} - n + 1 \right]^{-1/\theta}, \quad \mathbf{u} \in (0,1]^n, \quad \theta > 0$$

für $P^Z = \Gamma(\alpha, \alpha)$ mit $\alpha = \frac{1}{\theta} > 0$ und Dichte

$$f_z(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \alpha^{\alpha} e^{-\alpha z}, \quad z > 0, \quad \text{also } \varphi^{-1}(s) = E(e^{-sz}) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + s} \right)^{\alpha}, \quad s \geq 0, \text{ d.h.}$$

$$\varphi(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}, \quad t \in (0,1].$$

Frank-Copula:

$$C_{\theta}(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + (e^{-\theta} - 1) \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{e^{-\theta u_i} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right\} \right), \mathbf{u} \in (0, 1]^n, \theta > 0$$

für $P^Z = \mathcal{LS}(e^{-\theta})$ (Log-Series-Verteilung über \mathbb{N}) wegen

$$\varphi^{-1}(s) = E(e^{-sZ}) = -\frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left((1 - e^{-\theta}) e^{-s} \right)^k}{k} = \frac{\ln(1 - (1 - e^{-\theta}) e^{-s})}{\theta}, s \geq 0,$$

und damit

$$\varphi(t) = -\ln \frac{1 - e^{-\theta t}}{1 - e^{-\theta}}, t \in (0, 1].$$

Gumbel-Copula:

$$C_{\theta}(u_1, \dots, u_n) = \exp\left(-\left\{\sum_{i=1}^n (-\ln(u_i))^{\theta}\right\}^{1/\theta}\right), \mathbf{u} \in (0, 1]^n, \theta \geq 1$$

Die Zufallsvariable Z besitzt hier eine spezielle *positiv-stabile* Verteilung mit Laplace-Transformierter

$$\varphi^{-1}(s) = E(e^{-sZ}) = e^{-s^{1/\theta}}, s \geq 0.$$

Die zugehörige Verteilung besitzt keine explizite Darstellung der Dichte oder Verteilungsfunktion.

Die Erzeugung von Zufallsvektoren \mathbf{U} mit einer Copula von diesem Typ erfolgt in drei Schritten (vgl. MCNEIL, FREY UND EMBRECHTS (2005)) :

- Erzeuge eine Zufallszahl Z mit der Misch-Verteilungsfunktion G .
- Erzeuge (auch von Z) unabhängige Standardzufallszahlen W_1, \dots, W_n .
- Setze $\mathbf{U} := \left(\frac{\hat{G}(-\ln(W_1))}{Z}, \dots, \frac{\hat{G}(-\ln(W_n))}{Z} \right)$

mit der zugehörigen Laplace-Transformierten $\hat{G}(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dG(x)$, $t \geq 0$. Die zu G gehörige Verteilung kann also auch als eine *Mischverteilung* für den Verteilungs-Parameter in der Familie der Exponentialverteilungen aufgefasst werden.

Zusammenfassung:

Name	Copula C_θ	Erzeuger φ_θ	Mischverteilung
Clayton	$\left[\sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} - n + 1 \right]^{-1/\theta}, \theta > 0$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$\Gamma\left(\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta}\right)$
Gumbel	$\exp\left(-\left\{\sum_{i=1}^n (-\ln(u_i))^\theta\right\}^{1/\theta}\right), \theta \geq 1$	$(-\ln t)^\theta$	positiv stabil
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln\left(1 - (1 - e^{-\theta}) \prod_{i=1}^n \left\{\frac{1 - e^{-\theta u_i}}{1 - e^{-\theta}}\right\}\right), \theta > 0$	$-\ln \frac{1 - e^{-\theta t}}{1 - e^{-\theta}}$	$\mathcal{LS}(e^{-\theta})$

Von den drei genannten Copula-Familien lassen sich die *Clayton-* und *Frank-Familie* nach der Drei-Schritt-Methode leicht erzeugen; die Simulation der *Gumbel-Copula* in höheren Dimensionen greift dagegen auf so genannte *stabile Verteilungen* zurück. Die dazu benötigte Zufallsvariable Z mit dem

Parameter $\alpha = \frac{1}{\theta} < 1$ der stabilen Verteilung kann dargestellt werden durch

$$Z = \frac{\sin(\alpha\pi V)}{(\sin(\pi V))^\theta} \cdot \left(\frac{\sin((1-\alpha)\pi V)}{-\ln(W)} \right)^{\theta-1}$$

mit zwei stochastisch unabhängigen Standardzufallszahlen V, W (nach MAI UND SCHERER (2012), Abschnitt 6.13).

In zwei Dimensionen lassen sich Zufallsvektoren \mathbf{U} mit beliebigen Archimedischen Copulas im Allgemeinen noch anders simulieren, und zwar auf folgende Weise:

- Erzeuge zwei unabhängige Standardzufallszahlen W_1, W_2
- Setze

$$U_1 := (\varphi')^{-1}\left(\frac{\varphi'(W_1)}{W_2}\right), \quad U_2 := \varphi^{-1}(\varphi(U_1) - \varphi(W_1))$$

(vgl. NELSEN (2006), Aufgabe 4.14).

Für die Gumbel-Copula in zwei Dimensionen existiert zusätzlich noch ein spezielles Verfahren, das nach einer geeigneten Modifikation der in REISS UND THOMAS (2001) beschriebenen Methode folgendermaßen durchgeführt werden kann:

- Erzeuge vier unabhängige Standardzufallszahlen W_1, \dots, W_4 .
- Setze

$$U_1 := \left(W_1 \cdot \left[1 + (W_2 - 1) \cdot \mathbb{1}_{\left\{ W_3 < \frac{1}{\theta} \right\}} \right] \right)^{W_4^{1/\theta}}, \quad U_2 := \left(W_1 \cdot \left[1 + (W_2 - 1) \cdot \mathbb{1}_{\left\{ W_3 < \frac{1}{\theta} \right\}} \right] \right)^{(1-W_4)^{1/\theta}}.$$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{1}_A$ wie üblich die Indikatorfunktion des Ereignisses A ; d.h. die Zufallsvariable $\mathbb{1}_{\left\{ W_3 < \frac{1}{\theta} \right\}}$ nimmt den Wert 1 genau dann an, wenn

$W_3 < \frac{1}{\theta}$ ausfällt, und sonst den Wert 0.

Schachbrett-Copula: (auch Box-Copula, vgl. HUMMEL UND MÄRKERT (2012))

Für $d \in \mathbb{N}$ sei $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$ ein Zufallsvektor, dessen Komponenten U_i einer diskreten Gleichverteilung über der Menge $T := \{0, 1, \dots, m-1\}$ genügen, mit $m \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \dots, d$. Die Größen

$$p_m(k_1, \dots, k_d) := P\left(\bigcap_{i=1}^d \{U_i = k_i\}\right) \text{ für } (k_1, \dots, k_d) \in T^d$$

mögen die gemeinsame Verteilung von \mathbf{U} beschreiben (sie bilden eine d -dimensionale Kontingenztafel).

Ferner bezeichne

$$I_{k_1, \dots, k_d} := \prod_{j=1}^d \left(\frac{k_j}{m}, \frac{k_j + 1}{m} \right) \text{ for } (k_1, \dots, k_d) \in T^d.$$

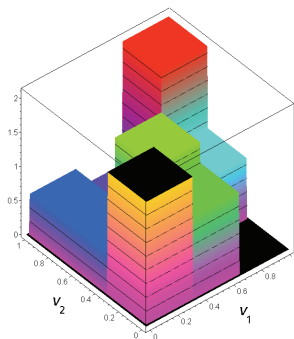
Die Gesamtheit dieser Intervalle beschreibt eine Zerlegung des d -dimensionalen Einheitswürfels in m^d gleichvolumige Teilwürfel der Kantenlänge $1/m$. Die zugehörige Dichte $c_{m\Box}$ der Schachbrett-Copula $C_{m\Box}$ ist dann definiert durch

$$c_{m\Box} := m^d \sum_{k_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{m-1} p_m(k_1, \dots, k_d) \mathbb{1}_{I_{k_1, \dots, k_d}}.$$

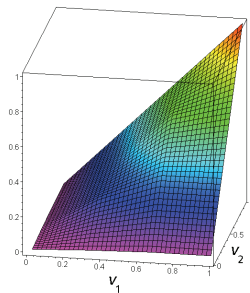
Interpretation: Ein Zufallsvektor $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_d)$ folgt einer Schachbrett-Copula genau dann, wenn die bedingte Verteilung von \mathbf{V} unter jedem Ereignis $\{\mathbf{V} \in I_{k_1, \dots, k_d}\}$, $(k_1, \dots, k_d) \in T^d$ eine stetige Gleichverteilung über I_{k_1, \dots, k_d} ist, mit $P(\mathbf{V} \in I_{k_1, \dots, k_d}) = p_m(k_1, \dots, k_d)$.

Beispiel: Es sei $d = 2$ und $m = 3$. Betrachte die Kontingenztafel

$P(U_1 = i, U_2 = j)$		i			$P(U_2 = j)$
		0	1	2	
j	0	6/30	4/30	0	1/3
	1	2/30	5/30	3/30	1/3
	2	2/30	1/30	7/30	1/3
$P(U_1 = i)$		1/3	1/3	1/3	



Copula-Dichte $c_{3\Box}(v_1, v_2)$



Copula $C_{3\Box}(v_1, v_2)$

Approximationssatz: Jede Copula C in d Dimensionen kann gleichmäßig durch eine Folge $\{C_{m\Box}\}_{m\in\mathbb{N}}$ von Schachbrett-Copulas approximiert werden. Eine Wahl zulässiger Parameter ist hierbei gegeben durch

$$p_m(k_1, \dots, k_d) = P(\mathbf{Z} \in I_{k_1, \dots, k_d}) = P\left(\bigcap_{j=1}^d \left\{ \frac{k_j}{m} < Z_j \leq \frac{k_j + 1}{m} \right\}\right) \text{ für } (k_1, \dots, k_d) \in T^d,$$

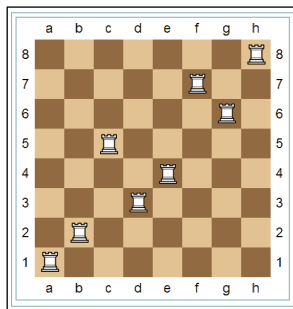
wobei $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$ einen Zufallsvektor mit der Copula C bezeichne.

Turm-Copulas:

Spezielle Schachbrett-Copulas, die ihre Wahrscheinlichkeitsmasse so verteilen wie die Positionen von Schachtürmen, die sich gegenseitig nicht bedrohen. In d Dimensionen kann eine Turm-Copula folgendermaßen mit Hilfe von Permutationen konstruiert werden:

$$M := \begin{bmatrix} \sigma_{01} & \sigma_{02} & \cdots & \sigma_{0,d-1} & \sigma_{0d} \\ \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1,d-1} & \sigma_{1d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{m-2,1} & \sigma_{m-2,2} & \cdots & \sigma_{m-2,d-1} & \sigma_{m-2,d} \\ \sigma_{m-1,1} & \sigma_{m-1,2} & \cdots & \sigma_{m-1,d-1} & \sigma_{m-1,d} \end{bmatrix}$$

Hierbei ist $(\sigma_{0k}, \sigma_{1k}, \dots, \sigma_{m-1,k})$ eine geeignete Permutation von $(0, 1, \dots, m-1)$ für $k = 1, \dots, d$.



Eine Schachbrett-Copula C ist genau dann eine Turm-Copula, wenn gilt:

$$p_m(k_1, \dots, k_d) = P\left(\bigcap_{i=1}^d \{U_i = k_i\}\right) = \frac{1}{m} \Leftrightarrow (k_1, \dots, k_d) = (\sigma_{t1}, \sigma_{t2}, \dots, \sigma_{td}) \text{ für ein } t \in T.$$

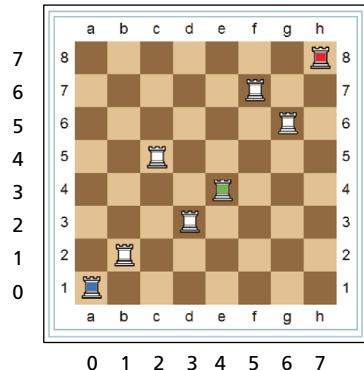
Beispiel: Die zum obigen Bild gehörige Turm-Copula ist gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \\ 6 & 5 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$(k_1, k_2) = (0, 0)$$

$$(k_1, k_2) = (4, 3)$$

$$(k_1, k_2) = (7, 7)$$



Bernstein-Copula: (vgl. COTTIN UND PFEIFER (2014))

Bernstein-Polynom vom Grad m :

$$B(m, k, z) = \binom{m}{k} z^k (1-z)^{m-k}, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad k = 0, \dots, m \in \mathbb{N}.$$

Für $d \in \mathbb{N}$ sei wieder $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$ ein Zufallsvektor, dessen Komponenten U_i einer diskreten Gleichverteilung über der Menge $T := \{0, 1, \dots, m-1\}$ genügen,

mit $m \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \dots, d$ und $p_m(k_1, \dots, k_d) := P\left(\bigcap_{i=1}^d \{U_i = k_i\}\right)$ für $(k_1, \dots, k_d) \in T^d$.

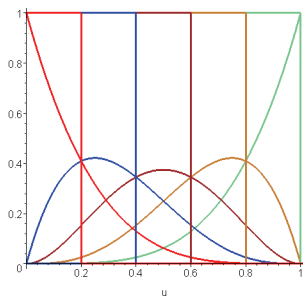
Dann definiert

$$c_B(u_1, \dots, u_d) := m^d \sum_{k_1=0}^{m-1} \dots \sum_{k_d=0}^{m-1} p_m(k_1, \dots, k_d) \prod_{i=1}^d B(m-1, k_i, u_i), \quad (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$$

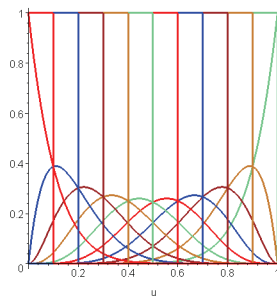
die Dichte der *Bernstein-Copula* C_B , induziert durch \mathbf{U} .

Bemerkung: Eine Bernstein-Copula kann als "geglättete" Version einer Schachbrett-Copula aufgefasst werden, bei der die in den disjunkten Teilwürfeln konzentrierten Wahrscheinlichkeitsmassen „stetig“ im Einheitswürfel verteilt werden. Der obige **Approximationsatz** gilt analog.

Visualisierung des Glättungseffekts für $d = 1$:



$m = 5$



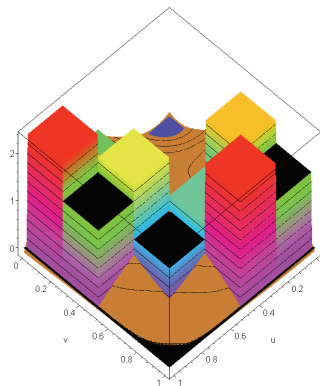
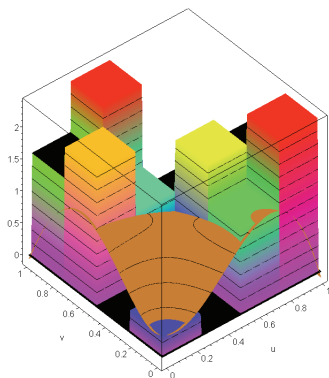
$m = 10$

Beispiel:

Glättungseffekt bei $d=2$ und $m=4$; die Verteilung von $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ sei durch die folgenden Tabelle gegeben:

$P(\mathbf{U} = (i, j))$		i			
		0	1	2	3
j	0	0,02	0,00	0,08	0,15
	1	0,00	0,03	0,12	0,10
	2	0,13	0,07	0,05	0,00
	3	0,10	0,15	0,00	0,00

Die folgenden beiden Graphiken verdeutlichen den Glättungseffekt:



Bernstein-Copula-Dichte (braun) vs. Schachbrett-Copula-Dichte

Zerlegung-der-Eins-Copula:

Natürliche Verallgemeinerung von Schachbrett- und Bernstein-Copulas, basierend auf einer Familie von Funktionen $\{\phi(m, k, \cdot) | 0 \leq k \leq m-1, m \in \mathbb{N}\}$ (so genannte „Zerlegung der Eins“) mit den folgenden Eigenschaften:

- $\sum_{k=0}^{m-1} \phi(m, k, \cdot) = 1$ für $m \in \mathbb{N}$
- $\int_0^1 \phi(m, k, u) du = \frac{1}{m}$ für $k = 0, \dots, m-1$.

Unter den Bedingungen für Schachbrett- und Bernstein-Copulas definiert

$$c_\phi(u_1, \dots, u_d) := m^d \sum_{k_1=0}^{m-1} \dots \sum_{k_d=0}^{m-1} P\left(\bigcap_{i=1}^d \{U_i = k_i\}\right) \prod_{i=1}^d \phi(m, k_i, u_i), \quad (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$$

die Dichte der durch \mathbf{U} induzierten Zerlegung-der-Eins-Copula.

Bemerkung 1: Schachbrett- und Bernstein-Copulas sind spezielle Fälle einer Zerlegung-der-Eins-Copula:

Schachbrett-Copula: $\phi(m, k, u) = \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right)}(u)$

Bernstein-Copula: $\phi(m, k, u) = \binom{m-1}{k} u^k (1-u)^{m-1-k}$

für $0 \leq u \leq 1$ und $0 \leq k \leq m-1$, $m \in \mathbb{N}$.

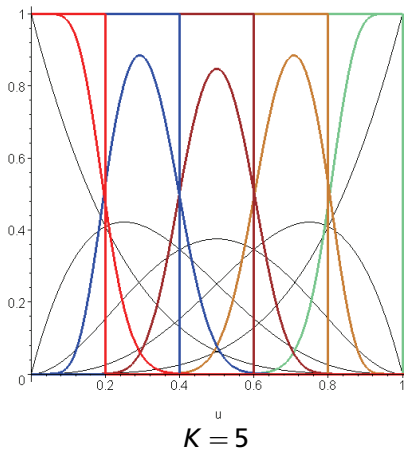
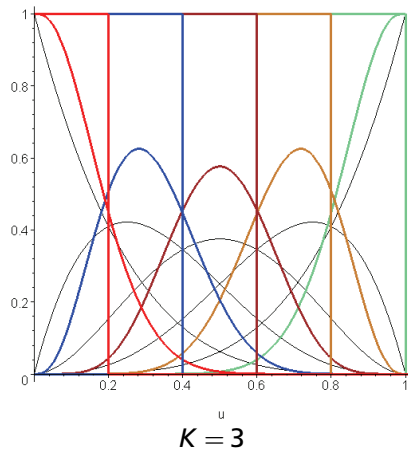
Bemerkung 2: Jede Zerlegung der Eins $\{\phi(m, k, \cdot) | 0 \leq k \leq m-1, m \in \mathbb{N}\}$ erzeugt eine weitere Zerlegung der Eins $\{\phi_K(m, k, \cdot) | 0 \leq k \leq m-1, m \in \mathbb{N}\}$ für festes $K \in \mathbb{N}$ via

$$\phi_K(m, k, \cdot) := \sum_{j=0}^{K-1} \phi(K \cdot m, K \cdot k + j, \cdot) \quad \text{für } k = 0, \dots, m-1$$

wegen

- $\sum_{k=0}^{m-1} \phi_K(m, k, \cdot) = \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{k=0}^{m-1} \phi(K \cdot m, K \cdot k + j, \cdot) = \sum_{i=0}^{K \cdot m} \phi(K \cdot m, i, \cdot) = 1, m \in \mathbb{N}$
- $\int_0^1 \phi_K(m, k, u) du = \sum_{j=0}^{K-1} \int_0^1 \phi(K \cdot m, K \cdot k + j, u) du = \sum_{j=0}^{K-1} \frac{1}{K \cdot m} = \frac{1}{m}, k = 0, \dots, m-1.$

Visualisierung entsprechender Glättungseffekte für Bernstein-Copulas, $m = 5$:



Spezielle Erweiterungen:

- Für jede n -dimensionale Copula C und beliebige $0 \leq \alpha_k \leq 1$, $k = 1, \dots, n$ ist auch

$$C^*(u_1, \dots, u_n) = \prod_{k=1}^n u_k^{(1-\alpha_k)} \cdot C(u_1^{\alpha_1}, \dots, u_n^{\alpha_n}), \quad 0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1$$

eine Copula, Diese ist für ungleiche α_k unsymmetrisch, auch wenn die originäre Copula symmetrisch ist (z.B. bei Archimedischen Copulas).

Spezielle Erweiterungen:

- Für jede n -dimensionale Copula C und beliebige $k \in \mathbb{N}$ ist auch

$$C_{(k)}(u_1, \dots, u_n) = C^k(u_1^{1/k}, \dots, u_n^{1/k}), \quad 0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1$$

eine Copula. Existiert der Grenzwert

$$C_{(\infty)}(u_1, \dots, u_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} C_{(k)}(u_1, \dots, u_n), \quad 0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1$$

als Copula, so heißt $C_{(\infty)}$ *Extremwert-Copula*.

Zum ersten Fall gehört folgende explizite Konstruktion:

Sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ein Zufallsvektor mit der Copula C und $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ ein Zufallsvektor mit unabhängigen über $[0,1]$ stetig gleichverteilten Komponenten, unabhängig von \mathbf{X} . Setze

$$Z_k := \max \left\{ X_k^{1/\alpha_k}, Y_k^{1/(1-\alpha_k)} \right\} \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Dann hat $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ die Copula C^* , denn:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^n \{Z_k \leq u_k\}\right) &= P\left(\bigcap_{k=1}^n (\{X_k \leq u_k^{\alpha_k}\} \cap \{Y_k \leq u_k^{1-\alpha_k}\})\right) \\ &= P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq u_k^{\alpha_k}\}\right) \cdot P\left(\bigcap_{k=1}^n \{Y_k \leq u_k^{1-\alpha_k}\}\right) = C(u_1^{\alpha_1}, \dots, u_n^{\alpha_n}) \cdot \prod_{k=1}^n u_k^{(1-\alpha_k)} \end{aligned}$$

mit $P(Z_k \leq u_k) = P(X_k \leq u_k^{\alpha_k}) \cdot P(Y_k \leq u_k^{1-\alpha_k}) = u_k^{\alpha_k} \cdot u_k^{1-\alpha_k} = u_k$, $0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1$.

Zum zweiten Fall gehört folgende explizite Konstruktion:

Seien $\mathbf{X}_j = (X_{j1}, \dots, X_{jn})$ für $1 \leq j \leq k$ unabhängige Zufallsvektoren je mit der Copula C . Setze

$$Z_i := \max_{1 \leq j \leq k} \{X_{ji}^k\} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Dann hat $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ die Copula $C_{(k)}$, denn:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^n \{Z_i \leq u_i\}\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \left\{\max_{1 \leq j \leq k} \{X_{ji}^k\} \leq u_i\right\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \left\{\max_{1 \leq j \leq k} \{X_{ji}\} \leq u_i^{1/k}\right\}\right) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^k \{X_{ji} \leq u_i^{1/k}\}\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^k \bigcap_{i=1}^n \{X_{ji} \leq u_i^{1/k}\}\right) \\ &= P\left(\bigcap_{j=1}^k \{X_{j1} \leq u_1^{1/k}, \dots, X_{jn} \leq u_n^{1/k}\}\right) = C^k(u_1^{1/k}, \dots, u_n^{1/k}) \end{aligned}$$

$$\text{mit } P(Z_i \leq u_i) = P\left(\max_{1 \leq j \leq k} \{X_{ji}\} \leq u_i^{1/k}\right) = (u_i^{1/k})^k = u_i, \quad 0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1.$$

Bemerkung: Die Gumbel-Copula ist eine spezielle Extremwert-Copula, denn mit

$$C(u_1, \dots, u_n) = \exp\left(-\left\{\sum_{i=1}^n (-\ln(u_i))^\theta\right\}^{1/\theta}\right), \quad \theta \geq 1$$

folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} C^k(u_1^{1/k}, \dots, u_n^{1/k}) &= \exp\left(-k \left\{\sum_{i=1}^n (-\ln(u_i^{1/k}))^\theta\right\}^{1/\theta}\right) = \exp\left(-k \left\{\sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{k} \ln(u_i)\right)^\theta\right\}^{1/\theta}\right) \\ &= \exp\left(-k \left\{\frac{1}{k^\theta} \sum_{i=1}^n (-\ln(u_i^{1/k}))^\theta\right\}^{1/\theta}\right) = C(u_1, \dots, u_n), \quad \theta \geq 1 \end{aligned}$$

und somit

$$C = C_{(k)} = C_{(\infty)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

(man sagt auch, die Gumbel-Copula ist *max-stabil*).

Vernestung von Copulas (sog. *Kompatibilitätsproblem*):

Frage: Seien C_1, C_2 bivariate Copulas, Ist dann auch

$$C_3(u, v, w) = C_2(C_1(u, v), w) \quad \text{bzw.} \quad C_2(u, C_1(v, w)) \quad \text{mit} \quad 0 \leq u, v, w \leq 1$$

wieder eine Copula (analog für höhere Dimensionen)?

Antwort: Im Allgemeinen **nein!** Gegenbeispiel: $C_1 = C_2 = \mathcal{W}^2$ (untere Fréchet-Hoeffding-Schranke) ergibt

$$C_3(u, v, w) = C_2(C_1(u, v), w) = \mathcal{W}^3(u, v, w),$$

und dies ist *keine* Copula (vgl, NELSEN (2006), Kapitel 3.5).

Vernestungen bei Archimedischen Copulas:

Sind φ_1 und φ_2 zwei strikte Erzeuger Archimedischer Copulas C_1 und C_2 mit total monotonen Inversen φ_1^{-1} und φ_2^{-1} , die zusätzlich die Bedingung erfüllen: $-\varphi_2(\varphi_1^{-1})$ ist total monoton, d.h.

$$(-1)^{k-1} \frac{d^k}{dt^k} \varphi_2(\varphi_1^{-1}(t)) \geq 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N},$$

so ist auch

$$C(u, v, w) = C_2(C_1(u, v), w) = \varphi_2^{-1}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1(u) + \varphi_2(v)) + \varphi_2(w)), 0 \leq u, v, w \leq 1$$

eine Copula (vgl, McNEIL, FREY UND EMBRECHTS (2005), Kapitel 5).

Dieses Konstruktionsprinzip kann für geeignete Copula-Familien auf beliebige Dimensionen erweitert werden (\rightarrow *Hierarchische Archimedische Copulas*).

Beispiel:

Gumbel-Copula: $\varphi_1(t) = (-\ln t)^a$, $\varphi_2(t) = (-\ln t)^b$ mit $a \geq b \geq 1$:

$$\varphi_2(\varphi_1^{-1}(t)) = \left(-\ln(\varphi_1^{-1}(t))\right)^b = \left(-\ln(\exp(-t^{1/a}))\right)^b = t^{b/a} \quad \text{und}$$

$$(-1)^{k-1} \frac{d^k}{dt^k} \varphi_2(\varphi_1^{-1}(t)) = (-1)^{k-1} c_k t^{b/a-k} \geq 0 \quad \text{mit} \quad c_k = \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{b}{a} - j\right).$$

Damit ergibt sich als hierarchische Gumbel-Copula

$$\begin{aligned} C(u, v, w) &= C_2(C_1(u, v), w) = \exp\left(-\left(\{-\ln(C_1(u, v))\}^b + (-\ln w)^b\right)^{1/b}\right) \\ &= \exp\left(-\left(\{(-\ln u)^a + (-\ln v)^a\}^{b/a} + (-\ln w)^b\right)^{1/b}\right), \quad 0 \leq u, v, w \leq 1. \end{aligned}$$

Unendliche Zerlegung-der-Eins-Copula: (vgl. PFEIFER ET AL. (2016)):

Es seien $\{\varphi_i(u)\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$ und $\{\psi_j(v)\}_{j \in \mathbb{Z}^+}$ Familien nicht-negativer Abbildungen für $u, v \in (0,1)$ mit den Eigenschaften

- $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(v) = 1$ und
- $\int_0^1 \varphi_i(u) du = \alpha_i > 0$, $\int_0^1 \psi_j(v) dv = \beta_j > 0$ für $i, j \in \mathbb{Z}^+$.

Die Abbildungen $\varphi_i(u)$ und $\psi_j(v)$ können als Wahrscheinlichkeiten diskreter Verteilungen über den nicht-negativen ganzen Zahlen \mathbb{Z}^+ mit Parametern u und v aufgefasst werden.

Unendliche Zerlegung-der-Eins-Copula:

Ferner mögen die Größen $\{p_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}^+}$ die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten einer diskreten Verteilung über $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ mit den durch $p_{i.} = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = \alpha_i$ und

$p_{.j} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} = \beta_j$ für $i, j \in \mathbb{Z}^+$ gegebenen Randwahrscheinlichkeiten bezeichnen.

Dann definiert

$$c(u, v) := \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_{ij}}{\alpha_i \beta_j} \varphi_i(u) \psi_j(v), \quad u, v \in (0, 1)$$

die Dichte einer bivariaten *verallgemeinerten Zerlegung-der-Eins-Copula* für den Zufallsvektor (U, V) .

Unendliche Zerlegung-der-Eins-Copula:

Alternativ kann die Copula-Dichte dargestellt werden als

$$c(u,v) := \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} f_i(u) g_j(v), \quad u, v \in (0,1)$$

mit

$$f_i(u) = \frac{\varphi_i(u)}{\alpha_i}, \quad g_j(v) = \frac{\psi_j(v)}{\beta_j} \quad \text{für } i, j \in \mathbb{N}, u, v \in (0,1).$$

Die Copula-Dichte $c(u,v)$ kann also als bivariate Mischung von Produkt-Dichten $f_i(u)g_j(v)$ aufgefasst werden, was insbesondere für Monte Carlo Simulationen wichtig ist.

Bemerkung: Das Konzept der *verallgemeinerten Zerlegung-der-Eins-Copula* kann wie folgt leicht auf höhere Dimensionen $d > 2$ verallgemeinert werden:

Dazu seien $\{\varphi_{ki}(u)\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$ für $k = 1, \dots, d$ diskrete Wahrscheinlichkeiten mit

- $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{ki}(u) = 1$ für $u \in (0, 1)$ und
- $\int_0^1 \varphi_{ki}(u) du = \alpha_{ki} > 0$ für $i \in \mathbb{Z}^+$.

Ferner mögen die Größen $\{p_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^{+d}}$ die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten einer diskreten Verteilung über \mathbb{Z}^{+d} repräsentieren, wobei wir zur Vereinfachung $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d)$ schreiben, also $P(\mathbf{Z} = \mathbf{i}) = p_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^{+d}$.

Bemerkung: Das Konzept der *verallgemeinerten Zerlegung-der-Eins-Copula* kann wie folgt leicht auf höhere Dimensionen $d > 2$ verallgemeinert werden:

Hier definiert

$$c(\mathbf{u}) := \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^{+d}} \frac{\rho_{\mathbf{i}}}{\prod_{k=1}^d \alpha_{k,i_k}} \prod_{k=1}^d \varphi_{k,i_k}(u_k) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^{+d}} \rho_{\mathbf{i}} \prod_{k=1}^d \frac{\varphi_{k,i_k}(u_k)}{\alpha_{k,i_k}} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^{+d}} \rho_{\mathbf{i}} \prod_{k=1}^d f_{k,i_k}(u_k)$$

für $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in (0,1)^d$ die Dichte einer d -dimensionalen Copula, die wieder *verallgemeinerte Zerlegung-der-Eins-Copula* genannt wird. Die Copula-Dichte $c(\mathbf{u})$ entspricht auch hier wieder einer (multivariaten) Mischung von Produkt-

dichten $\prod_{k=1}^d f_{k,i_k}(u_k)$.

Zur Vereinfachung der Darstellung beschränken wir uns im Folgenden auf den bivariaten Fall.

Der symmetrische Fall (Diagonaldominanz)

Hier sei $\varphi_i = \psi_i$ für $i \in \mathbb{Z}^+$ und $\int_0^1 \varphi_i(u) du = \alpha_i > 0$ angenommen. Definiere

$$p_{ij} := \begin{cases} \alpha_i, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$c(u, v) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varphi_i(u) \varphi_i(v)}{\alpha_i}, \quad u, v \in (0, 1)$$

die Dichte einer bivariaten *verallgemeinerte Zerlegung-der-Eins-Copula* (mit *Diagonaldominanz*).

Beispiel (Binomialverteilung / Bernstein-Copula). Es sei, für festes $m \geq 2$,

$$\varphi_{m,i}(u) = \begin{cases} \binom{m-1}{i} u^i (1-u)^{m-1-i}, & i = 0, \dots, m-1 \\ 0, & i \geq m. \end{cases}$$

Hier gilt, für $i = 0, \dots, m-1$,

$$\begin{aligned} \alpha_{m,i} &= \int_0^1 \varphi_{m,i}(u) du = \binom{m-1}{i} \int_0^1 u^i (1-u)^{m-1-i} du \\ &= \frac{(m-1)!}{i!(m-1-i)!} \cdot \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(m-i)}{\Gamma(m+1)} = \frac{(m-1)!}{i!(m-1-i)!} \cdot \frac{i!(m-1-i)!}{m!} = \frac{1}{m} \end{aligned}$$

und daher

$$c_m(u, v) = m \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i}^2 (uv)^i ((1-u)(1-v))^{m-1-i}, \quad u, v \in (0, 1) \text{ (Bernstein-Copula).}$$

Bemerkung: Bei der Bernstein-Copula entsprechen die in der alternativen Dichte-Darstellung verwendeten Terme f_i den Dichten von Beta-Verteilungen wegen

$$f_i(u) = \frac{\varphi_i(u)}{\alpha_i} = m \binom{m-1}{i} u^i (1-u)^{m-1-i} = \frac{u^i (1-u)^{m-1-i}}{B(i+1, m-i)} \text{ für } i = 1, \dots, m \text{ und } u \in (0, 1).$$

Damit gilt alternativ

$$c_m(u, v) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} f_i(u) f_i(v), \quad u, v \in (0, 1).$$

Die Mischfaktoren entsprechen den Wahrscheinlichkeiten einer diskreten Gleichverteilung über $\{1, \dots, m\}$.

Beispiel (Negative Binomialverteilung). Es sei, für festes $\beta > 0$,

$$\varphi_{\beta,i}(u) = \binom{\beta+i-1}{i} (1-u)^\beta u^i, \quad i \in \mathbb{Z}^+.$$

Hier gilt, für $i \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned} \alpha_{\beta,i} &= \int_0^1 \varphi_{\beta,i}(u) du = \binom{\beta+i-1}{i} \int_0^1 u^i (1-u)^\beta du \\ &= \frac{\Gamma(\beta+i)}{i! \Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(i+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+i+2)} = \frac{\beta}{(\beta+i)(\beta+i+1)} \end{aligned}$$

und somit

$$c_\beta(u,v) = \frac{((1-u)(1-v))^\beta}{\beta} \sum_{i=0}^{\infty} (\beta+i)(\beta+i+1) \binom{\beta+i-1}{i}^2 (uv)^i, \quad u, v \in (0,1).$$

Bemerkung: Bei der negativen Binomial-Copula entsprechen die in der alternativen Dichte-Darstellung verwendeten Terme f_i ebenfalls Dichten von Beta-Verteilungen wegen

$$f_i(u) = \frac{\varphi_i(u)}{\alpha_i} = \frac{(\beta+i)(\beta+i+1)}{\beta} \binom{\beta+i-1}{i} (1-u)^\beta u^i = \frac{u^i (1-u)^\beta}{B(i+1, \beta+1)}$$

für $i = 1, \dots, m$ und $u \in (0, 1)$. Damit gilt alternativ

$$c_\beta(u, v) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta}{(\beta+i)(\beta+i+1)} f_i(u) f_i(v), \quad u, v \in (0, 1).$$

Die Mischfaktoren entsprechen den Wahrscheinlichkeiten einer diskreten Verteilung über \mathbb{N} mit den Termen $\frac{\beta}{(\beta+i)(\beta+i+1)}$, $i \in \mathbb{N}$.

Für ganzzahlige Werte von β können die Dichten von negativen Binomial-Copulas explizit evaluiert werden, ebenso wie die zugehörige Copula

$$C_{\beta}(x, y) = \int_0^x \int_0^y c_{\beta}(u, v) dv du, \quad x, y \in (0, 1).$$

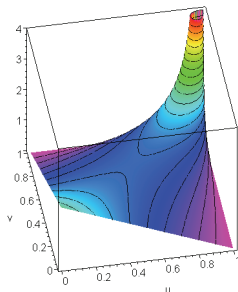
β	$c_{\beta}(u, v), u, v \in (0, 1)$
1	$2 \frac{(1-u)(1-v)}{(1-uv)^3}$
2	$3 \frac{(1+3uv)(1-u)^2(1-v)^2}{(1-uv)^5}$
3	$4 \frac{(1+8uv+6u^2v^2)(1-u)^3(1-v)^3}{(1-uv)^7}$

Für ganzzahlige Werte von β können die Dichten von negativen Binomial-Copulas explizit evaluiert werden, ebenso wie die zugehörige Copula

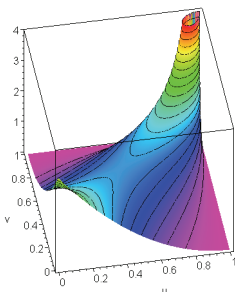
$$C_{\beta}(x, y) = \int_0^x \int_0^y c_{\beta}(u, v) dv du, \quad x, y \in (0, 1).$$

β	$C_{\beta}(x, y), x, y \in (0, 1)$
1	$xy \frac{(2-x-y)}{1-xy}$
2	$xy \frac{(3-3x-3y+x^2+y^2+3x^2y^2-x^2y^3-x^3y^2)}{(1-xy)^3}$

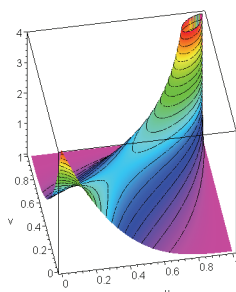
Die folgenden Graphiken zeigen die zugehörigen Dichten c_β für $\beta = 1, \dots, 6$.



$\beta = 1$

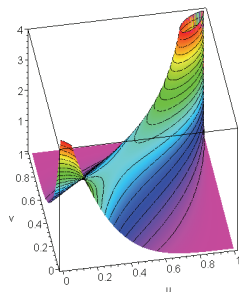


$\beta = 2$

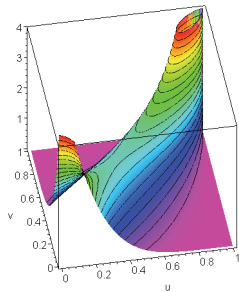


$\beta = 3$

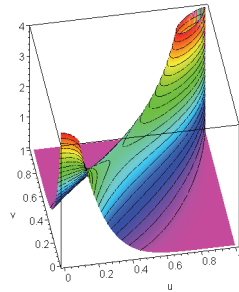
Die folgenden Graphiken zeigen die zugehörigen Dichten c_β für $\beta = 1, \dots, 6$.



$\beta = 4$



$\beta = 5$



$\beta = 6$

Negative Binomial-Copulas besitzen – im Gegensatz zu endlichen Zerlegungs-der-Eins-Copulas – eine *positive Tailabhängigkeit*:

β	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda_U(\beta)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{93}{128}$	$\frac{193}{256}$	$\frac{793}{1024}$	$\frac{1619}{2048}$	$\frac{26333}{32768}$	$\frac{53381}{65536}$

Der Tailabhängigkeitskoeffizient ist für ganzzahlige β gegeben durch

$$\lambda_U(\beta) = \lim_{t \uparrow 1} P(U > t | V > t) = \lim_{t \uparrow 1} \frac{1}{1-t} \int_t^1 \int_t^1 c_\beta(u, v) du dv = 1 - \frac{\binom{2\beta}{\beta}}{4^\beta} \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi\beta}}$$

mit $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \lambda_U(\beta) = 1$.

Beispiel (Poisson-Verteilung). Es sei

$$\varphi_{\gamma,i}(u) = (1-u)^\gamma \frac{\gamma^i L(u)^i}{i!}, \quad i \in \mathbb{Z}^+$$

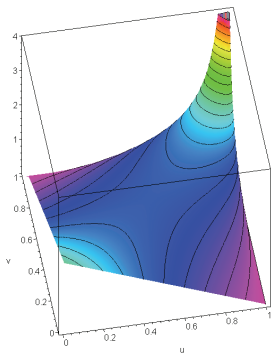
mit $L(u) = -\ln(1-u) > 0$, $u \in (0,1)$ und $\gamma > 0$. Hier gilt, für $i \in \mathbb{Z}^+$, mit der Substitution $z = L(u)$ und $y = (1+\gamma)z$,

$$\begin{aligned} \alpha_{\gamma,i} &= \int_0^1 \varphi_{\gamma,i}(u) du = \int_0^1 (1-u)^\gamma \frac{\gamma^i L(u)^i}{i!} du = \int_0^\infty \frac{\gamma^i z^i}{i!} e^{-(1+\gamma)z} dz \\ &= \frac{\gamma^i}{(1+\gamma)^{i+1}} \int_0^\infty \frac{y^i}{i!} e^{-y} dy = \frac{\gamma^i}{(1+\gamma)^{i+1}} = \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^i \left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma} \right) \end{aligned}$$

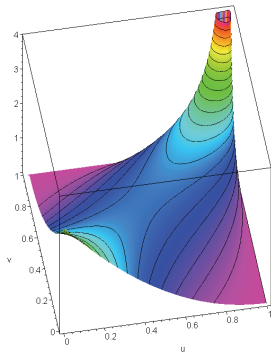
(\rightarrow geometrische Verteilung mit Erwartungswert γ) und

$$c_\gamma(u,v) = (1+\gamma)(1-u)^\gamma (1-v)^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\gamma(1+\gamma)\ln(1-u)\ln(1-v))^i}{i!^2}, \quad u,v \in (0,1).$$

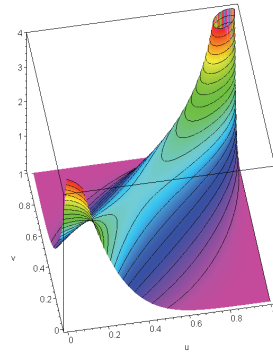
Die folgenden Graphiken zeigen die zugehörigen Dichten c_γ für $\gamma = 1, 2, 5$.



$\gamma = 1$



$\gamma = 2$



$\gamma = 5$

Poisson-Copulas besitzen im Gegensatz zu negativen Binomialcopulas *keine* Teilabhängigkeit.

Der unsymmetrische Fall

Wir zeigen hier nur eines von vielen möglichen Beispielen.

Sei dazu $M_n = [p_{ij}]_{i,j=0,\dots,n}$ für $n \in \mathbb{Z}^+$ eine unsymmetrische $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix mit

$$\sum_{k=0}^n p_{ik} = \sum_{k=0}^n p_{ki} = \alpha_i \quad \text{für } i = 0, \dots, n$$

und

$$p_{ij} := \begin{cases} \alpha_i, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } i, j > n.$$

Beispiel (negative Binomial-Copula, unsymmetrischer Fall). Wir betrachten die negative Binomialverteilung mit $\beta = 1$. Dann ist $\alpha_i = \int_0^1 \varphi_{1,i}(u) du = \frac{1}{(1+i)(2+i)}$

für $i \in \mathbb{Z}^+$. Mit $n = 4$ und

$$M_4 := \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 18 & 5 & 5 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

erhalten wir für $u, v \in (0, 1)$

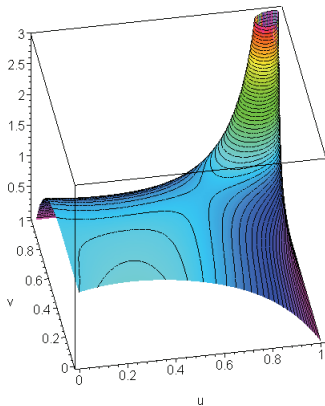
$$c(u, v) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_{ij}}{\alpha_i \alpha_j} \varphi_i(u) \varphi_j(v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{p_{ij}}{\alpha_i \alpha_j} \varphi_i(u) \varphi_j(v) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} \varphi_k(u) \varphi_k(v).$$

Explizit ergibt sich

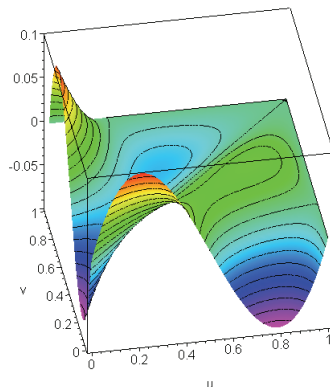
$$c(u,v) = \frac{(1-u)(1-v)}{5(1-uv)^3} H(u,v), \quad u,v \in (0,1)$$

mit dem Polynom

$$\begin{aligned}
 H(u,v) = & 150u^7v^7 - 450u^6v^6 - 10u^7v^3 + 510u^5v^5 - 10u^3v^7 - 30u^5v^4 - \dots \\
 & \dots - 10u^3v^5 + 30u^2v^6 - 300u^4v^4 + 30u^6v^2 - 5u^3v^4 + 80u^4v^3 - \dots \\
 & \dots - 30u^5v + 94u^3v^3 + 30u^2v^4 - 30uv^5 - 60u^3v^2 + 15u^2v^3 + \dots \\
 & \dots + 10u^4 + 18u^2v^2 - 30uv^3 + 10v^4 - 15uv^2 + 10v^2 - 18uv + 10u + 5v + 6.
 \end{aligned}$$



Graph von $c(u, v)$



Graph von $c(u, v) - c(v, u)$

Die zugehörige Copula C hat den gleichen Tailabhängigkeitskoeffizienten $\lambda_U = 1/2$ wie im symmetrischen Fall.

Teil II: Anwendungen

Nach dem Satz von Sklar: Trennung der Randverteilungen von der Copula:

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad \text{für } u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$$

Gegeben:

k unabhängige Beobachtungen (in Spalten) x_{1j}, \dots, x_{kj} je Dimension j (in Zeilen)

1. Ansatz (Transformationsmethode bei stetiger Verteilung):

- Schätze die (stetigen) Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n (parametrisch oder nicht-parametrisch)
- Transformiere zeilenweise die Daten x_{1j}, \dots, x_{kj} auf $v_{1j} = F_1(x_{1j}), \dots, v_{kj} = F_k(x_{kj})$; setze $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$ für $i = 1, \dots, k$
- Verwende $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ als *Stichprobe* aus der zu Grunde liegenden Copula.

Hintergrund: Für die zu Grunde liegenden Zufallsvariablen X_j gilt bei Stetigkeit: $F_j(X_j)$ ist stetig über $(0,1)$ gleichverteilt, so dass

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n \{F_j(X_j) \leq u_j\}\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^n \{X_j \leq F_j^{-1}(u_j)\}\right) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) = C(u_1, \dots, u_n)$$

für $u_1, \dots, u_n \in (0,1)$ folgt.

2. Ansatz (sog. empirische Copula):

- Transformiere zeilenweise die Daten x_{1j}, \dots, x_{kj} auf ihre relativen Ränge

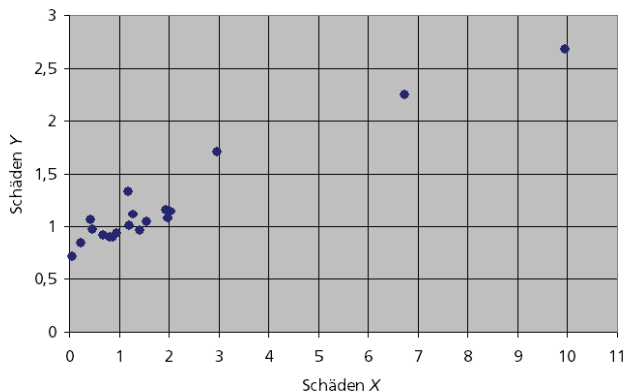
$$r_{1j}, \dots, r_{kj} \in \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1} \right); \text{ setze } \mathbf{r}_i = (r_{i1}, \dots, r_{in}) \text{ für } i = 1, \dots, k$$

- Verwende $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$ als *Stichprobe* aus der zu Grunde liegenden Copula.

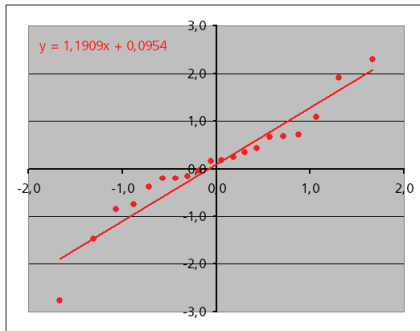
Dieses Verfahren entspricht dem ersten Ansatz, wenn man als Schätzer die (skalenkorrigierten) empirischen Verteilungsfunktionen $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_n$ verwendet.

Beispieldatensatz: $n = 2, k = 20$ (vgl. COTTIN UND PFEIFER (2014))

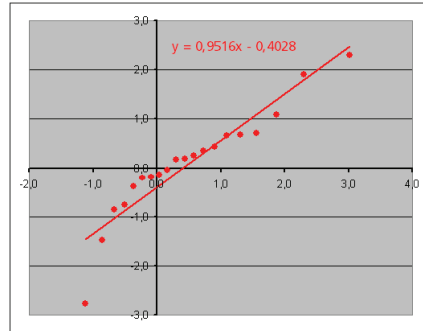
Nr.	Schäden X	Schäden Y
1	0,468	0,966
2	9,951	2,679
3	0,866	0,897
4	6,731	2,249
5	1,421	0,956
6	2,040	1,141
7	2,967	1,707
8	1,200	1,008
9	0,426	1,065
10	1,946	1,162
11	0,676	0,918
12	1,184	1,336
13	0,960	0,933
14	1,972	1,077
15	1,549	1,041
16	0,819	0,899
17	0,063	0,710
18	1,280	1,118
19	0,824	0,894
20	0,227	0,837



Schätzung der Randverteilungen mit Q-Q-Plots:

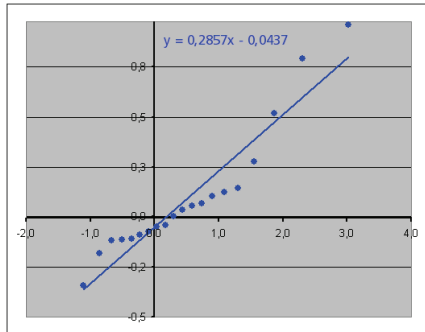
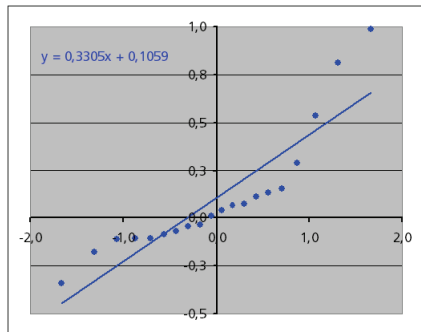


Normalverteilung



Gumbelverteilung

Schätzung der Randverteilungen mit Q-Q-Plots:



ln(Y)-Daten angepasst an

Normalverteilung

Gumbelverteilung

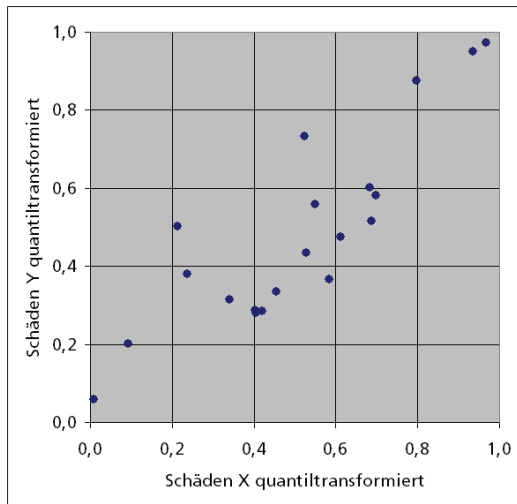
Schätzung der Randverteilungen mit Q-Q-Plots:

Entscheidung: $X \sim$ lognormalverteilt, $Y \sim$ Fréchet-verteilt

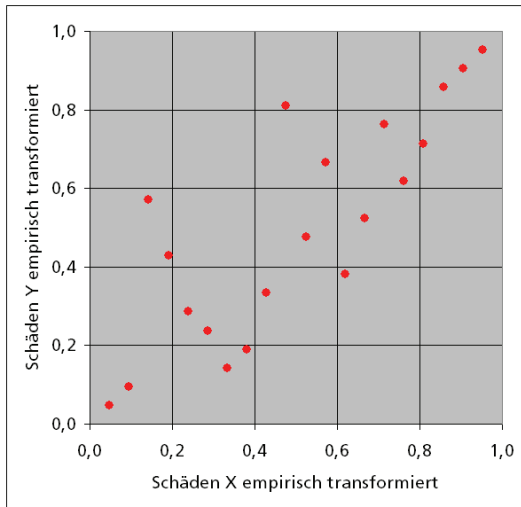
Geschätzte Parameter:

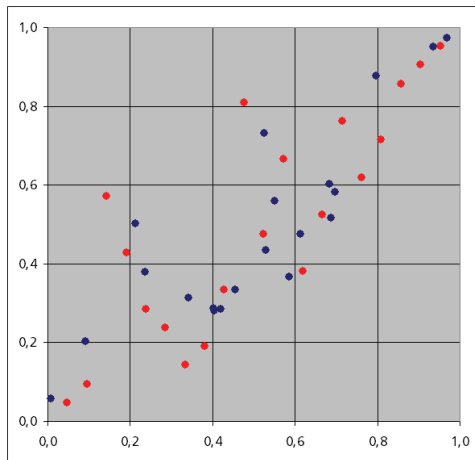
	$\ln(X)$	$\ln(Y)$
Verteilung	Normal	Gumbel
Parameter	$\mu = 0,0954$	$\mu = -0,0437$
	$\sigma = 1,1909$	$\sigma = 0,2857$

Nr.	$F_1(X)$	$F_2(Y)$
1	0,236	0,380
2	0,968	0,973
3	0,420	0,285
4	0,936	0,951
5	0,585	0,366
6	0,698	0,582
7	0,798	0,876
8	0,529	0,434
9	0,213	0,502
10	0,684	0,602
11	0,341	0,314
12	0,525	0,732
13	0,454	0,335
14	0,688	0,516
15	0,613	0,474
16	0,402	0,288
17	0,008	0,058
18	0,551	0,559
19	0,404	0,281
20	0,093	0,202



Nr.	$\hat{F}_1(X)$	$\hat{F}_2(Y)$
1	0,190	0,429
2	0,952	0,952
3	0,381	0,190
4	0,905	0,905
5	0,619	0,381
6	0,810	0,714
7	0,857	0,857
8	0,524	0,476
9	0,143	0,571
10	0,714	0,762
11	0,238	0,286
12	0,476	0,810
13	0,429	0,333
14	0,762	0,619
15	0,667	0,524
16	0,286	0,238
17	0,048	0,048
18	0,571	0,667
19	0,333	0,143
20	0,095	0,095





Vergleich Transformationsmethode (blau) vs. Empirische Copula (rot)

Diskussion beider Methoden:

- Bei der Transformationsmethode geht die Schätzung der Randverteilungen explizit in die Schätzung der Copula ein; → sensibel bzgl. Modellfehlern in den Randverteilungen; „echte“ Stichprobe der Copula
- Bei der empirischen Copula geht die Schätzung der Randverteilungen *nicht* explizit in die Schätzung der Copula ein; → unsensibel bzgl. Modellfehler in den Randverteilungen; aber: nur „Pseudo-Stichprobe“ der Copula (tendenziell zu gleichmäßig, keine Punkthäufungen)
- Bei sehr großen Stichprobenumfängen nähern sich beide Methoden an.

Zusammenhang Copula $C(u_1, \dots, u_n) \leftrightarrow$ Copula-Dichte $c(u_1, \dots, u_n)$:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} C(u_1, \dots, u_n), \quad 0 < u_1, \dots, u_n < 1$$

Parametrische Schätzverfahren für Copula-Dichten:

- *Maximum-Likelihood-Methode* (→ Archimedische Copulas)
- *Korrelationsvergleiche* (→ Gauß-, *t*-Copula)

Nicht-parametrische Schätzverfahren für Copula-Dichten:

- *Zerlegung-der-Eins-Copulas* (→ Bernstein-Copula, negative Binomial-Copula, ...)

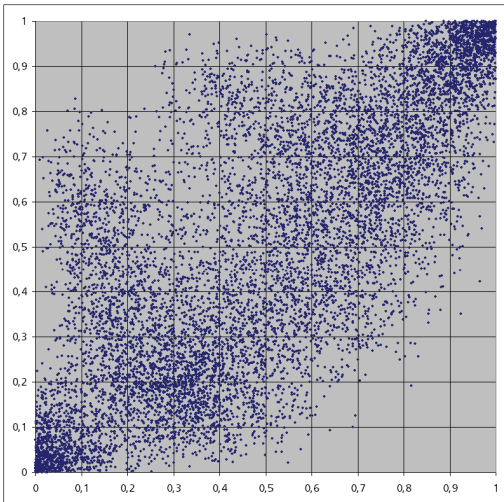
Bernstein-Copula:

$$c(u, v) = \sum_{i=1}^m p_{ij} f_i(u) f_j(v)$$

mit Dichten f_i der $B(i+1, m-i)$ -Verteilung, mit Stichprobenumfang m . Die Gewichte p_{ij} erhält man mittels der empirischen Turm-Copula direkt aus den Daten über die Rangvektoren; je Zeile und Spalte genau ein Eintrag der Größe $\frac{1}{m}$. [Das Verfahren funktioniert analog in höheren Dimensionen.]

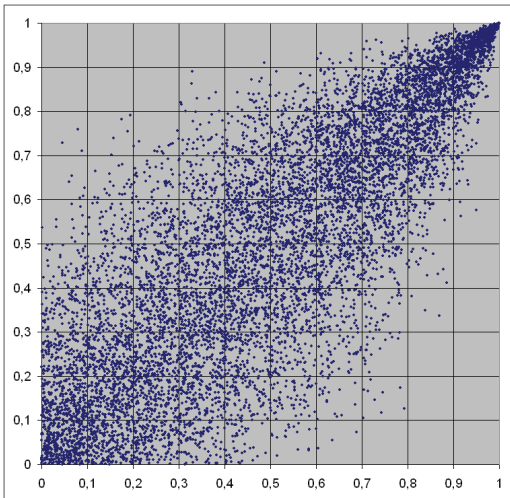
Für eine Monte Carlo Simulation zum obigen Beispiel wählt man daher nach einer diskreten Gleichverteilung eine der 20 Zeilen der nachfolgenden Tabelle mit dem Eintrag (i, j) und daraus die Beta-Verteilungen $B(i+1, m-i)$ bzw. $B(j+1, m-j)$ für f_i bzw. f_j .

N	i	j
1	4	9
2	20	20
3	8	4
4	19	19
5	13	8
6	17	15
7	18	18
8	11	10
9	3	12
10	15	16
11	5	6
12	10	17
13	9	7
14	16	13
15	14	11
16	6	5
17	1	1
18	12	14
19	7	3
20	2	2



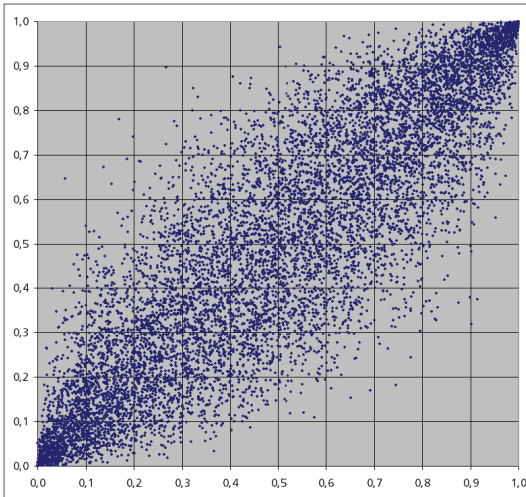
Monte Carlo
 Simulation der
 Bernstein-Copula
 zum obigen Beispiel
 vom Umfang 10.000

N	i	j
1	4	9
2	20	20
3	8	4
4	19	19
5	13	8
6	17	15
7	18	18
8	11	10
9	3	12
10	15	16
11	5	6
12	10	17
13	9	7
14	16	13
15	14	11
16	6	5
17	1	1
18	12	14
19	7	3
20	2	2



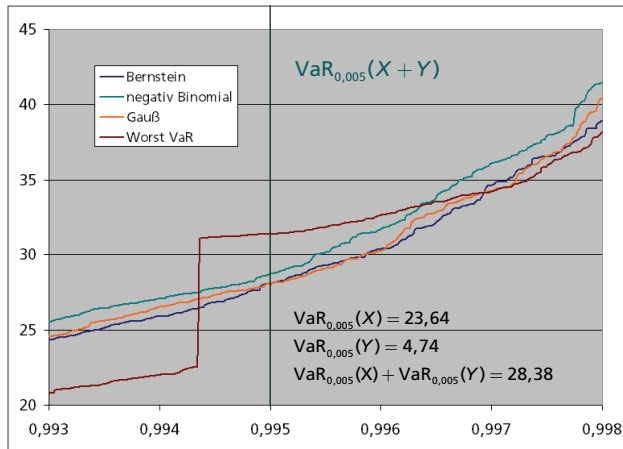
Monte Carlo
Simulation einer
angepassten
negativen Binomial-
Copula zum obigen
Beispiel vom
Umfang 10.000

N	i	j
1	4	9
2	20	20
3	8	4
4	19	19
5	13	8
6	17	15
7	18	18
8	11	10
9	3	12
10	15	16
11	5	6
12	10	17
13	9	7
14	16	13
15	14	11
16	6	5
17	1	1
18	12	14
19	7	3
20	2	2



Monte Carlo
 Simulation einer
 angepassten Gauß-
 Copula zum obigen
 Beispiel vom
 Umfang 10.000

Vergleich verschiedener Copula-Simulationen für das Summenrisiko zum obigen Beispiel (empirische Quantilfunktion aus 50.000 Simulationen)



Copula	$\text{VaR}_{0,005}(X + Y)$
Bernstein	28,03
neg. Binom.	28,72
Gauß	28,07
Worst VaR	31,71

Copula	$\text{Korr}(X, Y)$
Bernstein	0,5437
neg. Binom.	0,9072
Gauß	0,8278
Worst VaR	0,0076

Missverständnisse zum Verhältnis von Korrelation und Diversifikation:

“**Diversification** arises when different activities complement each other, in the field of both return and risk. [...] The **diversification effect** is calculated by using **correlation factors**. Correlations are statistical measures assessing the extend to which events could occur simultaneously. [...] A correlation factor of 1 implies that certain events will always occur simultaneously. Hence, there is no diversification effect and two risks identically add up. Risk managers tend to say that such risks are perfectly correlated (i.e., they have a high correlation factor), meaning that these two risks do not actually diversify at all. **A correlation factor of 0 implies that diversification effects are present and a certain diversification benefit holds.**”

[DOFF (2011), p. 249f.]

Missverständnisse zum Verhältnis von Korrelation und Diversifikation:

“Diversifikationseffekte: eine Reduzierung des Gefährdungspotenzials von Versicherungsunternehmen und -gruppen durch die Diversifizierung ihrer Geschäftstätigkeit, die sich aus der **Tatsache** ergibt, dass das negative Resultat eines Risikos durch das günstigere Resultat eines anderen Risikos **ausgeglichen werden kann, wenn diese Risiken nicht voll korreliert sind.**”

[Gesetz zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen vom 1. April 2015, Bundesgesetzblatt (2015) Teil I Nr. 14, p. 441]

Missverständnisse zum Verhältnis von Korrelation und Diversifikation:

In internen Modellen zu Solvency II wird meist unterstellt, dass der „Worst Case“ in Bezug auf das Risikomaß Value at Risk bei der Aggregation von Risiken für den Fall der *Komonotonie* erreicht wird („Rank Tie Copula“).

Dies ist leider nicht zutreffend (vgl. PFEIFER (2013)), wie neuere Untersuchungen von PUCETTI UND RÜSCHENDORF (2012) und PUCETTI UND WANG (2015) zeigen, Stichworte: Rearrangement-Algorithmus, Mixability Concept. Im Fall von zwei Dimensionen wird der „Worst Case“ für Copulas erreicht, die - im Gegensatz zur Intuition - im oberen Bereich eine lokale *Kontramotonie* aufweisen. Hier verhält sich der Value at Risk lokal superadditiv (vgl. Folie 93).

Der Fall der *Komonotonie* führt in der Regel zur *Additivität* des Value at Risk.

Literatur

COTTIN UND PFEIFER (2014): From Bernstein polynomials to Bernstein copulas. *Journal of Applied Functional Analysis*, 277 - 288.

DOFF (2011): Risk Management for Insurers. Risk Control, Economic Capital and Solvency II. Risk Books, London, 2nd ed.

HUMMEL UND MÄRKERT (2012): Stochastische Risikoaggregation. In: Bennemann et al. (Hrsg.): Handbuch Solvency II. Von der Standardformel zum Internen Modell, vom Governance-System zu den MaRisk VA, Schäffer-Poeschl, Stuttgart, 203 - 219.

JOE (1997): Multivariate Models and Dependence Concepts. Chapman & Hall / CRC, London.

MCNEIL, FREY UND EMBRECHTS (2005): Quantitative Risk Management. Concepts - Techniques - Tools. Princeton Univ. Press, Princeton.

MAI UND SCHERER (2012): Simulating Copulas. Stochastic Models, Sampling Algorithms, and Applications. Imp. College Press, London.

NELSEN (2006): An Introduction to Copulas. Springer, N.Y., 2nd ed.

PFEIFER (2013): Correlation, tail dependence and diversification. In: C. Becker, R. Fried, S. Kuhnt (Hrsg.): Robustness and Complex Data Structures. Festschrift in Honour of Ursula Gather, 301 - 314, Springer, Berlin.

PFEIFER ET AL: (2016): New copulas based on general partitions-of-unity and their applications to risk management. Dependence Modeling 4, 123 – 140.

PUCETTI UND RÜSCHENDORF (2012): Computation of sharp bounds on the distribution of a function of dependent risks. J. Comp. Appl. Math. 236, 1833 - 1840.

PUCETTI UND WANG (2015): Detecting complete and joint mixability. J. Comp. Appl. Math. 280, 174 - 187.

REISS UND THOMAS (2001): Statistical Analysis of Extreme Values. With Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields. Birkhäuser, Basel, 2nd ed.