

# Partition-of-Unity Copulas

mit Anwendungen im Risikomanagement



Dietmar Pfeifer  
Institut für Mathematik  
Universität Oldenburg

Nachwuchsworkshop für junge Mathematiker  
Tagungsstätte Loccum, 10. - 12.10.2019

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## Agenda

1. Grundzüge der Copula-Theorie
2. Partition-of-Unity Copulas
3. Anwendungen im Risikomanagement
4. Literatur

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

Die Modellierung stochastischer Abhängigkeiten hat in den letzten Jahren im Bereich der Risikotheorie und des Risikomanagements stark an Bedeutung gewonnen, insbesondere im Zusammenhang mit Internen Modellen unter Solvency II.

In diesem Vortrag soll ein Überblick über klassische und moderne Copula-Modelle gegeben werden, mit einem Fokus auf die in den letzten vier Jahren neu entwickelten Partition-of-Unity Copulas, die als eine gewisse Verallgemeinerung der nicht-parametrischen Bernstein-Copulas angesehen werden können.

Diese Copula-Modelle können auch mit kleinen und mittelgroßen Datensätzen sehr effektiv und mit wenig Aufwand auch in hohen Dimensionen (vor allem in EXCEL-Arbeitsblättern) eingesetzt werden, wobei eine Berücksichtigung von Tail-Abhängigkeiten ebenfalls möglich ist.

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

**Satz von Sklar:** Es sei  $H$  eine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_n$ . Dann existiert eine Copula  $C$ , so dass

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad \text{für alle } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Wenn alle Randverteilungsfunktionen stetig sind, ist die Copula eindeutig bestimmt, anderenfalls ist sie nur eindeutig auf den Wertebereichen der  $F_1, \dots, F_n$  bestimmt. Umgekehrt gilt bei Stetigkeit: bezeichnen  $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$  die (Pseudo-) Inversen der Randverteilungsfunktionen, dann ist

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad \text{für } u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$$

eine Repräsentation der Copula.

[Pseudo-Inverse einer Verteilungsfunktion  $F$ :  $F^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}$ ]

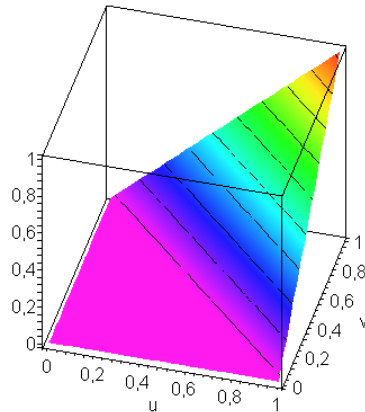
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

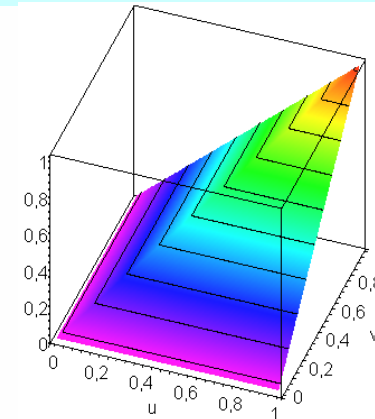
Mit anderen Worten: Eine Copula  $C$  ist eine mehrdimensionale Verteilungsfunktion, deren Randverteilungsfunktionen uniform sind.

*Fréchet-Hoeffding-Schranken:*

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n u_i + 1 - n, 0 \right\} =: \mathcal{W}^n(\mathbf{u}) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq \mathcal{M}^n(\mathbf{u}) := \min \{u_1, \dots, u_n\}.$$



Fall  $n = 2$



# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

Copula-Dichte: Im Fall der Existenz einer Dichte  $h$  für die Verteilungsfunktion  $H$  und Randdichten  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  gilt für die Copula-Dichte nach dem Satz von Sklar:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} C(u_1, \dots, u_n) = \frac{h(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))}{\prod_{i=1}^n f_i(F_i^{-1}(u_i))}, \quad (u_1, \dots, u_n) \in (0, 1)^n.$$

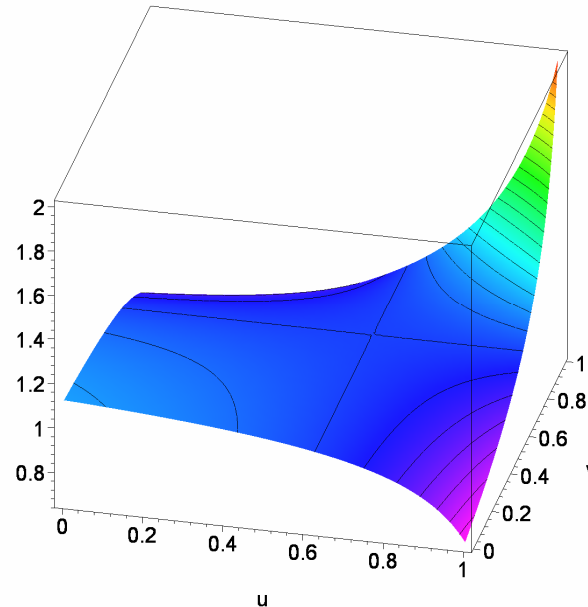
Beispiel :  $H(u, v) = \frac{uv}{2}(5 - 2u - 2v + uv)$ ,  $F_1(u) = \frac{u}{2}(3 - u)$ ,  $F_2(v) = F_1(v)$ ,

$$h(u, v) = \frac{5}{2} - 2u - 2v + 2uv, \quad f_1(u) = \frac{3}{2} - u, \quad f_2(v) = f_1(v), \quad F_1^{-1}(u) = \frac{3 + \sqrt{9 - 8u}}{2}, \quad F_2^{-1}(v) = F_1^{-1}(v),$$

$$c(u, v) = 2 \left( \frac{2}{\sqrt{9 - 8u}\sqrt{9 - 8v}} - \frac{1}{\sqrt{9 - 8u}} - \frac{1}{\sqrt{9 - 8v}} + 1 \right), \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie



$$c(u, v) = 2 \left( \frac{2}{\sqrt{9 - 8u}\sqrt{9 - 8v}} - \frac{1}{\sqrt{9 - 8u}} - \frac{1}{\sqrt{9 - 8v}} + 1 \right), \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

- Eine Copula hängt nicht von den Randverteilungen der Einzelrisiken ab.
- Eine Copula charakterisiert bei Stetigkeit der Randverteilungen die gemeinsame Abhängigkeitsstruktur der Einzelrisiken eindeutig.
- Eine Copula ist invariant gegen alle gleichsinnig monotonen Transformationen der Einzelrisiken, insbesondere nichtlineare.
- Paarweise Korrelationen zwischen den Einzelrisiken können über die Copula ausgedrückt werden, aber nicht umgekehrt.
- Stochastische Mischungen von Copulas sind wieder Copulas.



# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### A) Parametrische (elliptische) Copulas

Gauß-Copula:

$$C_{\Sigma}^G(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{v}^{\text{tr}} \Sigma^{-1} \mathbf{v}\right) dv_1 \cdots dv_n, \quad (u_1, \dots, u_n) \in (0, 1)^n$$

mit  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv$ ,  $x \in \mathbb{R}$  und  $\Sigma$  Korrelationsmatrix;  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^{\text{tr}}$ .

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### A) Parametrische (elliptische) Copulas

$t$ -Copula mit  $\nu$  Freiheitsgraden:

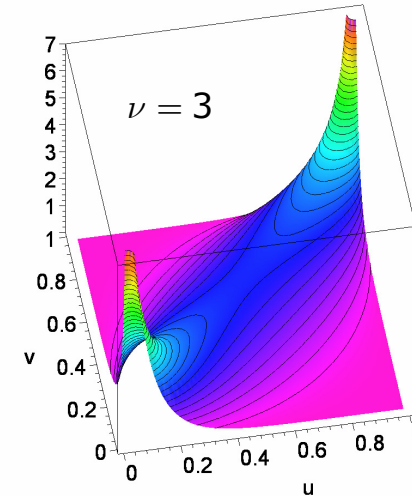
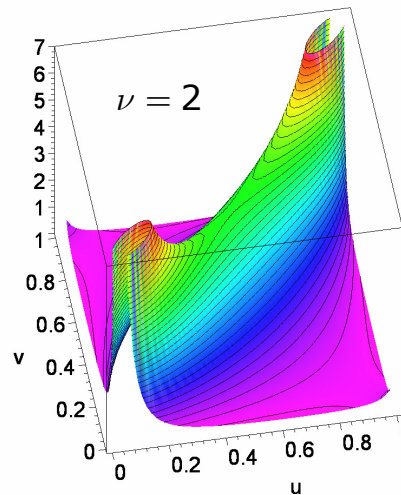
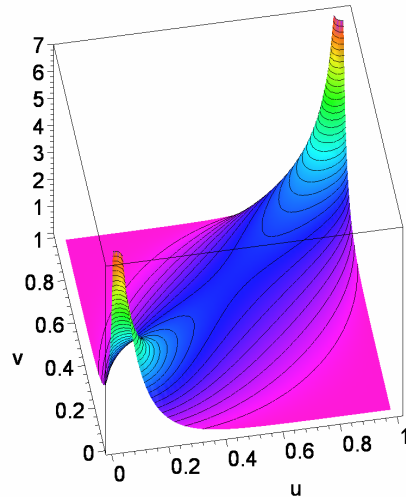
$$C_{\Sigma}^{t_{\nu}}(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_n)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{(\pi\nu)^n \det(\Sigma)}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{v}^{\text{tr}} \Sigma^{-1} \mathbf{v}\right)^{\left(-\frac{\nu+n}{2}\right)} dv_1 \dots dv_n, (u_1, \dots, u_n) \in (0, 1)^n$$

$$\text{mit } t_{\nu}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{v^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dv, x \in \mathbb{R}; \Sigma \text{ Korrelationsmatrix; } \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^{\text{tr}}.$$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### A) Parametrische (elliptische) Copulas



Dichten der bivariaten Gauß (links) und  $t$ -Copulas (rechts);  $\rho = 0,8$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### A) Parametrische (elliptische) Copulas

#### Simulation der Gauß-Copula:

- Berechne Cholesky-Zerlegung von  $\Sigma = AA^T$  (Korrelationsmatrix)
- Erzeuge Spaltenvektor  $\mathbf{Y}$  aus  $n$  unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallsvariablen
- Setze  $\mathbf{U} = \Phi(A\mathbf{Y})$  (koordinatenweise)

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### B) Archimedische Copulas

Diese sind charakterisiert durch ihren so genannten *Erzeuger*  $\varphi$  vermöge

$$C_n(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \right) \quad \text{für } u_1, \dots, u_n \in [0, 1].$$

Wichtigster Spezialfall:

$$\varphi(x) = -\ln x$$

mit

$$C_n(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \right) = \exp \left( \sum_{i=1}^n \ln u_i \right) = \prod_{i=1}^n u_i$$

(Unabhängigkeitscopula)

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### B) Archimedische Copulas

Charakterisierung "geeigneter" (so genannter *strikt*) Erzeuger:

Sei  $\varphi : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, streng monoton fallend und konvex mit  $\varphi(1) = 0$  und  $\lim_{z \downarrow 0} \varphi(z) = \infty$ ;  $\varphi^{-1}$  sei die zugehörige Inverse auf dem Intervall  $[0, \infty)$ . Dann ist

$$C_n(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \right) \quad \text{für } u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$$

eine Copula für  $n = 2$ . Sie ist eine Copula **für alle**  $n \geq 2$  genau dann, wenn  $\varphi^{-1}$  *total monoton* ist, d.h. wenn gilt

$$(-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \varphi^{-1}(s) \geq 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } s > 0.$$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### B) Archimedische Copulas

Nach einem klassischen Satz von *Bernstein* lassen sich die Inversen solcher Erzeuger als Laplace-Transformierte nicht-negativer Zufallsvariablen  $Z$  darstellen über

$$\varphi^{-1}(s) = E(e^{-sZ}), \quad s \geq 0,$$

denn:

$$\varphi^{-1}(0) = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(s) = 0, \quad \text{und} \quad (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \varphi^{-1}(s) = E(Z^k e^{-sZ}) \geq 0$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $s > 0$  (vgl. Joe (2015), Chapter 4 und Appendix).

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### B) Archimedische Copulas

*Clayton-Copula:*

$$C_{\theta}(u_1, \dots, u_n) = \left[ \sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} - n + 1 \right]^{-1/\theta}, \quad \mathbf{u} \in (0, 1]^n, \quad \theta > 0$$

für  $P^Z = \Gamma(\alpha, \alpha)$  mit  $\alpha = \frac{1}{\theta} > 0$  und Dichte

$$f_Z(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \alpha^{\alpha} e^{-\alpha z}, \quad z > 0, \quad \text{also } \varphi^{-1}(s) = E(e^{-sZ}) = \left( \frac{\alpha}{\alpha + s} \right)^{\alpha}, \quad s \geq 0, \text{ d.h.}$$

$$\varphi(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}, \quad t \in (0, 1].$$



# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### B) Archimedische Copulas

*Frank-Copula:*

$$C_{\theta}(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + (e^{-\theta} - 1) \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{e^{-\theta u_i} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right\} \right), \quad \mathbf{u} \in (0, 1]^n, \quad \theta > 0$$

für  $P^Z = \mathcal{LS}(e^{-\theta})$  (Log-Series-Verteilung über  $\mathbb{N}$ ) wegen

$$\varphi^{-1}(s) = E(e^{-sZ}) = -\frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left( (1 - e^{-\theta}) e^{-s} \right)^k}{k} = \frac{\ln(1 - (1 - e^{-\theta}) e^{-s})}{\theta}, \quad s \geq 0, \text{ d.h.}$$

$$\varphi(t) = -\ln \frac{1 - e^{-\theta t}}{1 - e^{-\theta}}, \quad t \in (0, 1].$$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### B) Archimedische Copulas

*Gumbel-Copula:*

$$C_{\theta}(u_1, \dots, u_n) = \exp\left(-\left\{\sum_{i=1}^n (-\ln(u_i))^{\theta}\right\}^{1/\theta}\right), \mathbf{u} \in (0, 1]^n, \theta \geq 1$$

Die Zufallsvariable  $Z$  besitzt hier eine spezielle *positiv-stabile* Verteilung mit Laplace-Transformierter

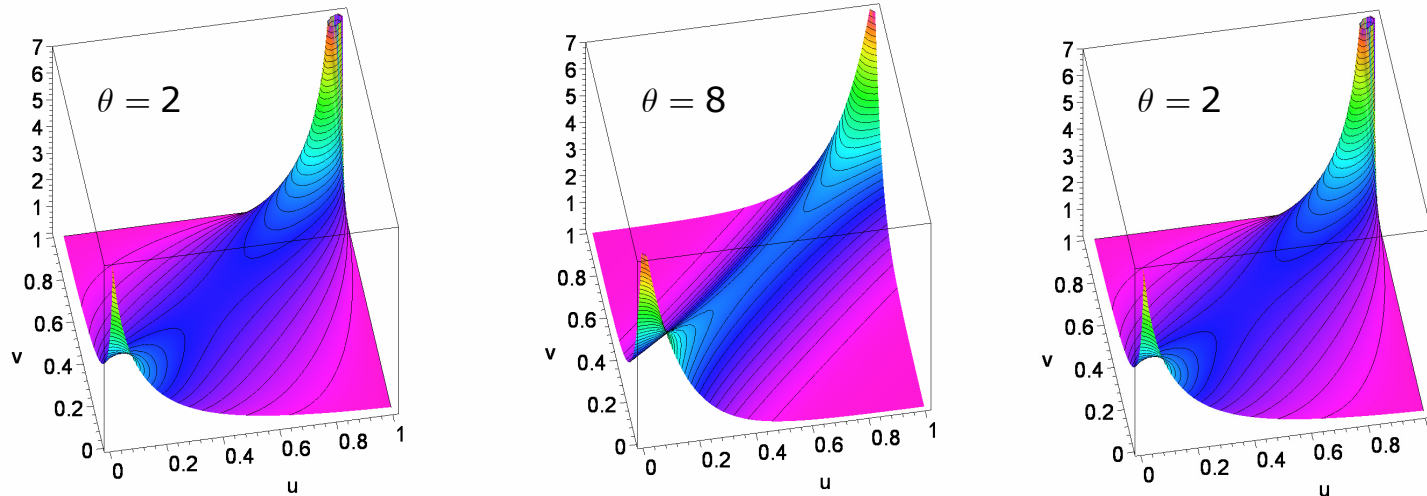
$$\varphi^{-1}(s) = E(e^{-sZ}) = e^{-s^{1/\theta}}, s \geq 0.$$

Die zugehörige Verteilung besitzt keine explizite Darstellung der Dichte oder Verteilungsfunktion.

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### B) Archimedische Copulas



Dichten der bivariaten Clayton-, Frank- und Gumbel-Copula

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### B) Archimedische Copulas

Simulation: Die Erzeugung von Zufallsvektoren  $\mathbf{U}$  mit einer Copula von diesem Typ erfolgt in drei Schritten (vgl. MCNEIL, FREY UND EMBRECHTS (2005)):

- Erzeuge eine Zufallszahl  $Z$  mit der Misch-Verteilungsfunktion  $G$ .
- Erzeuge (auch von  $Z$ ) unabhängige Standardzufallszahlen  $W_1, \dots, W_n$ .

- Setze  $\mathbf{U} := \left( \frac{\hat{G}(-\ln(W_1))}{Z}, \dots, \frac{\hat{G}(-\ln(W_n))}{Z} \right)$

mit der zugehörigen Laplace-Transformierten  $\hat{G}(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dG(x), t \geq 0$ .

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### C) Vine Copulas (Pair Copula Constructions)

Vine (bot.): Kletterpflanze

Konstruktion der gemeinsamen Verteilung durch paarweise bedingte Verteilungen

Veranschaulichung in 3 Dimensionen über Dichten ( $\rightarrow$  Satz von Sklar):

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f_{3|12}(z|x, y) \cdot f_{2|1}(y|x) \cdot f_1(x) \\ &= c_{13|2}(F_{1|2}(x|y), F_{3|2}(z|y)|y) \cdot c_{23}(F_2(y), F_3(z)) \cdot c_{12}(F_1(x), F_2(y)) \cdot f_3(z) \cdot f_2(y) \cdot f_1(x) \end{aligned}$$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### C) Vine Copulas (Pair Copula Constructions)

Idee:  $c_{13|2}(\bullet, \bullet | y) = c_{13}(\bullet, \bullet)$  unabhängig von  $y$  wählen, dann gilt:

$$f(x, y, z) = c_{13}(F_{1|2}(x|y), F_{3|2}(z|y)) \cdot c_{23}(F_2(y), F_3(z)) \cdot c_{12}(F_1(x), F_2(y)) \cdot f_3(z) \cdot f_2(y) \cdot f_1(x).$$

Es werden also nur *zweidimensionale* Copulas für die Modellierung benötigt.

Problem: Reihenfolge der bedingenden Variablen spielt eine wesentliche Rolle.

(vgl. CZADO (2019))

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### C) Vine Copulas (Pair Copula Constructions)

Beispiel: alle Copula-Dichten identisch:

$$c(u, v) = 2(u + v - 2uv), \quad u, v \in [0, 1]$$

$$F_{1|2}(x|y) = 1 - e^{-xy}, \quad F_{3|2}(z|y) = 1 - e^{-zy}, \quad F_2(y) = 1 - e^{-y}, \quad x, y, z > 0$$

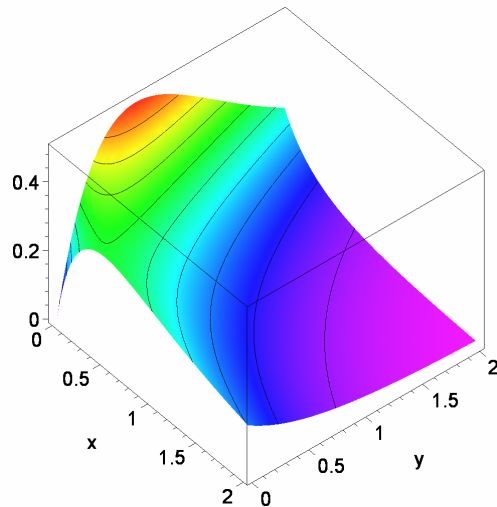
$$F_1(x) = \frac{x}{1+x}, \quad F_3(z) = \frac{z}{1+z}, \quad x, z > 0$$

$$f(x, y, z) = 4e^{-y} \frac{(1 - (1-x)e^{-y})(1 - (1-z)e^{-y})}{(1+x)^3(1+z)^3}, \quad x, y, z > 0$$

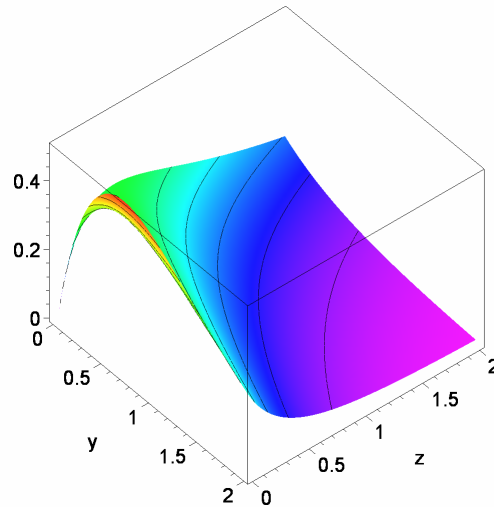
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

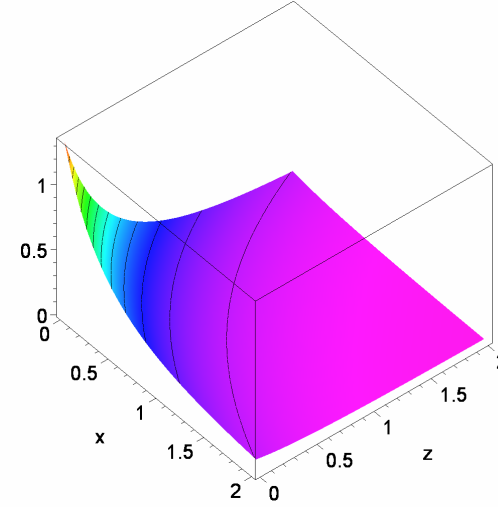
### C) Vine Copulas (Pair Copula Constructions)



$f_{12}(x, y)$



$f_{13}(x, z)$



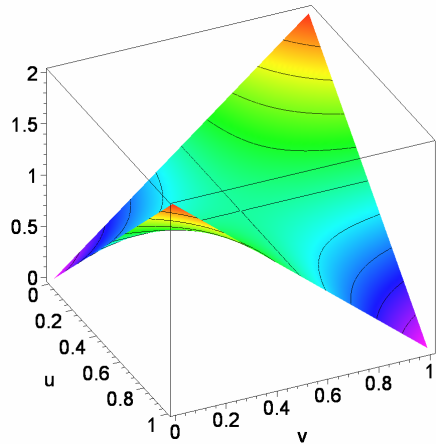
$f_{23}(y, z)$



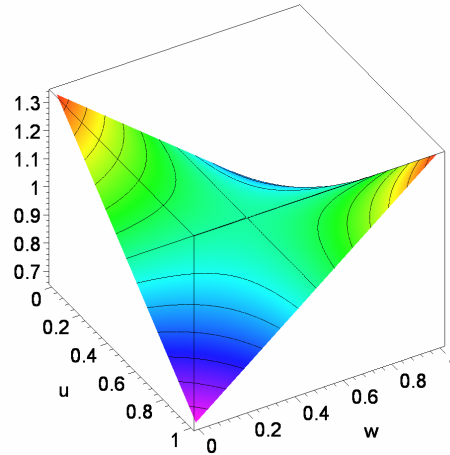
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

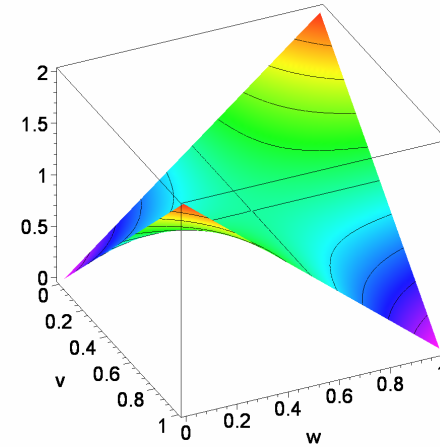
### C) Vine Copulas (Pair Copula Constructions)



$$c_{12}(u, v) = 2(u + v - 2uv)$$



$$c_{13}(v, w) = \frac{2}{3}(2 - u - w + 2uw)$$



$$c_{23}(v, w) = 2(v + w - 2vw)$$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### C) Vine Copulas (Pair Copula Constructions)

Gegenbeispiel:  $S, T \sim U[0,1]$ ,  $X = \frac{T}{1-T}$ ,  $Y = \frac{\ln(1-S)}{\ln(1-T)}$ ,  $Z = \frac{1-S}{S}$ , dann sind alle

Randverteilungen vom Pareto-Typ mit VF  $F_i(x) = \frac{x}{1+x}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $x > 0$ ,  $X$  und  $Z$

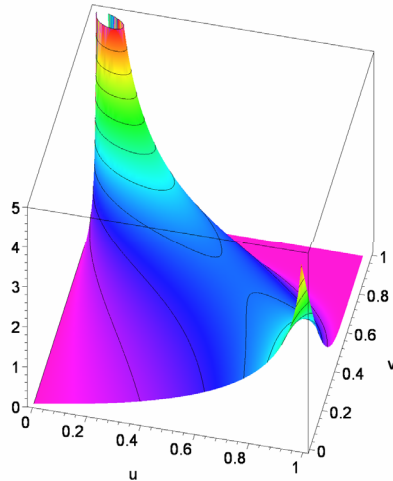
sind stochastisch unabhängig, aber die Copulas  $C_{13|2}(\bullet, \bullet | y)$  sind singulär und hängen explizit von  $y$  ab! [Unter  $Y = y$  gilt nämlich  $W = (1-U)^y$ ] **Jetzt: Unabhängigkeit**

$$\text{Dann: } c_{12}(u, v) = -\ln(1-u) \frac{(1-u)^{\left(\frac{1}{1-v}\right)}}{(1-u)(1-v)^2}, \quad c_{13}(u, w) \equiv 1, \quad c_{23}(v, w) = \frac{w^{\left(\frac{1-v}{v}\right)}}{v^2} \ln(w).$$

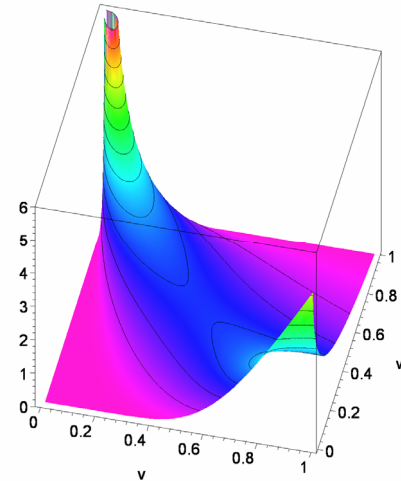
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### C) Vine Copulas (Pair Copula Constructions)



$$c_{12}(u, v) = -\ln(1 - u) \frac{(1 - u)^{\left(\frac{1}{1-v}\right)}}{(1 - u)(1 - v)^2}$$

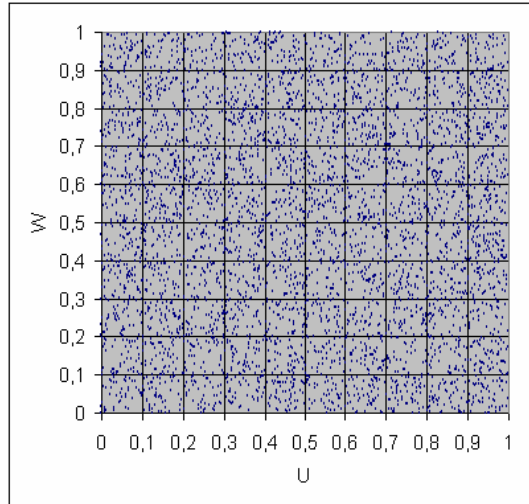


$$c_{23}(v, w) = \frac{w^{\left(\frac{1-v}{v}\right)}}{v^2} \ln(w)$$

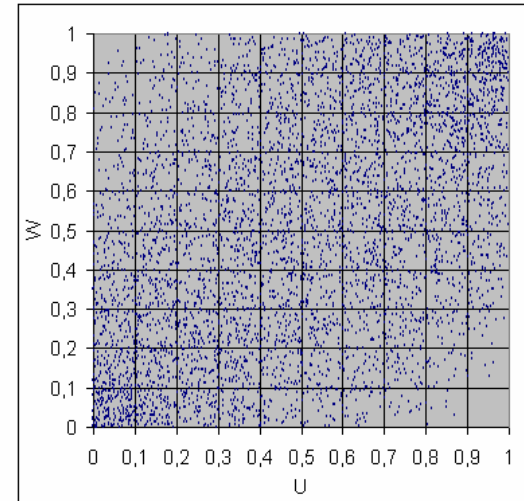
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 1. Grundzüge der Copula-Theorie

### C) Vine Copulas (Pair Copula Constructions)



Original-Copula (Unabhängigkeit)



Vine-Copula (schwache positive Abhängigkeit)

Scatterplots von je 5000 Copula-Simulationen

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

### A) Partitions of Unity (Zerlegungen der Eins)

Endliche Zerlegungen der Eins (PU) sind Familien  $\{\phi(m, k, \cdot) \mid 0 \leq k \leq m - 1, m \in \mathbb{N}\}$  von Funktionen, die durch folgende beiden Eigenschaften charakterisiert sind:

$$\int_0^1 \phi(m, k, u) du = \frac{1}{m} \quad \text{für } k = 0, \dots, m - 1$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \phi(m, k, \cdot) = 1 \quad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

### A) Partitions of Unity (Zerlegungen der Eins)

Jede endliche Zerlegung der Eins  $\{\phi(m, k, \cdot) | 0 \leq k \leq m-1, m \in \mathbb{N}\}$  erzeugt eine weitere (feinere) Zerlegung der Eins  $\{\phi_K(m, k, \cdot) | 0 \leq k \leq m-1, m \in \mathbb{N}\}$  mit

$$\phi_K(m, k, \cdot) := \sum_{j=0}^{K-1} \phi(K \cdot m, K \cdot k + j, \cdot), \quad k = 0, \dots, m-1 \quad \text{für beliebige } K \in \mathbb{N}$$

wegen

$$\int_0^1 \phi_K(m, k, u) du = \sum_{j=0}^{K-1} \int_0^1 \phi(K \cdot m, K \cdot k + j, u) du = \sum_{j=0}^{K-1} \frac{1}{K \cdot m} = \frac{1}{m}, \quad k = 0, \dots, m-1$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \phi_K(m, k, \cdot) = \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{k=0}^{m-1} \phi(K \cdot m, K \cdot k + j, \cdot) = \sum_{i=0}^{K \cdot m} \phi(K \cdot m, i, \cdot) = 1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

### A) Partitions of Unity (Zerlegungen der Eins)

Beispiele:

Rechteck-PU:  $\phi(m, k, u) = \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right]}(u)$

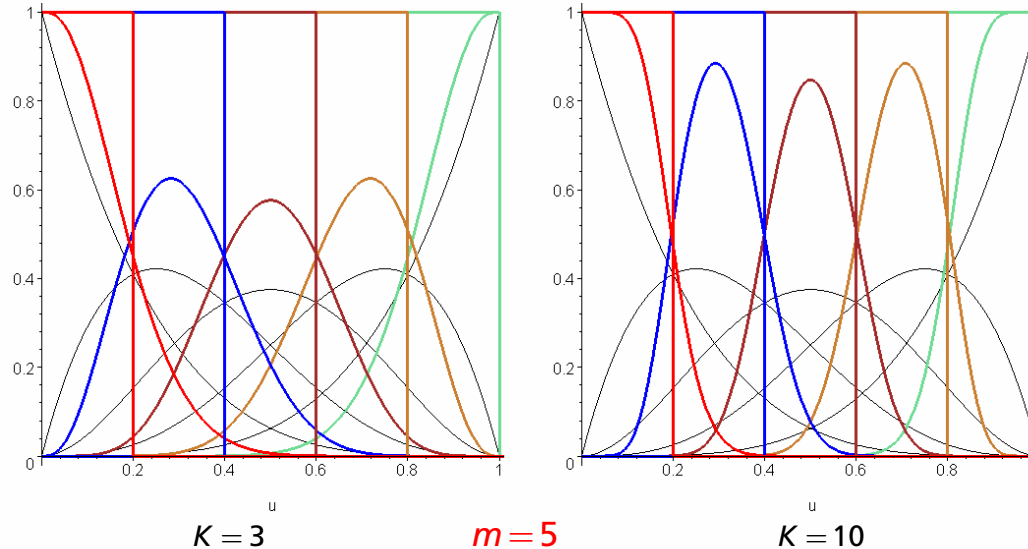
Binomial-PU:  $\phi(m, k, u) = \binom{m-1}{k} u^k (1-u)^{m-1-k}$

Dreieck-PU:  $\phi(m, k, u) = \max\left(0; 1 - \left|um - k - \frac{1}{2}\right|\right) + \max\left(0; \frac{1}{2} - mu^{\max(0; 1-k)} (1-u)^{\max(0; 2-m+k)}\right)$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

### A) Partitions of Unity (Zerlegungen der Eins)



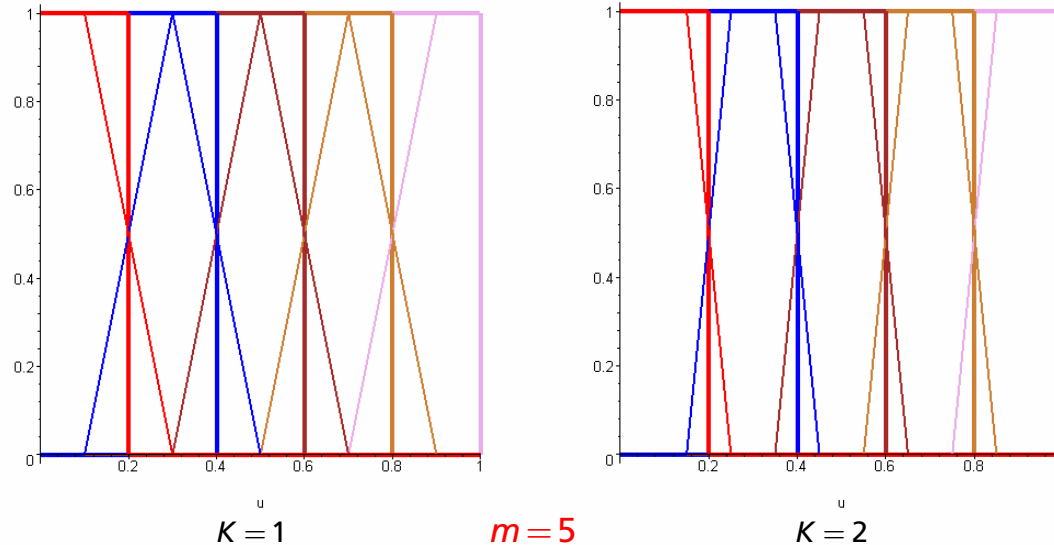
Rechteck- und Binomial-PU



# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

### A) Partitions of Unity (Zerlegungen der Eins)



Rechteck- und Dreieck-PU

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

### B) Endliche Partition-of-Unity Copulas

Gegeben seien Zerlegungen der Eins-Familien  $\{\phi_i(m_i, k_i, \bullet) \mid 0 \leq k_i \leq m_i - 1, i = 1, \dots, n\}$  mit  $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ . Ferner sei  $T$  ein diskreter  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor mit gleichverteilten Rändern über  $\prod_{i=1}^n \{0, \dots, m_i - 1\}$  und  $p(\bullet) = P(T = (\bullet))$ . ( $\rightarrow$  Kontingenztafel). Dann wird durch

$$c(u_1, \dots, u_n) := \sum_{k_n=0}^{m_n-1} \cdots \sum_{k_1=0}^{m_1-1} p(k_1, \dots, k_n) \prod_{i=1}^n m_i \phi_i(m_i, k_i, u_i), \quad (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$$

die Dichte einer  $n$ -dimensionalen Copula definiert (PU-Copula).

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 2. Partition-of-Unity Copulas

#### B) Endliche Partition-of-Unity Copulas

Beispiel: Binomial-PU mit

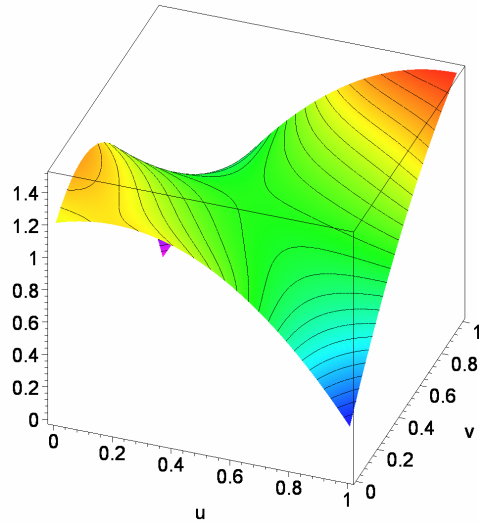
$P(T = (i, j))$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 0$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	00
$i = 1$	$\frac{5}{30}$	00	$\frac{5}{30}$
$i = 2$	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$

$$c(u, v) = \frac{3}{10} (4 + 2u + 4v - 28uv - 5u^2 - 8v^2 + 36uv^2 + 30u^2v - 30u^2v^2)$$

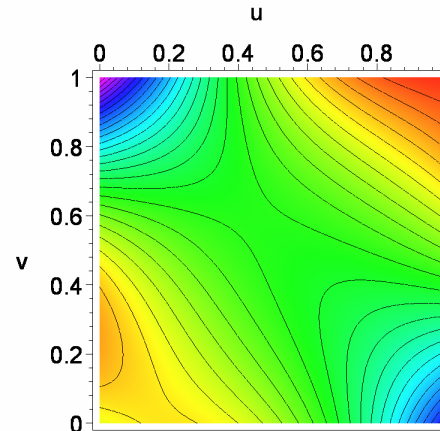
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

### B) Endliche Partition-of-Unity Copulas



3D-plot von  $c(u, v)$



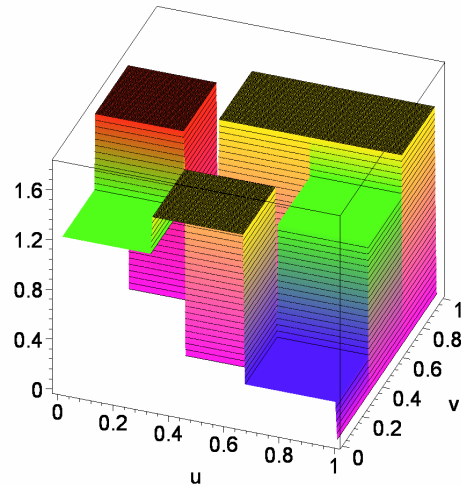
Höhenliniendiagramm

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

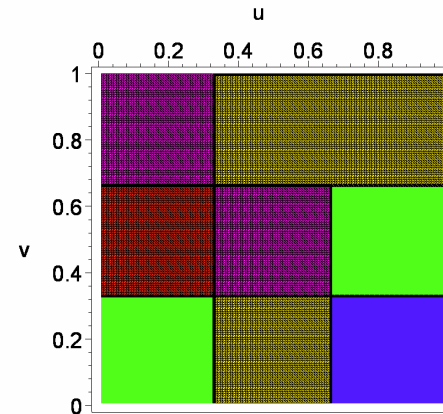
## 2. Partition-of-Unity Copulas

### B) Endliche Partition-of-Unity Copulas

Beispiel: Rechteck-PU:



3D-plot von  $c(u, v)$



Höhenliniendiagramm

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

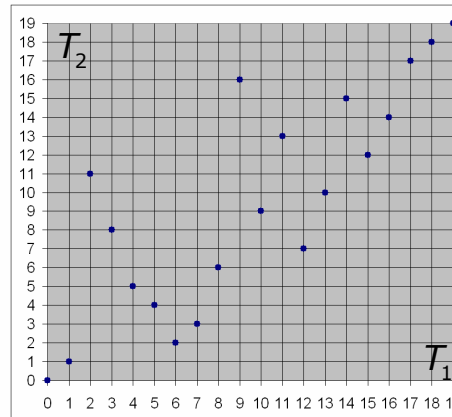
## 2. Partition-of-Unity Copulas

### B) Endliche Partition-of-Unity Copulas

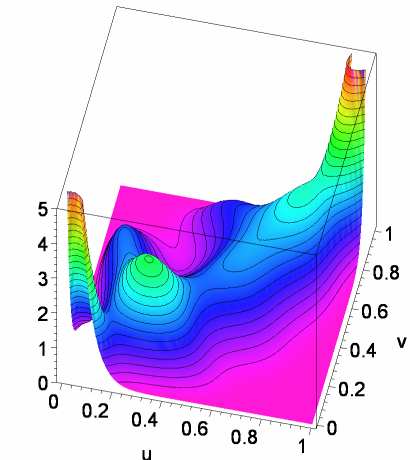
In der praktischen Anwendung kann die Verteilung von  $T$  z.B. aus der empirischen Copula von Daten über die zugehörigen Ränge bestimmt werden.

Beispiel (COTTIN UND PFEIFER 2014) mit Binomial-PU:

$i$	$X$	$Y$	$T$	$i$	$X$	$Y$	$T$		
1	0,468	0,966	3	8	11	0,676	0,918	4	5
2	9,951	2,679	19	19	12	1,184	1,336	9	16
3	0,866	0,897	7	3	13	0,960	0,933	8	6
4	6,731	2,249	18	18	14	1,972	1,077	15	12
5	1,421	0,956	12	7	15	1,549	1,041	13	10
6	2,040	1,141	16	14	16	0,819	0,899	5	4
7	2,967	1,707	17	17	17	0,063	0,710	0	0
8	1,200	1,008	10	9	18	1,280	1,118	11	13
9	0,426	1,065	2	11	19	0,824	0,894	6	2
10	1,946	1,162	14	15	20	0,227	0,837	1	1



Trägerpunkte von  $T$



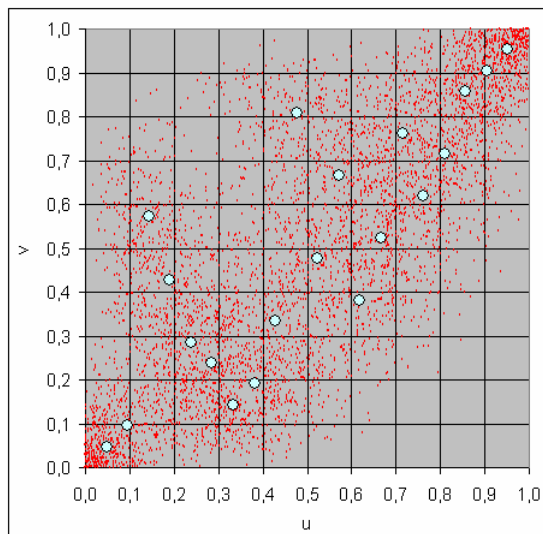
Bernstein-Copula-Dichte

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

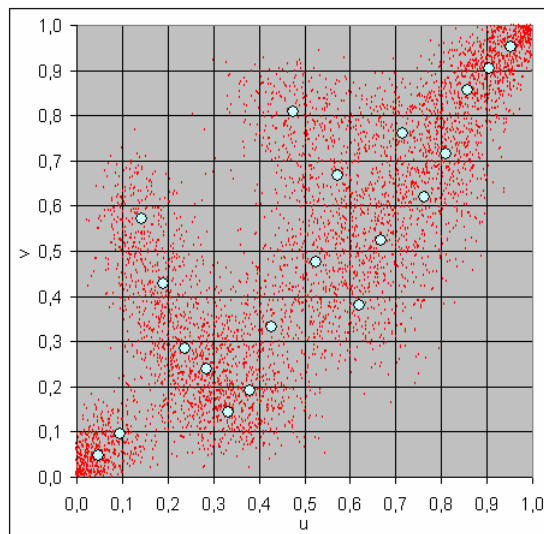
## 2. Partition-of-Unity Copulas

### C) Beispiele von Simulationen

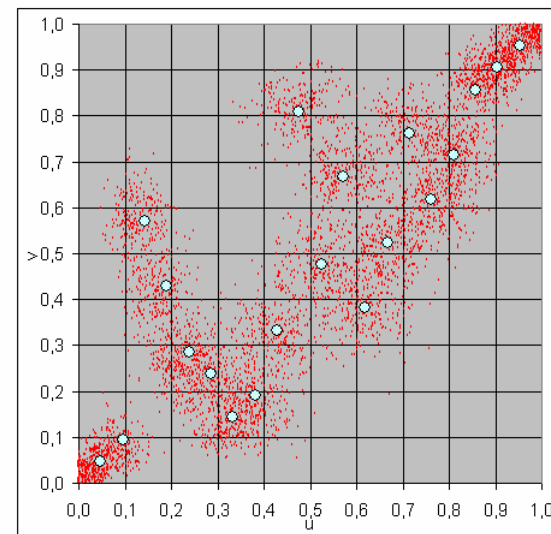
Bernstein-Copula (rot) vs. empirische Copula (weiß)



$K = 1$



$K = 2$



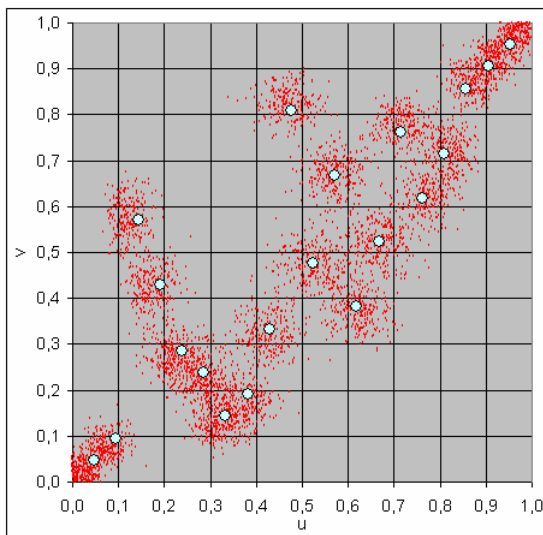
$K = 5$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

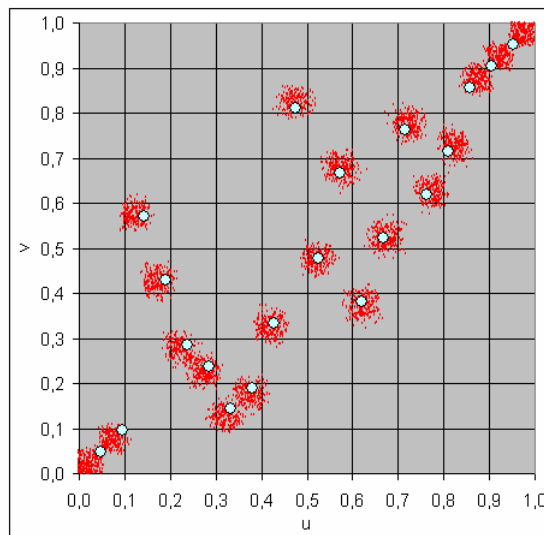
## 2. Partition-of-Unity Copulas

### C) Beispiele von Simulationen

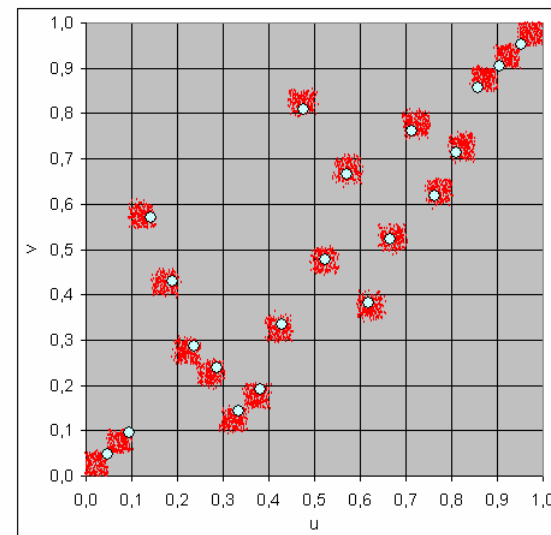
Bernstein-Copula (rot) vs. empirische Copula (weiß)



$K = 10$



$K = 100$



$K = 500$

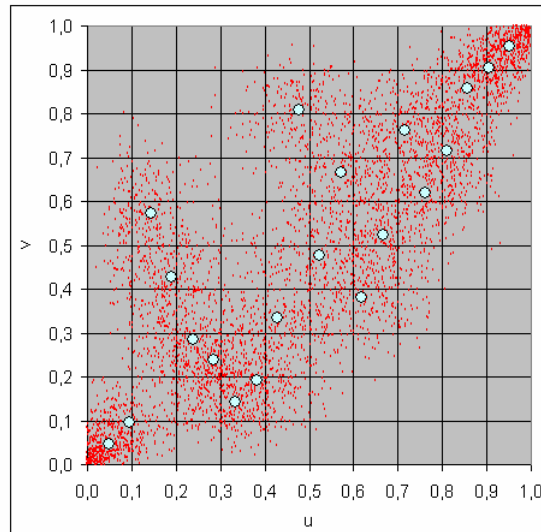


# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

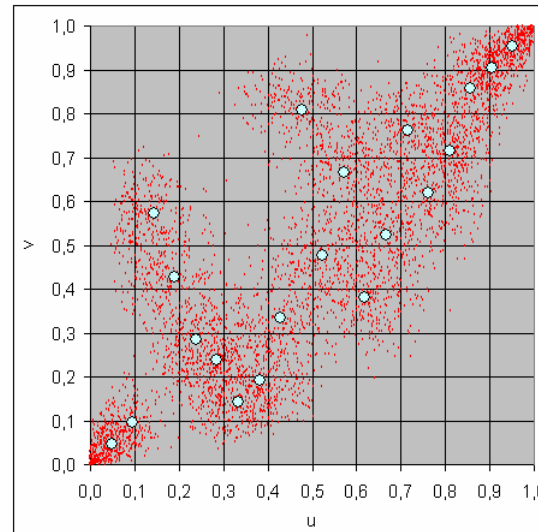
## 2. Partition-of-Unity Copulas

### C) Beispiele von Simulationen

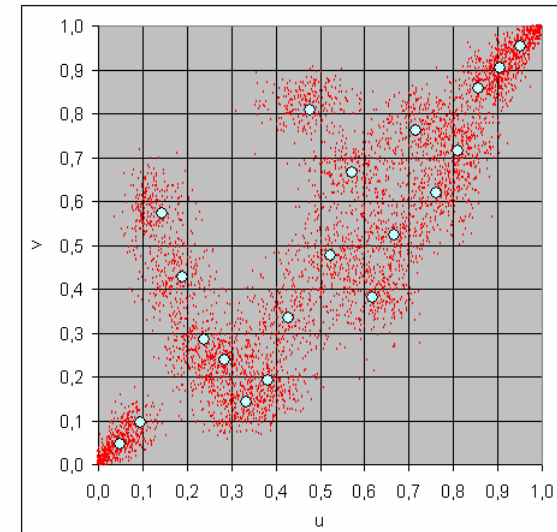
Bernstein-Copula (rot, mit positiver Abhängigkeit) vs. empirische Copula (weiß)



$K = 2$



$K = 3$



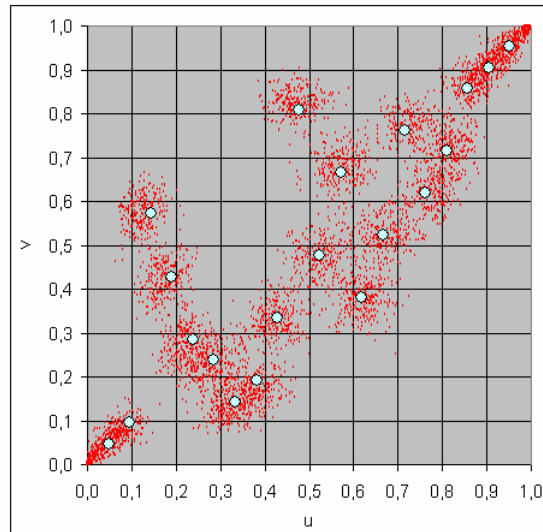
$K = 5$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

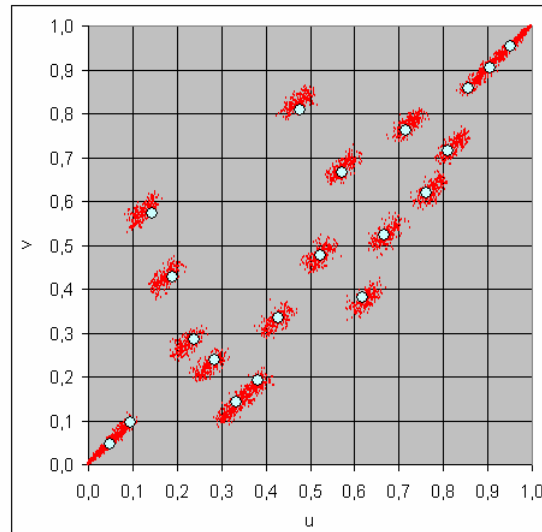
## 2. Partition-of-Unity Copulas

### C) Beispiele von Simulationen

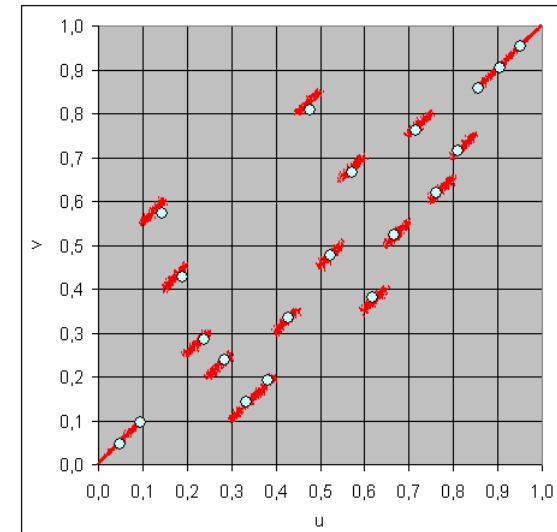
Bernstein-Copula (rot, mit positiver Abhängigkeit) vs. empirische Copula (weiß)



$K = 10$



$K = 100$



$K = 500$

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 2. Partition-of-Unity Copulas

D) Abzählbar unendliche Partition-of-Unity Copulas

Es sei  $\{\varphi_{ki}(u)\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$ ,  $k = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$  eine Familie von Zähldichten über  $\mathbb{Z}^+$  mit Parameter  $u \in (0, 1)$ , d.h.

$$\varphi_{ki}(u) \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{ki}(u) = 1 \quad \text{mit} \quad \alpha_{ki} := \int_0^1 \varphi_{ki}(u) du > 0, \quad i \in \mathbb{Z}^+.$$

Ferner sei  $T$  ein diskreter  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor mit  $p(\bullet) = P(T = (\bullet))$  und Randverteilungen

$$P(T_k = i) = \alpha_{ki}, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad k = 1, \dots, n.$$

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 2. Partition-of-Unity Copulas

#### D) Abzählbar unendliche Partition-of-Unity Copulas

Dann wird durch

$$c(u_1, \dots, u_n) := \sum_{i_n=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_1=0}^{\infty} p(i_1, \dots, i_n) \prod_{k=1}^n \frac{\varphi_{k,i_k}(u_k)}{\alpha_{k,i_k}} = \sum_{i_n=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_1=0}^{\infty} p(i_1, \dots, i_n) \prod_{k=1}^n f_{k,i_k}(u_k), \quad (u_1, \dots, u_n) \in (0, 1)^n$$

die Dichte einer  $n$ -dimensionalen Copula definiert (abzählbar unendliche Partition-of-Unity copula, APU-Copula).

Die zu  $T$  gehörige Copula  $C_T$  heißt auch *Driver* der APU-Copula. Für praktische Anwendungen wird  $C_T$  aus den Daten ermittelt ( $\leftrightarrow$  empirische Copula).

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 2. Partition-of-Unity Copulas

D) Abzählbar unendliche Partition-of-Unity Copulas

#### Negative Binomial-Copula:

Für  $a_k > 0$  (feste Parameter) und  $k = 1, \dots, n$ ,  $i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $u \in [0, 1]$ :

$$\varphi_{ki}^{NB}(u) = \binom{a_k + i - 1}{i} u^i (1 - u)^{a_k}, \quad \alpha_{ki}^{NB} = \int_0^1 \varphi_{ki}^{NB}(u) du = \frac{a_k}{(a_k + i)(a_k + i + 1)}$$

Die  $f_{ki}^{NB}$  sind Dichten einer Beta-Verteilung mit den Parametern  $(i + 1, a_k + 1)$ . Es folgt

$$c^{NB}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{k=1}^n (a_k + 1) \sum_{i_n=0}^{\infty} \dots \sum_{i_1=0}^{\infty} p(i_1, \dots, i_n) \prod_{k=1}^n \binom{a_k + i_k + 1}{i_k} u_k^{i_k} (1 - u_k)^{a_k}, \quad (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n.$$

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

D) Abzählbar unendliche Partition-of-Unity Copulas

### Poisson-Copula:

Für  $a_k > 0$  und  $L(u) := -\ln(1 - u)$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $u \in [0, 1]$ :

$$\varphi_{ki}^P(u) = (1 - u)^{a_k} \frac{a_k^i L(u)^i}{i!}, \quad \alpha_{ki}^P = \int_0^1 \varphi_{ki}^P(u) du = \left( \frac{a_k}{a_k + 1} \right)^i \left( 1 - \frac{a_k}{a_k + 1} \right)$$

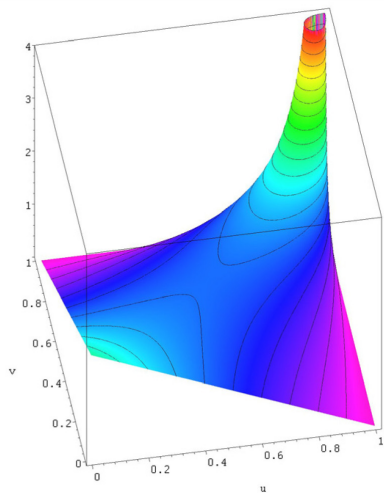
Die  $f_{ki}^P$  sind Dichten einer log-transformierten Gamma-Verteilung. Es folgt

$$c^P(u_1, \dots, u_n) = \prod_{k=1}^n (a_k + 1) \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} p(i_1, \dots, i_n) \prod_{k=1}^n \frac{(a_k + 1)^{i_k}}{i_k!} L^{i_k}(u_k) (1 - u_k)^{i_k}, \quad (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n.$$

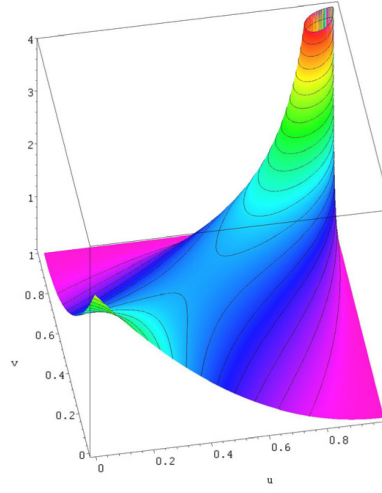
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

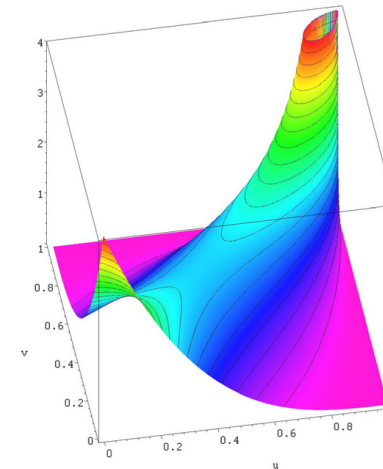
### D) Abzählbar unendliche Partition-of-Unity Copulas



$$a_1 = a_2 = 1$$



$$a_1 = a_2 = 2$$



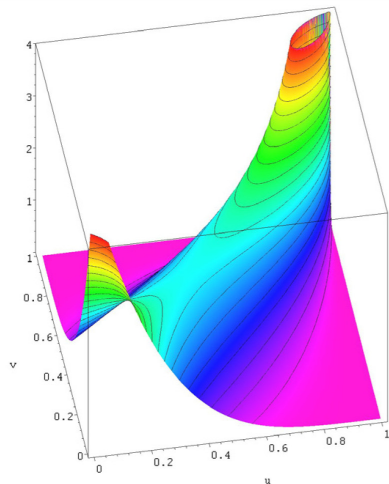
$$a_1 = a_2 = 3$$

Negativ-Binomial-Copula Dichten, Driver ist obere Fréchet-Hoeffding-Schranke

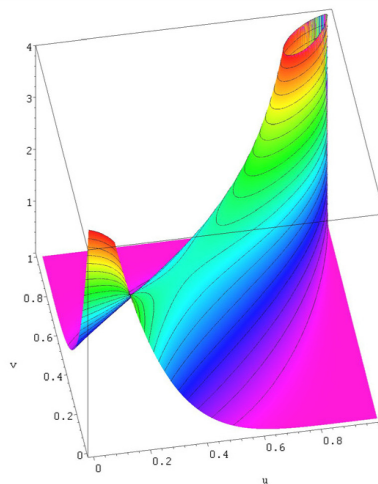
## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 2. Partition-of-Unity Copulas

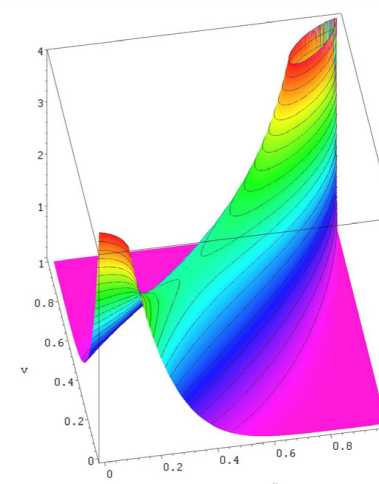
#### D) Abzählbar unendliche Partition-of-Unity Copulas



$$a_1 = a_2 = 4$$



$$a_1 = a_2 = 5$$



$$a_1 = a_2 = 6$$

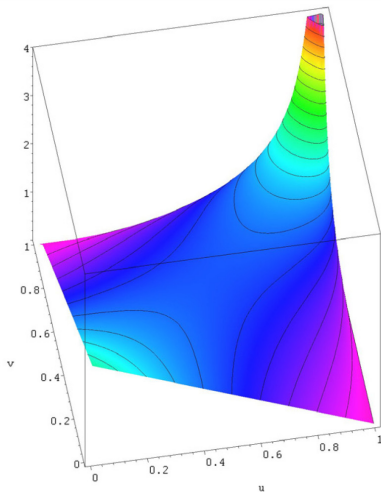
Negativ-Binomial-Copula Dichten, Driver ist obere Fréchet-Hoeffding-Schranke



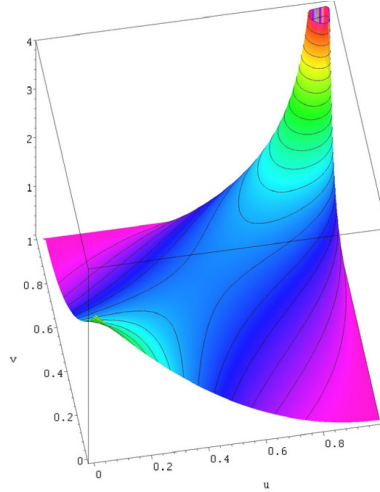
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

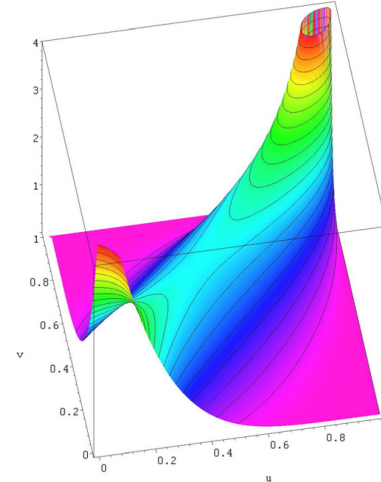
### D) Abzählbar unendliche Partition-of-Unity Copulas



$$a_1 = a_2 = 1$$



$$a_1 = a_2 = 2$$



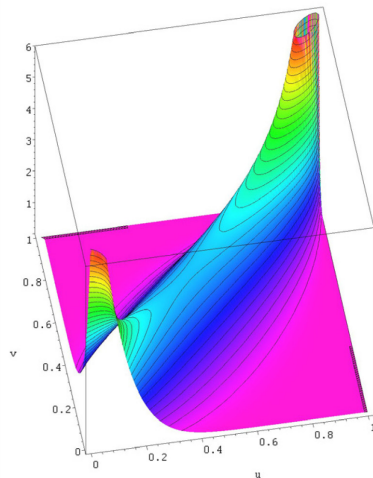
$$a_1 = a_2 = 5$$

Poisson-Copula Dichten, Driver ist obere Fréchet-Hoeffding-Schranke

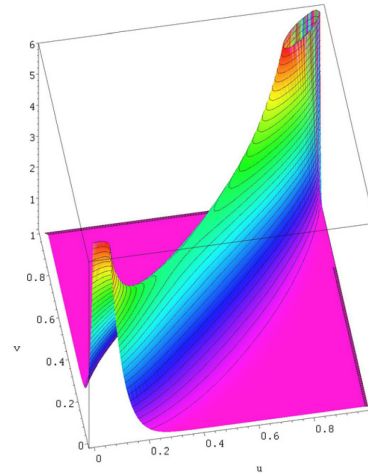
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

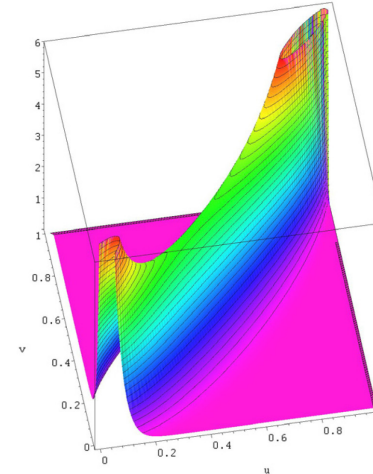
### D) Abzählbar unendliche Partition-of-Unity Copulas



$$a_1 = a_2 = 10$$



$$a_1 = a_2 = 20$$



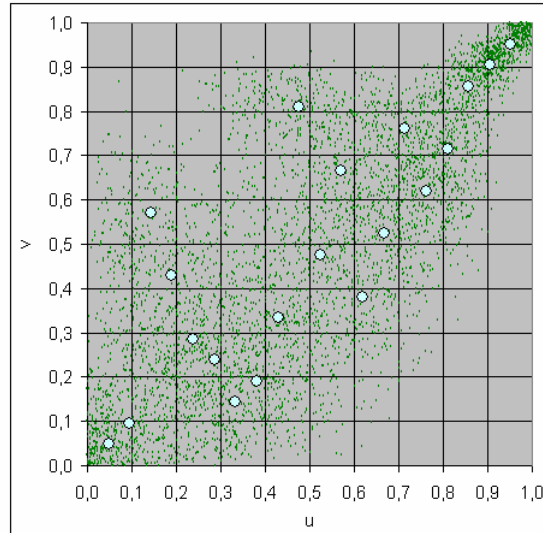
$$a_1 = a_2 = 30$$

Poisson-Copula Dichten, Driver ist obere Fréchet-Hoeffding-Schranke

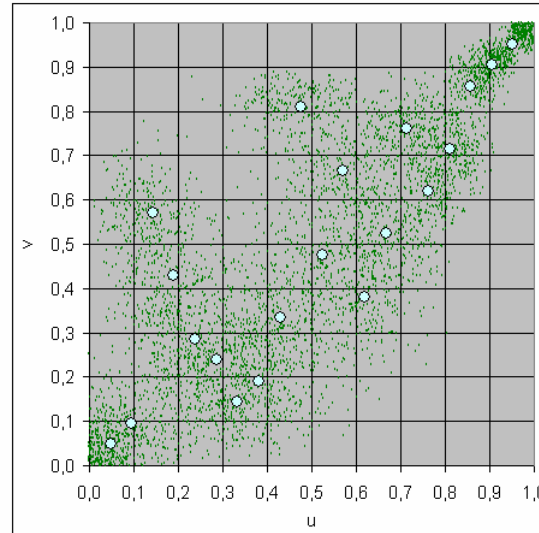
## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 2. Partition-of-Unity Copulas

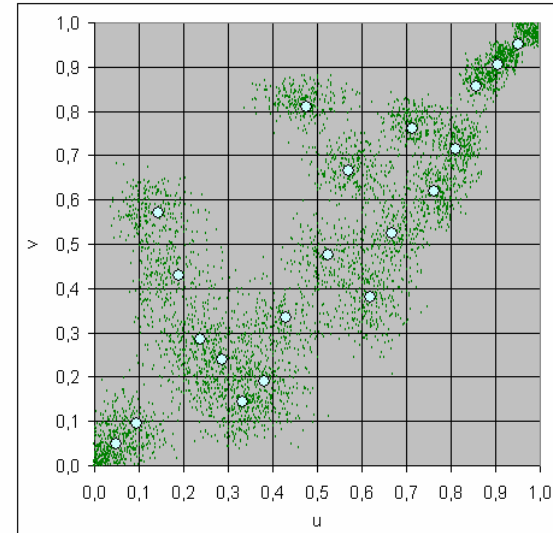
E) Beispiele von Simulationen (zu COTTIN UND PFEIFER 2014): Neg. Binomial-Copula



$$a_1 = a_2 = 10$$



$$a_1 = a_2 = 20$$



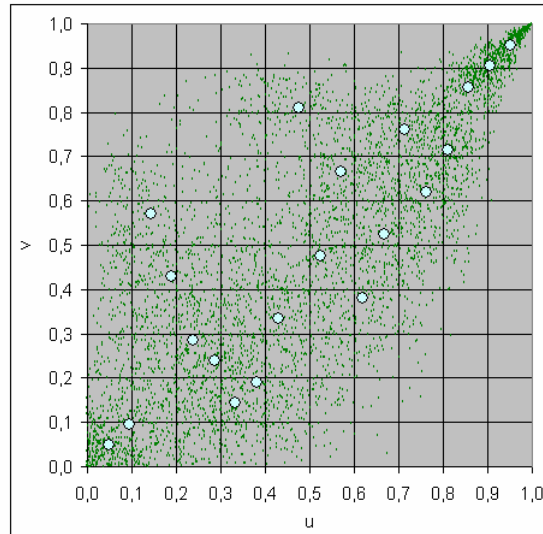
$$a_1 = a_2 = 50$$

Copula-Driver ist hier die empirische Rechteck-Copula (Schachturm-Copula, Rook-Copula)

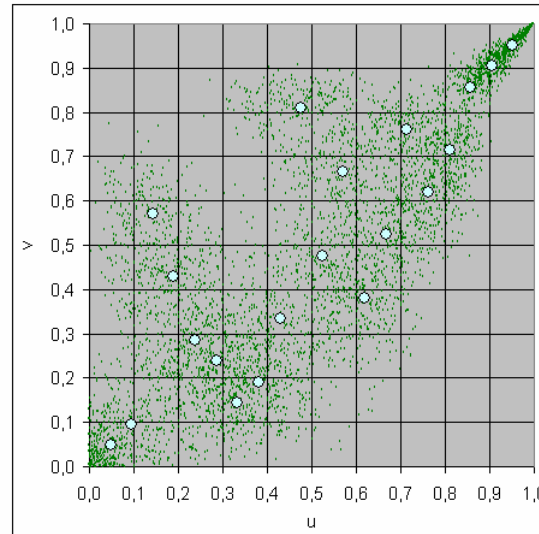
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

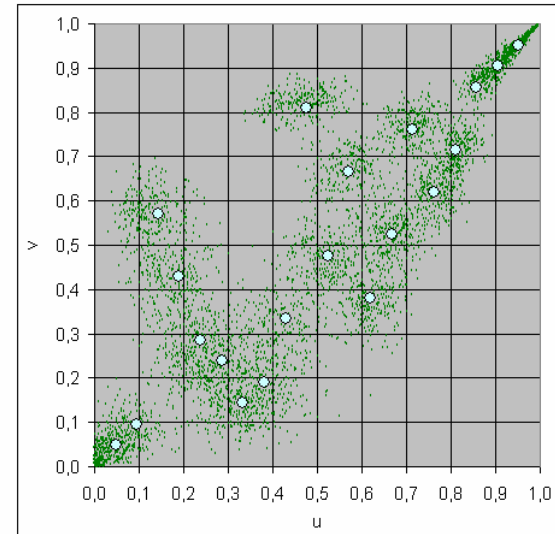
E) Beispiele von Simulationen (zu COTTIN UND PFEIFER 2014): Neg. Binomial-Copula



$$a_1 = a_2 = 10$$



$$a_1 = a_2 = 20$$



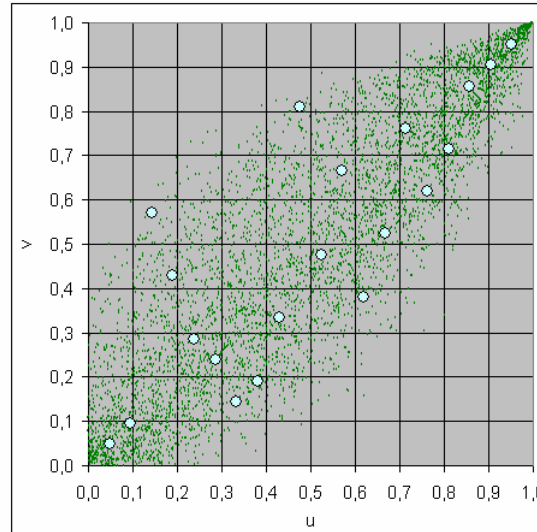
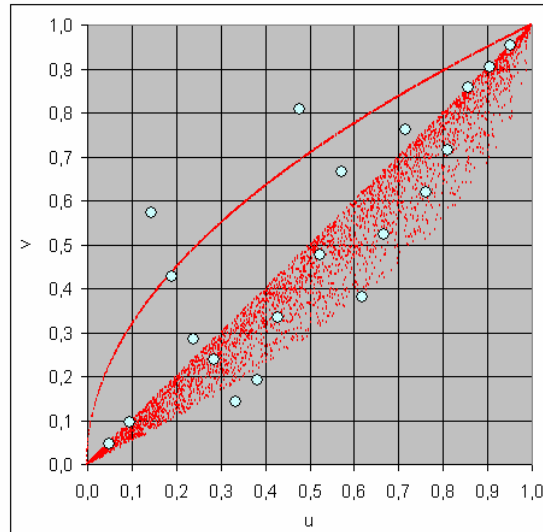
$$a_1 = a_2 = 50$$

Copula-Driver ist hier eine empirische Shuffle-of-Min (Fréchet-Hoeffding) Copula

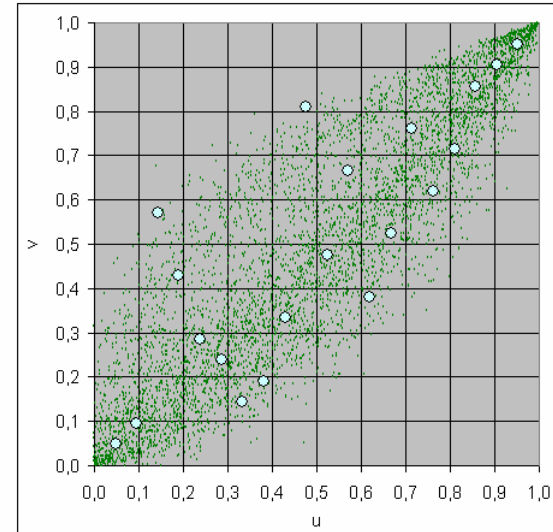
## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 2. Partition-of-Unity Copulas

E) Beispiele von Simulationen (zu COTTIN UND PFEIFER 2014): Neg. Binomial-Copula



$$a_1 = a_2 = 20$$



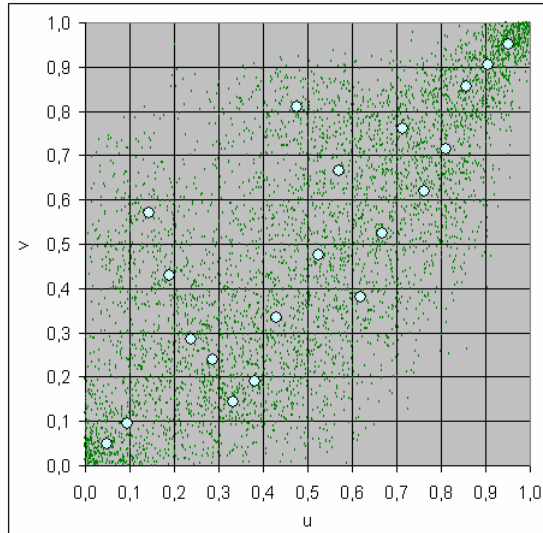
$$a_1 = a_2 = 50$$

Copula-Driver ist hier eine singuläre Mischungs-Copula (rot, links)

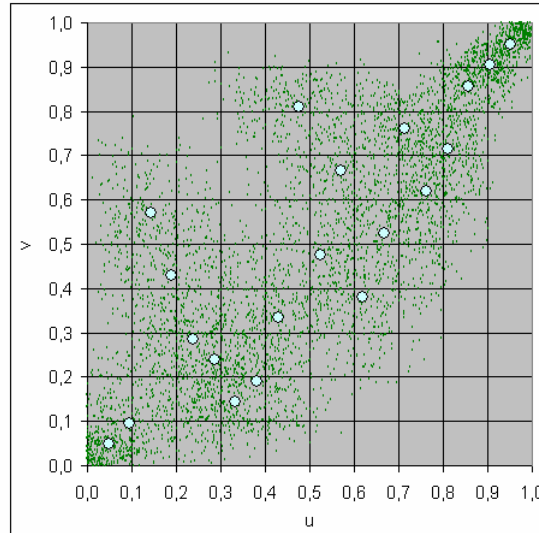
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

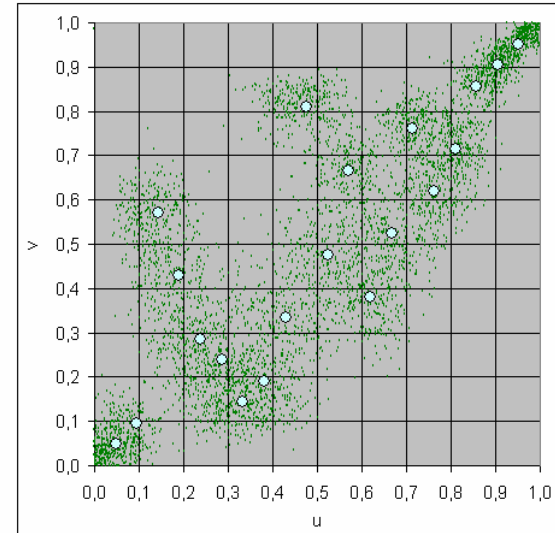
### E) Beispiele von Simulationen (zu COTTIN UND PFEIFER 2014): Poisson-Copula



$$a_1 = a_2 = 10$$



$$a_1 = a_2 = 20$$



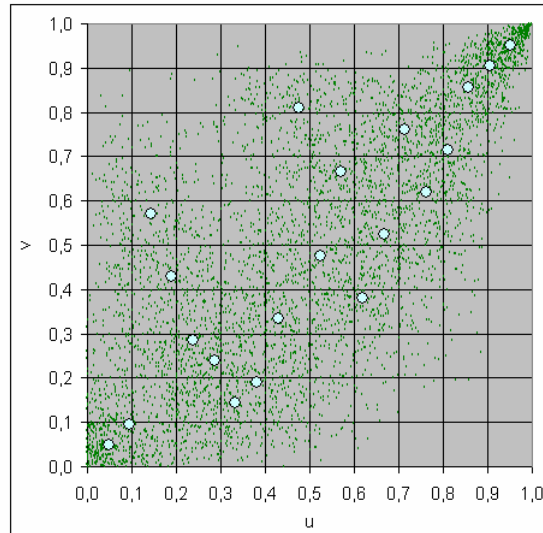
$$a_1 = a_2 = 50$$

Copula-Driver ist hier die empirische Rechteck-Copula (Schachturm-Copula, Rook-Copula)

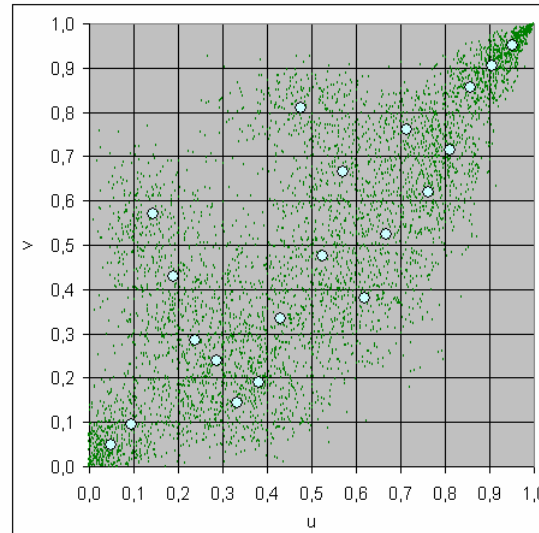
## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 2. Partition-of-Unity Copulas

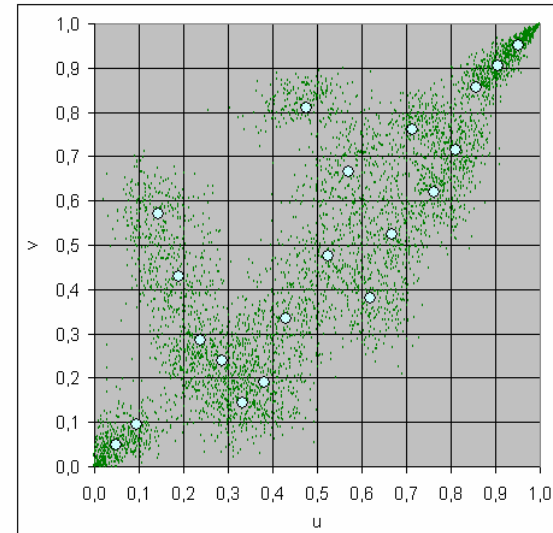
E) Beispiele von Simulationen (zu COTTIN UND PFEIFER 2014): Poisson-Copula



$$a_1 = a_2 = 10$$



$$a_1 = a_2 = 20$$



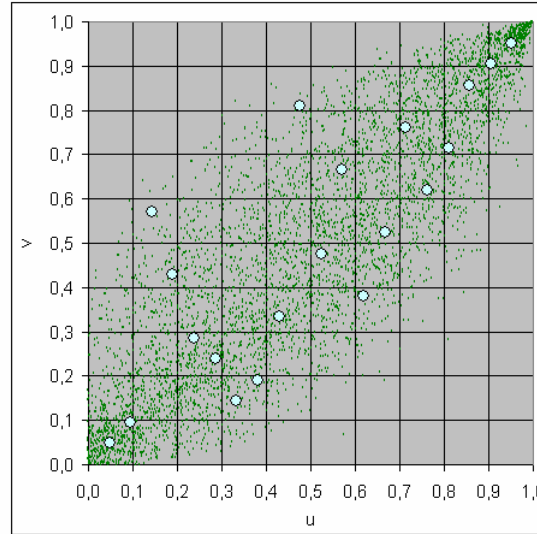
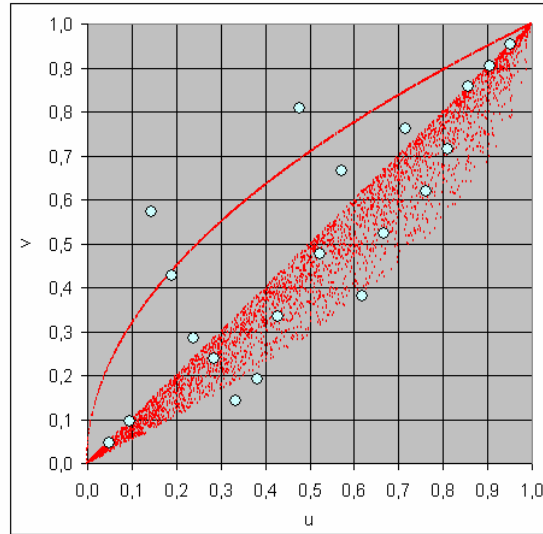
$$a_1 = a_2 = 30$$

Copula-Driver ist hier eine empirische Shuffle-of-Min (Fréchet-Hoeffding) Copula

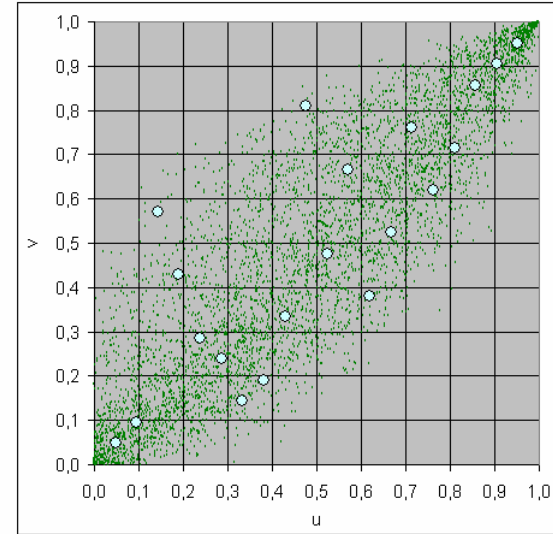
## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 2. Partition-of-Unity Copulas

E) Beispiele von Simulationen (zu COTTIN UND PFEIFER 2014): Poisson-Copula



$$a_1 = a_2 = 20$$



$$a_1 = a_2 = 30$$

Copula-Driver ist hier eine singuläre Mischungs-Copula (rot, links)



# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

### F) Stetige Partition-of-Unity Copulas

Es sei  $\{\varphi_k(s, u)\}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  eine Familie von Lebesgue-Dichten mit Parameter  $u \in (0, 1)$ , d.h.

$$\varphi_k(s, u) \geq 0, \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(s, u) ds = 1 \quad \text{mit} \quad \alpha_k(s) := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(s, u) du > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ferner sei  $T$  ein stetig verteilter  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor mit Dichte  $p(\bullet)$  und Randdichten  $\alpha_1(\bullet), \dots, \alpha_n(\bullet)$ .

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

### F) Stetige unendliche Partition-of-Unity Copulas

Dann wird durch

$$c(u_1, \dots, u_n) := \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p(s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n \underbrace{\frac{\varphi_k(s_k, u_k)}{\alpha_k(s_k)}}_{=: f_k(s_k)} ds_1 \cdots ds_n, (u_1, \dots, u_n) \in (0, 1)^n$$

die Dichte einer  $n$ -dimensionalen Copula definiert (stetige Partition-of-Unity copula, SPU-Copula).

Die zu  $T$  gehörige Copula  $C_T$  heißt analog wieder *Driver* der SPU-Copula. Für praktische Anwendungen wird  $C_T$  aus den Daten ermittelt ( $\leftrightarrow$  empirische Copula).

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

### F) Stetige unendliche Partition-of-Unity Copulas

#### Gamma-Copula:

Für  $a_k > 0$  und  $L(u) := -\ln(1-u)$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $u \in (0,1)$ :

$$\varphi_k^\Gamma(s, u) = \frac{L^{a_k}(u)}{\Gamma(a_k)} s^{a_k-1} u^s, \quad \alpha_k^\Gamma(s) = \int_0^1 \varphi_k^\Gamma(s, u) du = a_k \frac{s^{a_k-1}}{(1+s)^{a_k+1}}, \quad s > 0$$

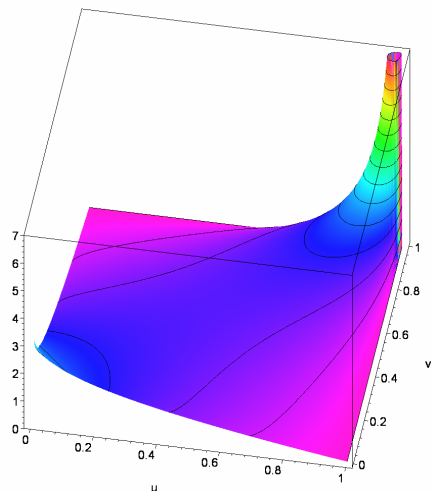
Die  $a_k(\bullet)$  sind Dichten einer inversen Pareto-Verteilung. Es folgt

$$c^\Gamma(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n \frac{(1+s)^{a_k+1}}{\Gamma(a_k+1)} L^{a_k}(u_k) u_k^{s_k} ds_1 \dots ds_n, \quad (u_1, \dots, u_n) \in [0,1]^n.$$

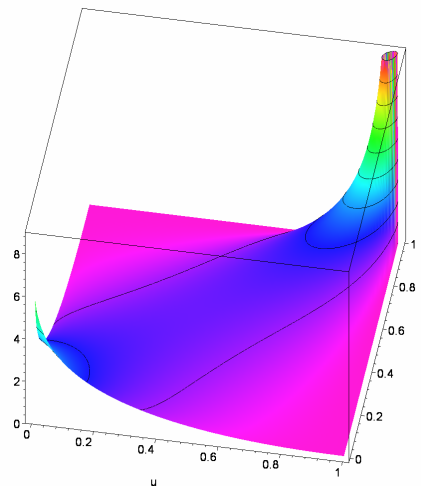
## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 2. Partition-of-Unity Copulas

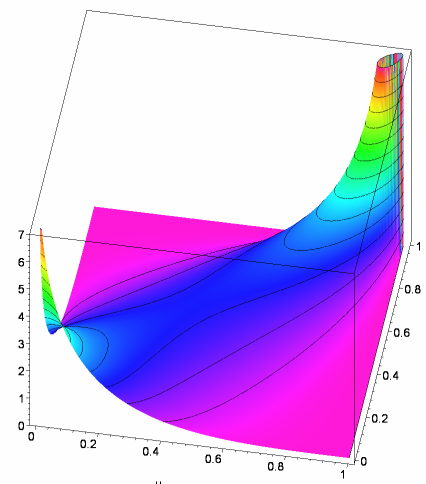
#### F) Stetige Partition-of-Unity Copulas



$$a_1 = a_2 = 1$$



$$a_1 = a_2 = 2$$



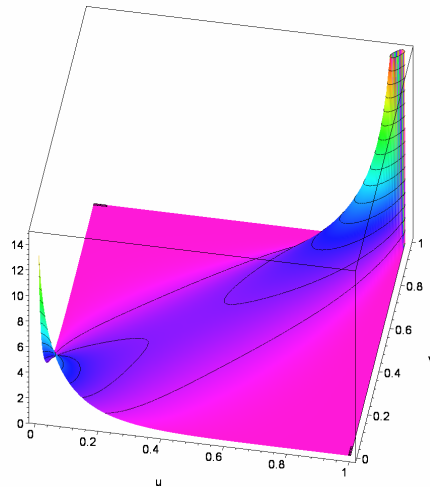
$$a_1 = a_2 = 3$$

Gamma-Copula Dichten, Driver ist obere Fréchet-Hoeffding-Schranke

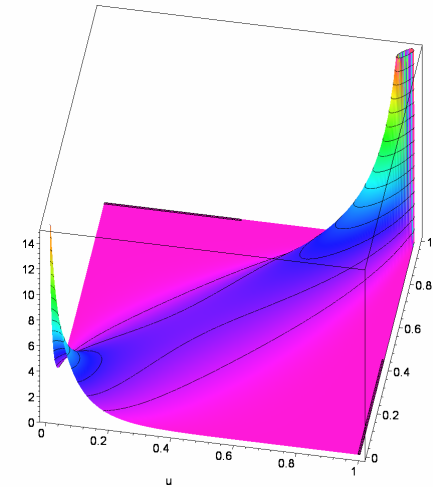
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

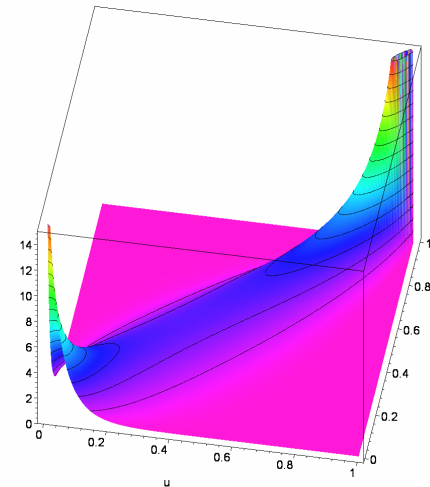
### F) Stetige Partition-of-Unity Copulas



$$a_1 = a_2 = 5$$



$$a_1 = a_2 = 7$$



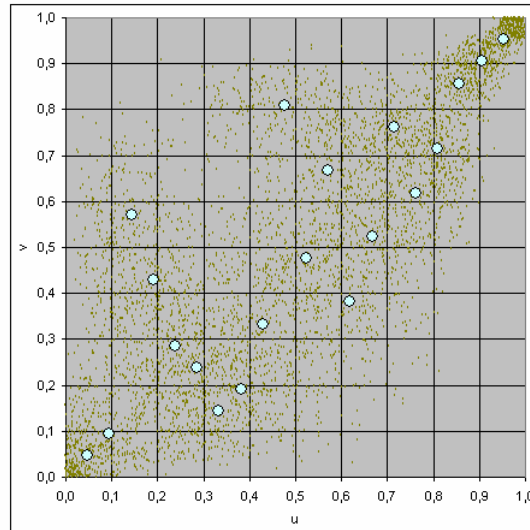
$$a_1 = a_2 = 10$$

Gamma-Copula Dichten, Driver ist obere Fréchet-Hoeffding-Schranke

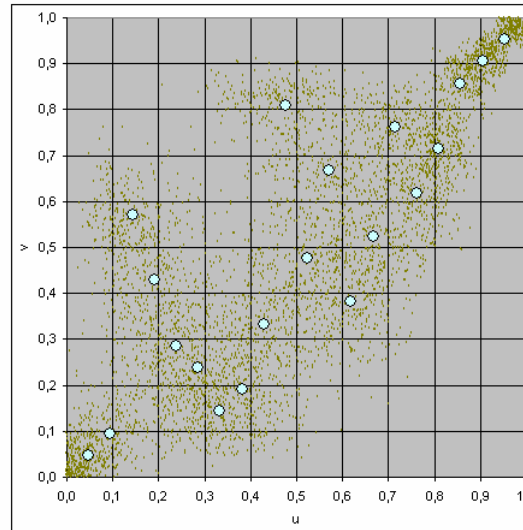
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

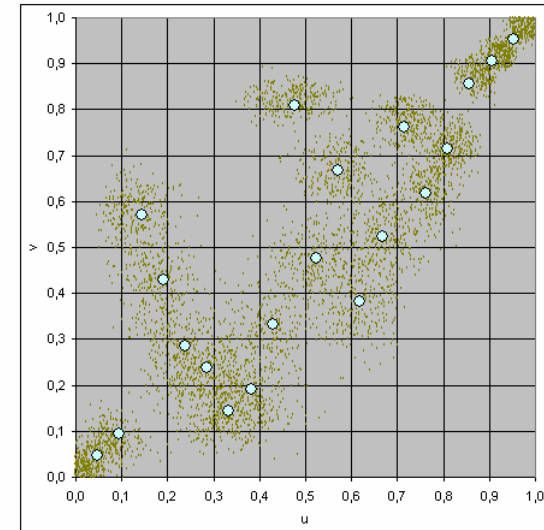
### G) Beispiele von Simulationen (zu COTTIN UND PFEIFER 2014): Gamma-Copula



$$a_1 = a_2 = 10$$



$$a_1 = a_2 = 20$$



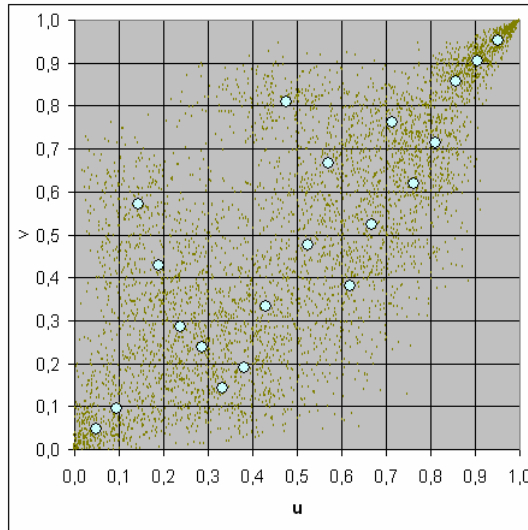
$$a_1 = a_2 = 50$$

Copula-Driver ist hier die empirische Rechteck-Copula (Schachturm-Copula, Rook-Copula)

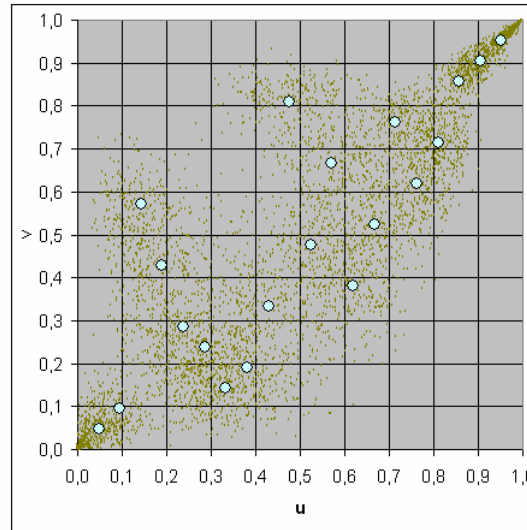
## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 2. Partition-of-Unity Copulas

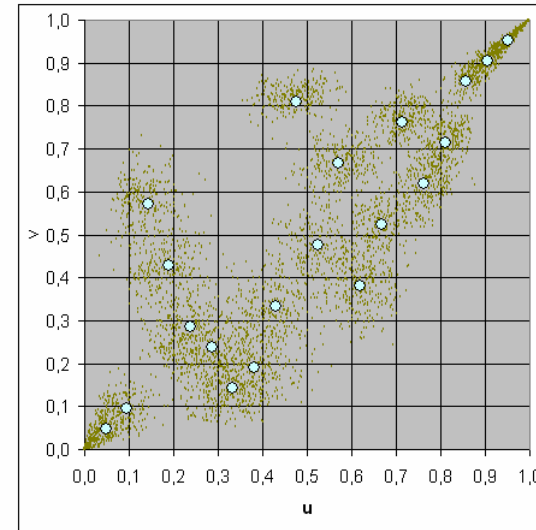
G) Beispiele von Simulationen (zu COTTIN UND PFEIFER 2014): Gamma-Copula



$$a_1 = a_2 = 10$$



$$a_1 = a_2 = 20$$



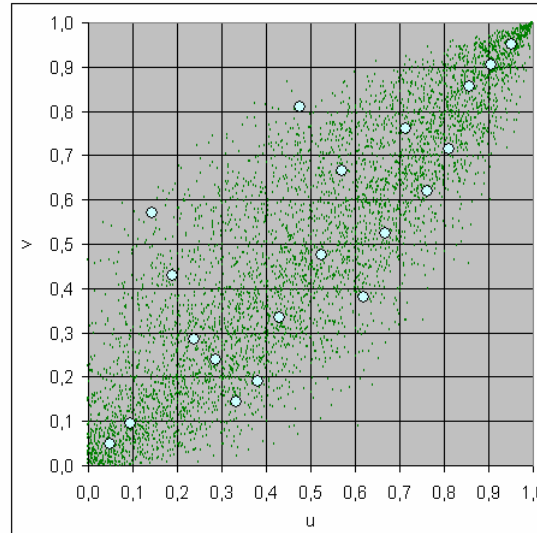
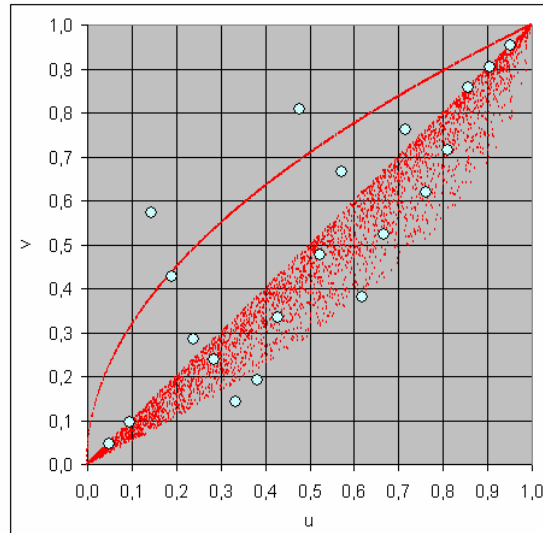
$$a_1 = a_2 = 50$$

Copula-Driver ist hier eine empirische Shuffle-of-Min (Fréchet-Hoeffding) Copula

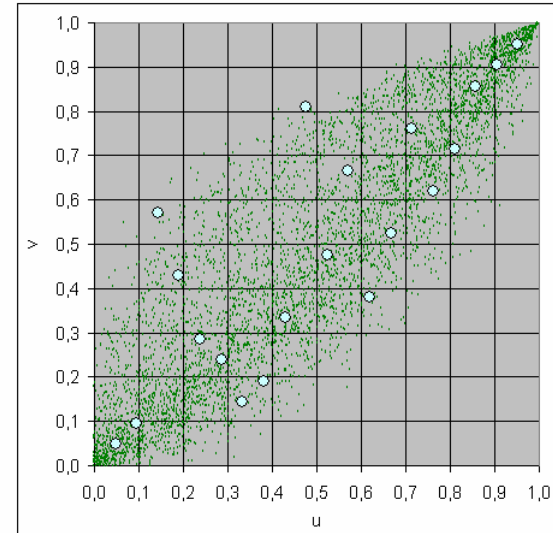
# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 2. Partition-of-Unity Copulas

E) Beispiele von Simulationen (zu COTTIN UND PFEIFER 2014): Gamma-Copula



$$a_1 = a_2 = 20$$



$$a_1 = a_2 = 30$$

Copula-Driver ist hier eine singuläre Mischungs-Copula (rot, links)



## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 3. Anwendungen im Risikomanagement

#### A) Allgemeines

Copulas sind ein essentielles Hilfsmittel zur simulativen Bestimmung von

- Risikomaßen (Value at Risk VaR, Expected Shortfall usw.) in komplexen Portfolios, insbesondere bei Internen Modellen unter Solvency II
- Diversifikations- oder Konzentrationseffekten
- alternativen Szenarien (Robustheit, Modellstabilität, Schwankungsbreiten usw.)

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 3. Anwendungen im Risikomanagement

#### A) Allgemeines

Vergleich von (wünschenswerten) Eigenschaften verschiedener Copula-Ansätze:

Copula-Typ	Eigenschaft	erfüllt
Gauss-Copula	Erfassung paarweiser Abhängigkeiten	ja
	Erfassung von Asymmetrien	nein
	Erfassung von Tail-Abhängigkeiten	nein
	Berücksichtigung von Worst-Case Szenarien	nein
	Möglichkeit alternativer Szenarien	nein
	Einfache Simulierbarkeit in hohen Dimensionen	bedingt

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 3. Anwendungen im Risikomanagement

#### A) Allgemeines

Vergleich von (wünschenswerten) Eigenschaften verschiedener Copula-Ansätze:

Copula-Typ	Eigenschaft	erfüllt
<i>t</i> -Copula	Erfassung paarweiser Abhängigkeiten	ja
	Erfassung von Asymmetrien	nein
	Erfassung von Tail-Abhängigkeiten	ja
	Berücksichtigung von Worst-Case Szenarien	nein
	Möglichkeit alternativer Szenarien	nein
	Einfache Simulierbarkeit in hohen Dimensionen	bedingt

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 3. Anwendungen im Risikomanagement

#### A) Allgemeines

Vergleich von (wünschenswerten) Eigenschaften verschiedener Copula-Ansätze:

Copula-Typ	Eigenschaft	erfüllt
Clayton-Copula	Erfassung paarweiser Abhängigkeiten	nein
	Erfassung von Asymmetrien	nein
	Erfassung von Tail-Abhängigkeiten	ja
	Berücksichtigung von Worst-Case Szenarien	nein
	Möglichkeit alternativer Szenarien	bedingt
	Einfache Simulierbarkeit in hohen Dimensionen	ja

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 3. Anwendungen im Risikomanagement

#### A) Allgemeines

Vergleich von (wünschenswerten) Eigenschaften verschiedener Copula-Ansätze:

Copula-Typ	Eigenschaft	erfüllt
Frank-Copula	Erfassung paarweiser Abhängigkeiten	nein
	Erfassung von Asymmetrien	nein
	Erfassung von Tail-Abhängigkeiten	nein
	Berücksichtigung von Worst-Case Szenarien	nein
	Möglichkeit alternativer Szenarien	bedingt
	Einfache Simulierbarkeit in hohen Dimensionen	ja

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 3. Anwendungen im Risikomanagement

#### A) Allgemeines

Vergleich von (wünschenswerten) Eigenschaften verschiedener Copula-Ansätze:

Copula-Typ	Eigenschaft	erfüllt
Gumbel-Copula	Erfassung paarweiser Abhängigkeiten	nein
	Erfassung von Asymmetrien	nein
	Erfassung von Tail-Abhängigkeiten	ja
	Berücksichtigung von Worst-Case Szenarien	nein
	Möglichkeit alternativer Szenarien	bedingt
	Einfache Simulierbarkeit in hohen Dimensionen	bedingt

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 3. Anwendungen im Risikomanagement

#### A) Allgemeines

Vergleich von (wünschenswerten) Eigenschaften verschiedener Copula-Ansätze:

Copula-Typ	Eigenschaft	erfüllt
Vine-Copula	Erfassung paarweiser Abhängigkeiten	ja
	Erfassung von Asymmetrien	ja
	Erfassung von Tail-Abhängigkeiten	ja
	Berücksichtigung von Worst-Case Szenarien	nein
	Möglichkeit alternativer Szenarien	ja
	Einfache Simulierbarkeit in hohen Dimensionen	nein

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 3. Anwendungen im Risikomanagement

#### A) Allgemeines

Vergleich von (wünschenswerten) Eigenschaften verschiedener Copula-Ansätze:

Copula-Typ	Eigenschaft	erfüllt
PU-Copula	Erfassung paarweiser Abhängigkeiten	ja
	Erfassung von Asymmetrien	ja
	Erfassung von Tail-Abhängigkeiten	ja
	Berücksichtigung von Worst-Case Szenarien	ja
	Möglichkeit alternativer Szenarien	ja
	Einfache Simulierbarkeit in hohen Dimensionen	ja



## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 3. Anwendungen im Risikomanagement

#### B) Fallstudie

19-dimensionaler Datensatz Zentral-Europa (Sturm-Portfolio trendbereinigt, benachbarte Regionen A1 bis A19), 20 Jahre Beobachtungshorizont

Randverteilungen aus Daten geschätzt (Lognormal-Verteilungen)

Ziel: Bestimmung des VaR zu verschiedenen Risikoniveaus

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 3. Anwendungen im Risikomanagement

#### B) Fallstudie

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19
A1	1	0.46	0.03	0.16	0.47	0.20	0.35	0.49	0.41	0.24	0.78	0.64	0.91	0.63	0.85	0.66	0.30	0.67	0.56
A2	0.46	1	0.64	0.78	0.67	0.36	0.51	0.76	0.57	0.51	0.58	-0.04	0.59	0.84	0.68	0.58	0.87	0.77	0.90
A3	0.03	0.64	1	0.93	0.41	0.26	0.11	0.16	0.33	0.16	0.08	-0.09	0.13	0.64	0.25	0.10	0.74	0.14	0.35
A4	0.16	0.78	0.93	1	0.54	0.36	0.16	0.25	0.43	0.19	0.22	-0.10	0.30	0.79	0.36	0.19	0.84	0.32	0.49
A5	0.47	0.67	0.41	0.54	1	0.41	0.35	0.51	0.84	0.63	0.59	0.02	0.64	0.67	0.59	0.50	0.58	0.71	0.67
A6	0.20	0.36	0.26	0.36	0.41	1	0.07	0.11	0.28	0.19	0.28	0.14	0.31	0.42	0.24	0.27	0.39	0.27	0.40
A7	0.35	0.51	0.11	0.16	0.35	0.07	1	0.44	0.27	0.19	0.48	-0.07	0.46	0.35	0.45	0.91	0.64	0.61	0.49
A8	0.49	0.76	0.16	0.25	0.51	0.11	0.44	1	0.50	0.75	0.61	-0.03	0.54	0.47	0.71	0.53	0.40	0.75	0.90
A9	0.41	0.57	0.33	0.43	0.84	0.28	0.27	0.50	1	0.66	0.68	-0.01	0.52	0.60	0.50	0.41	0.46	0.65	0.63
A10	0.24	0.51	0.16	0.19	0.63	0.19	0.19	0.75	0.66	1	0.33	-0.12	0.27	0.28	0.43	0.24	0.23	0.45	0.65
A11	0.78	0.58	0.08	0.22	0.59	0.28	0.48	0.61	0.68	0.33	1	0.19	0.79	0.65	0.80	0.73	0.43	0.84	0.74
A12	0.64	-0.04	-0.09	-0.10	0.02	0.14	-0.07	-0.03	-0.01	-0.12	0.19	1	0.44	0.21	0.28	0.17	-0.12	0.13	0.03
A13	0.91	0.59	0.13	0.30	0.64	0.31	0.46	0.54	0.52	0.27	0.79	0.44	1	0.71	0.86	0.74	0.47	0.76	0.65
A14	0.63	0.84	0.64	0.79	0.67	0.42	0.35	0.47	0.60	0.28	0.65	0.21	0.71	1	0.74	0.54	0.79	0.68	0.72
A15	0.85	0.68	0.25	0.36	0.59	0.24	0.45	0.71	0.50	0.43	0.80	0.28	0.86	0.74	1	0.69	0.47	0.71	0.75
A16	0.66	0.58	0.10	0.19	0.50	0.27	0.91	0.53	0.41	0.24	0.73	0.17	0.74	0.54	0.69	1	0.63	0.77	0.64
A17	0.30	0.87	0.74	0.84	0.58	0.39	0.64	0.40	0.46	0.23	0.43	-0.12	0.47	0.79	0.47	0.63	1	0.59	0.64
A18	0.67	0.77	0.14	0.32	0.71	0.27	0.61	0.75	0.65	0.45	0.84	0.13	0.76	0.68	0.71	0.77	0.59	1	0.86
A19	0.56	0.90	0.35	0.49	0.67	0.40	0.49	0.90	0.63	0.65	0.74	0.03	0.65	0.72	0.75	0.64	0.64	0.86	1

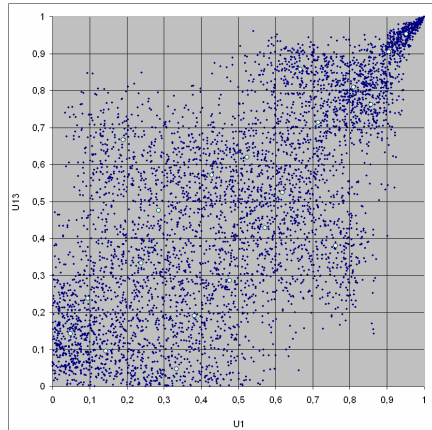
empirische Korrelationsmatrix zwischen den Regionen

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

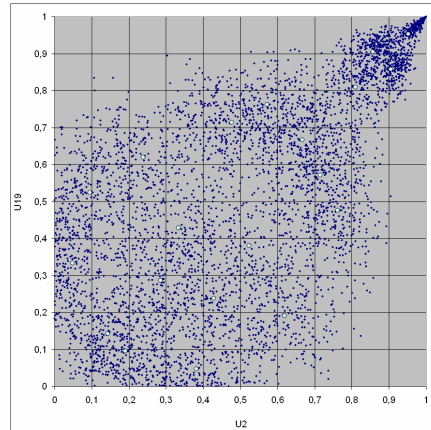
### 3. Anwendungen im Risikomanagement

#### B) Fallstudie

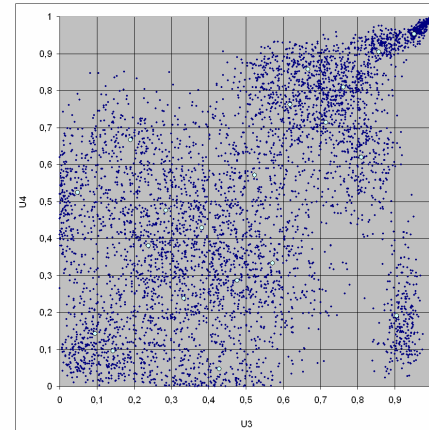
Simulierte SPU-Gamma-Copula mit empirischer Shuffle-of-Min (SoM) Copula als Driver



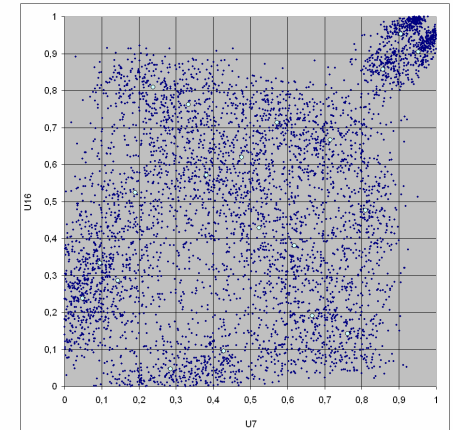
A1 vs. A13  
 $\hat{\rho} = 0,91$



A2 vs. A19  
 $\hat{\rho} = 0,90$



A3 vs. A4  
 $\hat{\rho} = 0,93$



A7 vs. A16  
 $\hat{\rho} = 0,91$

## Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

### 3. Anwendungen im Risikomanagement

#### B) Fallstudie

Copula-Typ	Gauss-Copula	$t$ -Copula	Rook-Gamma Copula	SoM-Gamma copula
$\text{VaR}_{0,1}(S)$	0,828149	0,785207	1,687750	1,530999
$\text{VaR}_{0,05}(S)$	1,123028	1,126537	2,097296	1,980437
$\text{VaR}_{0,01}(S)$	2,013425	2,345636	2,865834	3,271872
$\text{VaR}_{0,005}(S)$	2,528785	3,127850	3,283720	3,950194

Simulative Bestimmung des VaR für das Summenrisiko  $S$  (Mrd. €)  
grün: minimaler Wert, rot: maximaler Wert

# Partition-of-Unity Copulas mit Anwendungen im Risikomanagement

## 4. Literatur

1. C. Cottin und D. Pfeifer (2014): From Bernstein polynomials to Bernstein copulas. *J. Appl. Funct. Anal.* 9(3-4), 277 – 288.
2. C. Czado (2019): *Analyzing Dependent Data with Vine Copulas - A Practical Guide With R*. Lecture Notes in Statistics 222, Springer Nature, Cham.
3. H. Joe (2015): *Dependence Modeling with Copulas*. CRC Press, Boca Raton.
4. A. J. McNeil, R. Frey, und P. Embrechts (2015): *Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools*. Revised Edition, Princeton University Press, Princeton.
5. D. Pfeifer, H.A. Tsatedem, A. Mändle und C. Girschig (2016): New copulas based on general partitions-of-unity and their applications to risk management. *Depend. Model.* 4, 123 – 140.
6. D. Pfeifer, A. Mändle und O. Ragulina (2017): New copulas based on general partitions-of-unity and their applications to risk management (part II). *Depend. Model.* 5, 246 – 255.
7. D. Pfeifer, A. Mändle, O. Ragulina und C. Girschig (2019): New copulas based on general partitions-of-unity and their applications to risk management (part III) – the continuous case. *Depend. Model.* 6, 181 – 201. ([http://www.staff.uni-oldenburg.de/dietmar.pfeifer/Publ/P114\\_extended.pdf](http://www.staff.uni-oldenburg.de/dietmar.pfeifer/Publ/P114_extended.pdf))
8. D. Pfeifer (2019): EXCEL files for the simulation of Partition-of-Unity copulas (with file description). [http://www.staff.uni-oldenburg.de/dietmar.pfeifer/Publ/PUC\\_EXCEL.zip](http://www.staff.uni-oldenburg.de/dietmar.pfeifer/Publ/PUC_EXCEL.zip)

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!