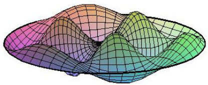
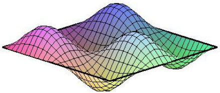
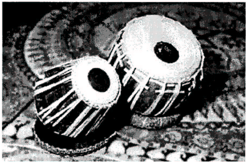
16. TAG DER MATHEMATIK

Kann man die Form einer Trommel hören?

Prof. Dr. Daniel Grieser







Grundlagen der Schwingungslehre

1.

$$\begin{aligned} \text{Frequenz} &\cong \text{Tonhöhe} \\ \text{Amplitude} &\cong \text{Lautstärke} \end{aligned}$$

Grundlagen der Schwingungslehre

1. $$\begin{array}{lcl} \text{Frequenz} & \cong & \text{Tonhöhe} \\ \text{Amplitude} & \cong & \text{Lautstärke} \end{array}$$

2. Jeder schwingende Gegenstand besitzt:
    - Eigenfunktionen: Schwingungsprofile, die während einer Schwingung immer gleich bleiben (bis auf zeitabhängigen Faktor).
    - Zu jeder Eigenfunktion eine Eigenfrequenz: Die Frequenz dieser Schwingung.

Grundlagen der Schwingungslehre

1. $$\begin{array}{lcl} \text{Frequenz} & \cong & \text{Tonhöhe} \\ \text{Amplitude} & \cong & \text{Lautstärke} \end{array}$$

2. Jeder schwingende Gegenstand besitzt:
   - Eigenfunktionen: Schwingungsprofile, die während einer Schwingung immer gleich bleiben (bis auf zeitabhängigen Faktor).
   - Zu jeder Eigenfunktion eine Eigenfrequenz: Die Frequenz dieser Schwingung.

3. **Was wir hören:** Die Eigenfrequenzen des Gegenstands.

Grundlagen der Schwingungslehre

1. $$\begin{array}{lcl} \text{Frequenz} & \cong & \text{Tonhöhe} \\ \text{Amplitude} & \cong & \text{Lautstärke} \end{array}$$

2. Jeder schwingende Gegenstand besitzt:
   - Eigenfunktionen: Schwingungsprofile, die während einer Schwingung immer gleich bleiben (bis auf zeitabhängigen Faktor).
   - Zu jeder Eigenfunktion eine Eigenfrequenz: Die Frequenz dieser Schwingung.

3. **Was wir hören:** Die Eigenfrequenzen des Gegenstands.

Jede beliebige Schwingungsform ist eine Summe von Eigenschwingungen, mit verschiedenen Amplituden. Die Frequenzen und Amplituden bestimmen die Klangfarbe.
Die Amplituden hängen davon ab, wie der Gegenstand ‚angeschlagen' wird.

Einige Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen

Einige Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen

Saite: $1 \;:\; 2 \;:\; 3 \;:\; 4 \;:\; 5 \;\ldots$

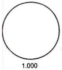
Einige Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen

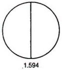
Saite:	1	:	2	:	3	:	4	:	5	...
Quadratische Trommel:	1	:	1,58	:	2	:	2,54	:	2,91	...

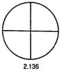
Einige Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen

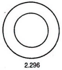
Saite:	1	:	2	:	3	:	4	:	5	...
Quadratische Trommel:	1	:	1,58	:	2	:	2,54	:	2,91	...

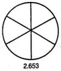
Runde Trommel:



:


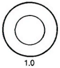
:


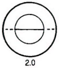
:


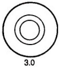
:


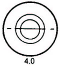
...

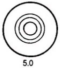
Indische Tabla:



:


:


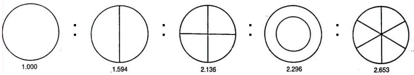
:


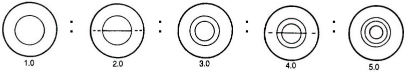
:


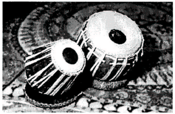
...

Einige Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen

Saite:	1	:	2	:	3	:	4	:	5	...
Quadratische Trommel:	1	:	1,58	:	2	:	2,54	:	2,91	...

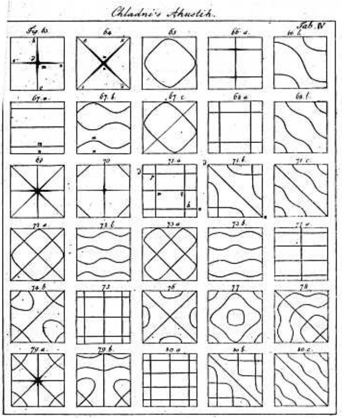
Runde Trommel:  ...

Indische Tabla:  ...



Chladnis Klangfiguren

Chladnis Klangfiguren



Das Problem

1. Wie beeinflußt die Form eines schwingenden Gegenstandes die Eigenfrequenzen und die Eigenfunktionen?

2. Umgekehrt: Kann man die Form des Gegenstandes aus den Eigenfrequenzen bestimmen?

Marc Kac: *Can one hear the shape of a drum?*
(American Mathematical Monthly 1966)

Methodik

Methodik

1. Schritt:

Physikalische Überlegungen	$\longrightarrow$	Mathematische Gleichung

Methodik

1. Schritt:

Physikalische Überlegungen	$\longrightarrow$	Mathematische Gleichung

2. Schritt:

Lösen der Gleichung:

Methodik

1. Schritt:

Physikalische Überlegungen	$\longrightarrow$	Mathematische Gleichung

2. Schritt:

Lösen der Gleichung:

- Formel (ein Glücksfall!)

Methodik

1. Schritt:

Physikalische Überlegungen	$\longrightarrow$	Mathematische Gleichung

2. Schritt:

Lösen der Gleichung:

- Formel (ein Glücksfall!)
- Computer (für Einzelfälle nützlich, wenig Verständnis qualitativer Zusammenhänge)

Methodik

1. Schritt:

Physikalische Überlegungen $\longrightarrow$ Mathematische Gleichung

2. Schritt:

Lösen der Gleichung:

- Formel (ein Glücksfall!)
- Computer (für Einzelfälle nützlich, wenig Verständnis qualitativer Zusammenhänge)
- Kunst der Mathematik: wie man trotzdem etwas erfährt, auch wenn man es nicht genau ausrechnen kann (Intuition, Ideen, Geduld).

Trommeln und Primzahlen

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$

Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$

Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Frage: Zu welchen Eigenfrequenzen gehören mehr als zwei Eigenfunktionen?

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$

Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Frage: Zu welchen Eigenfrequenzen gehören mehr als zwei Eigenfunktionen?

$13 = 2^2 + 3^2$ zwei Eigenfunktionen (auch $3^2 + 2^2$)

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$

Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Frage: Zu welchen Eigenfrequenzen gehören mehr als zwei Eigenfunktionen?

$$\begin{array}{lllllllll} 13 & = & 2^2 & + & 3^2 & & & & \text{zwei Eigenfunktionen (auch } 3^2 + 2^2\text{)} \\ 50 & = & 1^2 & + & 7^2 & = & 5^2 & + & 5^2 \quad \text{drei Eigenfunktionen} \end{array}$$

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$

Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Frage: Zu welchen Eigenfrequenzen gehören mehr als zwei Eigenfunktionen?

$$
\begin{array}{lllllllll}
13 & = & 2^2 & + & 3^2 & & & & \text{zwei Eigenfunktionen (auch } 3^2 + 2^2\text{)} \\
50 & = & 1^2 & + & 7^2 & = & 5^2 & + & 5^2 \quad \text{drei Eigenfunktionen} \\
65 & = & 1^2 & + & 8^2 & = & 4^2 & + & 7^2 \quad \text{vier Eigenfunktionen}
\end{array}
$$

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$

Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Frage: Zu welchen Eigenfrequenzen gehören mehr als zwei Eigenfunktionen?

$$\begin{array}{ccccccccl} 13 & = & 2^2 & + & 3^2 & & & & \text{zwei Eigenfunktionen (auch } 3^2+2^2\text{)} \\ 50 & = & 1^2 & + & 7^2 & = & 5^2 & + & 5^2 \quad \text{drei Eigenfunktionen} \\ 65 & = & 1^2 & + & 8^2 & = & 4^2 & + & 7^2 \quad \text{vier Eigenfunktionen} \end{array}$$

Frage: Welche natürlichen Zahlen lassen sich auf mehr als zwei Arten als Summe zweier Quadrate schreiben?

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$

Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Frage: Zu welchen Eigenfrequenzen gehören mehr als zwei Eigenfunktionen?

13	$=$	2^2	$+$	3^2					zwei Eigenfunktionen (auch $3^2 + 2^2$)
50	$=$	1^2	$+$	7^2	$=$	5^2	$+$	5^2	drei Eigenfunktionen
65	$=$	1^2	$+$	8^2	$=$	4^2	$+$	7^2	vier Eigenfunktionen

Frage: Welche natürlichen Zahlen lassen sich auf mehr als zwei Arten als Summe zweier Quadrate schreiben?

Antwort: Genau die, in deren Primfaktorzerlegung mehrere Primzahlen der Form $4k + 1$ vorkommen!

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$

Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Frage: Zu welchen Eigenfrequenzen gehören mehr als zwei Eigenfunktionen?

13	=	2^2	+	3^2					zwei Eigenfunktionen (auch $3^2 + 2^2$)
50	=	1^2	+	7^2	=	5^2	+	5^2	drei Eigenfunktionen
65	=	1^2	+	8^2	=	4^2	+	7^2	vier Eigenfunktionen

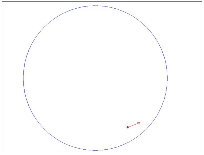
Frage: Welche natürlichen Zahlen lassen sich auf mehr als zwei Arten als Summe zweier Quadrate schreiben?

Antwort: Genau die, in deren Primfaktorzerlegung mehrere Primzahlen der Form $4k + 1$ vorkommen!

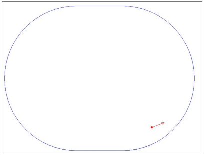
Probieren Sie es aus! Beispiele: $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$, $65 = 5 \cdot 13$

Trommeln, Billard und Chaos

Ordnung

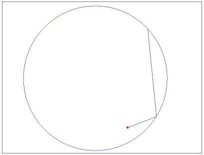


Chaos

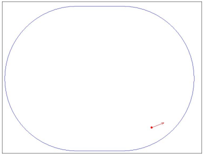


Trommeln, Billard und Chaos

Ordnung

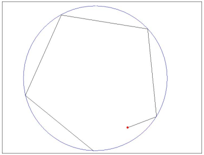


Chaos

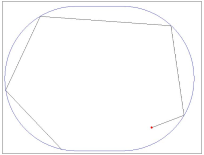


Trommeln, Billard und Chaos

Ordnung

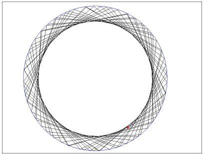


Chaos

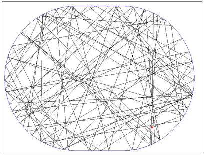


Trommeln, Billard und Chaos

Ordnung

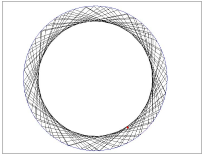


Chaos

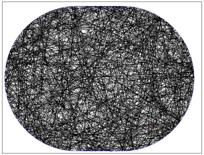


Trommeln, Billard und Chaos

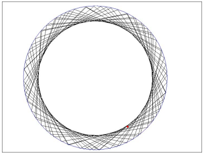
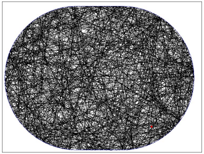
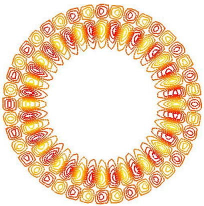
Ordnung



Chaos



Trommeln, Billard und Chaos

Ordnung	Chaos
	
	

Was kann man hören?

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales “Gehör”)

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales “Gehör”)

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales "Gehör")

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales “Gehör”)

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,
- die Anzahl der Löcher,

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales “Gehör”)

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,
- die Anzahl der Löcher,
- ob die Trommel als Billiardtisch chaotisch ist oder nicht.

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales "Gehör")

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,
- die Anzahl der Löcher,
- ob die Trommel als Billiardtisch chaotisch ist oder nicht.

Beweisidee: Eigenfrequenzen $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3 \leq \ldots \longrightarrow \infty$.

Wie schnell $\nu_n \longrightarrow \infty$? $\quad \rightsquigarrow \quad$ Fläche

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales "Gehör")

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,
- die Anzahl der Löcher,
- ob die Trommel als Billiardtisch chaotisch ist oder nicht.

Beweisidee: Eigenfrequenzen $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3 \leq \ldots \longrightarrow \infty$.

Wie schnell $\nu_n \longrightarrow \infty$?	$\rightsquigarrow$	Fläche
Fluktuation um erste Näherung	$\rightsquigarrow$	Umfang

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales “Gehör”)

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,
- die Anzahl der Löcher,
- ob die Trommel als Billiardtisch chaotisch ist oder nicht.

Beweisidee: Eigenfrequenzen $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3 \leq \ldots \longrightarrow \infty$.

Wie schnell $\nu_n \longrightarrow \infty$?	$\rightsquigarrow$	Fläche
Fluktuation um erste Näherung	$\rightsquigarrow$	Umfang
Detail der Fluktuation	$\rightsquigarrow$	Löcher

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales "Gehör")

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,
- die Anzahl der Löcher,
- ob die Trommel als Billiardtisch chaotisch ist oder nicht.

Beweisidee: Eigenfrequenzen $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3 \leq \ldots \longrightarrow \infty$.

Wie schnell $\nu_n \longrightarrow \infty$?	$\rightsquigarrow$	Fläche
Fluktuation um erste Näherung	$\rightsquigarrow$	Umfang
Detail der Fluktuation	$\rightsquigarrow$	Löcher
Statistik der Abstände $\nu_{n+1} - \nu_n$	$\rightsquigarrow$	Chaos

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales "Gehör")

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,
- die Anzahl der Löcher,
- ob die Trommel als Billiardtisch chaotisch ist oder nicht.

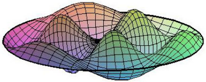
Beweisidee: Eigenfrequenzen $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3 \leq \ldots \longrightarrow \infty$.

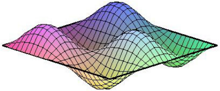
Wie schnell $\nu_n \longrightarrow \infty$?	$\leadsto$	Fläche
Fluktuation um erste Näherung	$\leadsto$	Umfang
Detail der Fluktuation	$\leadsto$	Löcher
Statistik der Abstände $\nu_{n+1} - \nu_n$	$\leadsto$	Chaos

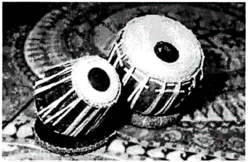
Verwandte Probleme:

Spektroskopie (Chemie, Astronomie etc.),
Seismologie

Kann man die Form einer Trommel hören?

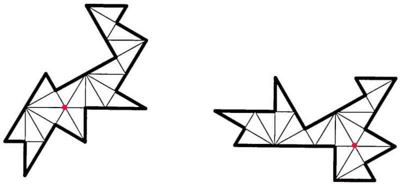






(M. Kac 1966)

Nein!



klingen gleich!

C. Gordon, D. Webb, S. Wolpert: Inventiones Mathematicae 1992,
P. Buser, J. Conway, P. Doyle, K.-D. Semmler: Int.Math.Res.Not. 1994.

Offene Probleme

- Kann man die Form einer Trommel ohne Ecken, oder einer konvexen Trommel, hören?

Offene Probleme

- Kann man die Form einer Trommel ohne Ecken, oder einer konvexen Trommel, hören?
- Wie genau zeigt sich Chaos in den Eigenfunktionen?

Offene Probleme

- Kann man die Form einer Trommel ohne Ecken, oder einer konvexen Trommel, hören?
- Wie genau zeigt sich Chaos in den Eigenfunktionen?
- Gibt es in jedem Dreieck eine geschlossene Billiardkugelbahn?

Zusammenfassung

1. Was man hören kann: Die Eigenfrequenzen eines Gegenstands.
2. Diese sind Lösungen einer Differentialgleichung. Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen, aber sie lassen sich nur in Einzelfällen *explizit* hinschreiben.
3. Für ein Quadrat hängen die Eigenfrequenzen mit Quadratzahlen und Primzahlen zusammen.
4. Auf einer Trommel kann man Billiard spielen. Je nach Form kann das chaotisch sein oder nicht.
5. Man kann die Form einer Trommel nicht hören – aber einiges kann man hören: Fläche, Randlänge usw.
6. Es gibt viele spannende ungelöste Probleme.

Viel Spaß mit der Mathematik!

https://www.uni-oldenburg.de/daniel-grieser/