Eine Zombie-Invasion in Oldenburg

Die Mathematik des Untergangs

Stefan Hellbusch

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

8. September 2016

Inhalt

Ein mathematisches Modell

In Wikipedia steht:

Ein mathematisches Modell ist ein mittels mathematischer Notation erzeugtes Modell zur Beschreibung eines Ausschnittes der beobachtbaren Welt. Dieses Modell kann in beliebigen, begrenzten Bereichen der beobachtbaren Realität [...] Anwendung finden.

Mathematische Modelle erlauben eine logische, strukturelle Durchdringung je nach Art hinsichtlich von geltenden Gesetzmäßigkeiten, erlaubten und nicht erlaubten Zuständen, sowie seiner Dynamik mit dem Ziel, diese Erkenntnisse auf das modellierte System zu übertragen.

Diskretes Modell - Zellteilung

Ein einfaches Beispiel ist die Zellteilung. Starten wir zum Beispiel mit einer Zelle haben wir nach ihrer Teilung zwei, diese beiden teilen sich erneut und so weiter.

In einer Formel[1] ausgedrückt ist dies:

$$F_{n+1} := 2 \cdot F_n \text{ mit Startwert } F_0 = 1$$

[1] Dabei steht F_n für die Anzahl an Zellen nach n Teilungen.

Ausrechnen von Werten

Die Formel ist rekursiv und damit etwas unhandlich zum Berechnen von Werten. Wollen wir zum Beispiel damit F_{100} ausrechnen, so müssen wir zuerst $F_1 = 2$, dann $F_2 = 4$, usw. berechnen, bis wir schließlich bei F_{99} angekommen sind und damit $F_{100} = 2 \cdot F_{99}$ erhalten.

Ausrechnen von Werten

Die Formel ist rekursiv und damit etwas unhandlich zum Berechnen von Werten. Wollen wir zum Beispiel damit F_{100} ausrechnen, so müssen wir zuerst $F_1 = 2$, dann $F_2 = 4$, usw. berechnen, bis wir schließlich bei F_{99} angekommen sind und damit $F_{100} = 2 \cdot F_{99}$ erhalten.

Schreiben wir die Zwischenergebnisse geschickt auf,

$$F_1 = 2, \quad F_2 = 2^2, \quad F_3 = 2^3, \quad F_4 = 2^4, \quad F_5 = 2^5, \quad \dots,$$

so sehen wir auch die explizite Formel

$$F_n = 2^n.$$

Ausrechnen von Werten

Die Formel ist rekursiv und damit etwas unhandlich zum Berechnen von Werten. Wollen wir zum Beispiel damit F_{100} ausrechnen, so müssen wir zuerst $F_1 = 2$, dann $F_2 = 4$, usw. berechnen, bis wir schließlich bei F_{99} angekommen sind und damit $F_{100} = 2 \cdot F_{99}$ erhalten.

Schreiben wir die Zwischenergebnisse geschickt auf,

$$F_1 = 2, \quad F_2 = 2^2, \quad F_3 = 2^3, \quad F_4 = 2^4, \quad F_5 = 2^5, \quad \dots,$$

so sehen wir auch die explizite Formel

$$F_n = 2^n.$$

Leider ist es nicht immer so einfach.

Wieviel Zellen haben wir nach eineinhalb Zeitschritten?

Zunächst ändern wir hier unsere Notation indem wir n durch ein t (für *time*) ersetzen und F als Funktion schreiben.

$$F_n \rightsquigarrow F(t)$$

Die Frage im Titel ist also:

Was ist $F(\frac{3}{2})$?

Wieviel Zellen haben wir nach eineinhalb Zeitschritten?

Zunächst ändern wir hier unsere Notation indem wir n durch ein t (für *time*) ersetzen und F als Funktion schreiben.

$$F_n \rightsquigarrow F(t)$$

Die Frage im Titel ist also:

$$\text{Was ist } F(\tfrac{3}{2})?$$

Es sei schon einmal verraten: Es sind weniger als 3.

Kleinere Zeitschritte

Unsere vorige Modellbeschreibung $F_{n+1} = 2 \cdot F_n$ erlaubt uns nur ganzzahlige Schritte:

$$F(t+1) = 2 \cdot F(t) \text{ oder allgemeiner } F(t+k) = 2^k \cdot F(t)$$

Kleinere Zeitschritte

Unsere vorige Modellbeschreibung $F_{n+1} = 2 \cdot F_n$ erlaubt uns nur ganzzahlige Schritte:

$$F(t+1) = 2 \cdot F(t) \text{ oder allgemeiner } F(t+k) = 2^k \cdot F(t)$$

Die hintere Formel formen wir zu

$$F(\underbrace{t+k}_{t_2}) - F(\underbrace{t}_{t_1}) = (2^k - 1) \cdot F(t)$$

um. Weiter führen wir t_1, t_2 und $\Delta t = t_2 - t_1 = k$ ein.

Kleinere Zeitschritte

Unsere Formel hat nun die Gestalt:

$$F(t + \Delta t) - F(t) = (2^{\Delta t} - 1) \cdot F(t)$$

Kleinere Zeitschritte

Unsere Formel hat nun die Gestalt:

$$F(t + \Delta t) - F(t) = (2^{\Delta t} - 1) \cdot F(t)$$

Jetzt erweitern wir die rechte Seite mit Δt und erhalten:

$$F(t + \Delta t) - F(t) = \Delta t \cdot \frac{2^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \cdot F(t).$$

Kleinere Zeitschritte

Unsere Formel hat nun die Gestalt:

$$F(t + \Delta t) - F(t) = (2^{\Delta t} - 1) \cdot F(t)$$

Jetzt erweitern wir die rechte Seite mit Δt und erhalten:

$$F(t + \Delta t) - F(t) = \Delta t \cdot \frac{2^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \cdot F(t).$$

Nun sind wir fast am Ziel angekommen, wir teilen noch durch Δt.

Kleinere Zeitschritte

Unsere Formel hat nun die Gestalt:

$$\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{2^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \cdot F(t)$$

Jetzt können wir die Zeitschritte verkleinern in dem wir $\Delta t \to 0$ gehen lassen.

Kleinere Zeitschritte

Unsere Formel hat nun die Gestalt:

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\frac{2^{\Delta t}-1}{\Delta t}\cdot F(t)$$

Jetzt können wir die Zeitschritte verkleinern in dem wir $\Delta t \to 0$ gehen lassen.

Die linke Seite ist dann genau die Ableitung F' von F und auf der rechten Seite kann man zeigen:

$$\operatorname*{Lim}_{\Delta t\to 0}\frac{2^{\Delta t}-1}{\Delta t}=\ln(2)$$

Kontinuierliches Modell

Unsere Formel hat nun die Gestalt:

$$F'(t) = \ln(2) \cdot F(t)$$

Dies ist eine Differentialgleichung. Wir suchen also nach einer Funktion F dessen Ableitung sich mittels obiger Formel durch F ausdrücken lässt.

In diesem Beispiel ist dies sehr leicht und wir finden zum Beispiel

$$F(t) = e^{\ln(2) \cdot t} = 2^t$$

als eine Lösung. Dies passt sehr schön mit dem Ergebnis im diskreten Fall zusammen und wir können auch die motivierende Frage beantworten. Nach eineinhalb Zeitschritten haben wir $F(\frac{3}{2}) = 2^{1.5} \approx 2.828$ Zellen.

Räuber und Beute

Bevor wir es wirklich mit Zombies zu tun bekommen beschreiben wir ein sogenanntes *Räuber-Beute* Modell. *Räuber* sind dabei Lebewesen, welche sich von der *Beute* ernähren, wobei die *Beute* eine andere Klasse an Lebewesen darstellt.

Weiter trifft man die, in der Regel nicht zutreffende, Annahme, dass sich Räuber und Beute auf einer einsamen, ausreichend großen Insel ohne weitere relevante Lebewesen befinden.

Unsere Räuber sind Zobel $= Z$ und die Beutetiere sind Polarrötelmäuse $= M$.

Das Modell geht auf Alfred J. Lotka und Vito Volterra (1925) zurück und wird auch *Lotka-Volterra Modell* genannt.

Die Beute

Beginnen wir damit die Beute ähnlich, wie in unserem vorigen Beispiel zu modellieren.

$$M'(t) \approx \alpha \cdot M(t) - \beta \cdot M(t) = (\alpha - \beta) \cdot M(t) = \mu \cdot M(t)$$

Hier steht α für die Fortpflanzungsrate und β für die (natürliche) Sterberate der Mäuse, was sich in dieser Einfachheit zu μ der Reproduktionsrate zusammenfassen lässt.

Die Räuber

Als Nächstes widmen wir uns den Räubern. Diese profitieren durch unsere reichhaltige Insel nur indirekt.
Damit ist ihre Reproduktionsrate, nennen wir sie ζ, an das Nahrungsangebot gekoppelt.

$$Z'(t) \approx \zeta \cdot Z(t) \cdot M(t)$$

Gibt es aber nicht genug Nahrung, so werden einige der *Zobel* verhungern, womit wir eine zusätzliche Sterblichkeit ε, aufgrund von geringer Nahrung, hinzufügen.

$$Z'(t) = -\varepsilon \cdot Z(t) + \zeta \cdot Z(t) \cdot M(t)$$

Das Modell

Nun müssen wir einen Blick zurück auf die Beute werfen, da die Räuber einige von diesen fressen. Bezeichnen wir hierzu mit δ die Fressrate der Räuber und erhalten damit die Gleichungen:

$$\begin{aligned} M'(t) &= \mu \cdot M(t) - \delta \cdot Z(t) \cdot M(t) \\ Z'(t) &= -\varepsilon \cdot Z(t) + \zeta \cdot Z(t) \cdot M(t) \end{aligned}$$

Hier ist es schon viel schwieriger, wenn nicht sogar unmöglich, die Funktionen $M(t)$ und $Z(t)$ explizit zu bestimmen.

Das Modell

Nun müssen wir einen Blick zurück auf die Beute werfen, da die Räuber einige von diesen fressen. Bezeichnen wir hierzu mit δ die Fressrate der Räuber und erhalten damit die Gleichungen:

$$M' = \mu \cdot M - \delta \cdot Z \cdot M$$
$$Z' = -\varepsilon \cdot Z + \zeta \cdot Z \cdot M$$

Hier ist es schon viel schwieriger, wenn nicht sogar unmöglich, die Funktionen $M(t)$ und $Z(t)$ explizit zu bestimmen.

Wir vereinfachen unsere Schreibweise, indem wir das *von* (t) nicht weiter mit aufschreiben.

Gleichgewichte

Wir können uns zum Beispiel fragen, wann die Populationen im Gleichgewicht sind, sich also, trotz ihrer Interaktion, nicht ändern. Dies ist dann der Fall, wenn die Ableitungen verschwinden.

Wir müssen also die Gleichungen

$$0 = \mu \cdot M - \delta \cdot Z \cdot M$$
$$0 = -\varepsilon \cdot Z + \zeta \cdot Z \cdot M$$

lösen.

Gleichgewichte

Wir können uns zum Beispiel fragen, wann die Populationen im Gleichgewicht sind, sich also, trotz ihrer Interaktion, nicht ändern. Dies ist dann der Fall, wenn die Ableitungen verschwinden.

Wir müssen also die Gleichungen

$$0 = \mu \cdot M - \delta \cdot Z \cdot M = M \cdot (\mu - \delta \cdot Z)$$
$$0 = -\varepsilon \cdot Z + \zeta \cdot Z \cdot M = Z \cdot (-\varepsilon + \zeta \cdot M)$$

lösen.

Die Lösungen sind $M = 0$ und $Z = 0$, sowie $M = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ und $Z = \frac{\mu}{\delta}$.

Graphen der Funktionen

Obwohl man die Funktionen $M(t)$ und $Z(t)$ nicht kennt, kann man die zugehörigen Graphen mittels numerischer Methoden zeichnen.

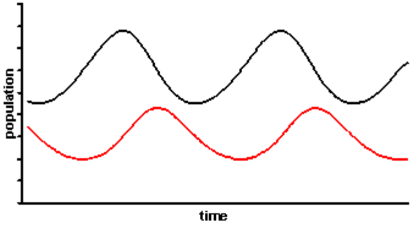

Figure : Beispiel Graphen der Funktionen $M(t)$ (schwarz) und $Z(t)$ (rot).
Quelle: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/aa/Volterra_lotka_dynamics.PNG

Ein Zombie-Modell

Nun kommen wir zu den Zombies. Wir betrachten ein noch recht einfaches Modell mit den drei Funktionen:

- $M(t)$ Anzahl an Menschen, also nicht Untoten.
- $Z(t)$ Anzahl an Zombies, also Untoten.
- $T(t)$ Anzahl an Toten.

Wir nehmen an, dass die Zombieinvasion über einen recht kurzen Zeitraum stattfindet. Das heißt, dass wir die Reproduktionsrate der Menschen nicht mit modellieren beziehungsweise als 0 annehmen.

Ein Zombie-Modell

Zombies entstehen, wie zum Beispiel in dem Film *Night of the Living Dead* von George A. Romero (1968), indem sie von den Toten als Untote aus ihren Gräbern steigen. Eine weitere Möglichkeit für das entstehen eines Zombies ist, dass ein Mensch gebissen und dadurch infiziert wird.

Als nächste Zutat für unser Modell können sich die Menschen gegen die Zombies zur Wehr setzen und diese wieder zu den Toten schicken.

Ein Zombie-Modell

Das Modell (aus [1]) hat dann diese Gestalt:

$$\begin{aligned} M' &= -\delta \cdot Z \cdot M \\ Z' &= \delta \cdot Z \cdot M + \zeta \cdot T - \alpha \cdot Z \cdot M \\ T' &= -\zeta \cdot T + \alpha \cdot Z \cdot M \end{aligned}$$

Wie vorhin können wir uns anschauen, wann die Ableitungen verschwinden.

Wie stehen unsere Chancen?

Lösen wir also:

$$\begin{aligned}
0 &= -\delta \cdot Z \cdot M \\
0 &= \delta \cdot Z \cdot M + \zeta \cdot T - \alpha \cdot Z \cdot M \\
0 &= -\zeta \cdot T + \alpha \cdot Z \cdot M
\end{aligned}$$

Dabei stellen wir fest, dass zwangsläufig $M = 0$ oder $Z = 0$ gelten muss. Die zweite schlechte Nachricht ist ein Blick auf die Graphen der numerisch berechneten Lösungen.

Graphen

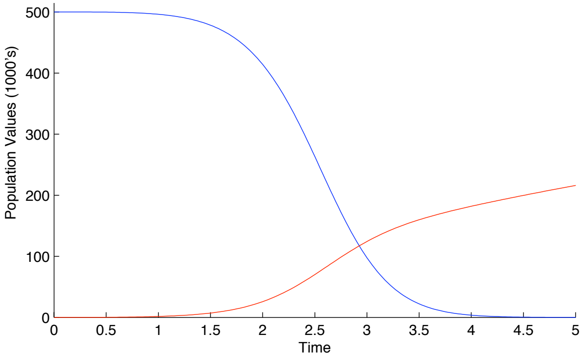

Figure : $M(t)$ in Blau und $Z(t)$ in Rot. Quelle: [1]

Ein komplizierteres Modell

Die Autoren des ersten Modell haben in ihrer Arbeit noch einige weitere Modelle konstruiert. Zum Beispiel das Modell:

$$\begin{aligned} M' &= -\delta \cdot Z \cdot M + \gamma \cdot Z \\ I' &= \delta \cdot Z \cdot M - \rho \cdot I - \beta \cdot I \\ Z' &= \rho \cdot I + \zeta \cdot T - \alpha \cdot Z \cdot M - \gamma \cdot Z \\ T' &= -\zeta \cdot T + \alpha \cdot Z \cdot M + \beta \cdot I \end{aligned}$$

Es beinhaltet eine Inkubationszeit I und die Möglichkeit eine infizierte Person mit einem Heilmittel γ zu kurieren.

Für dieses Modell gibt es ein Gleichgewicht mit $M \neq 0$ und $Z \neq 0$ und der folgende Graph zeigt, das einige Menschen überleben können. Allerdings nur sehr wenige gegenüber den Zombies.

Graphen

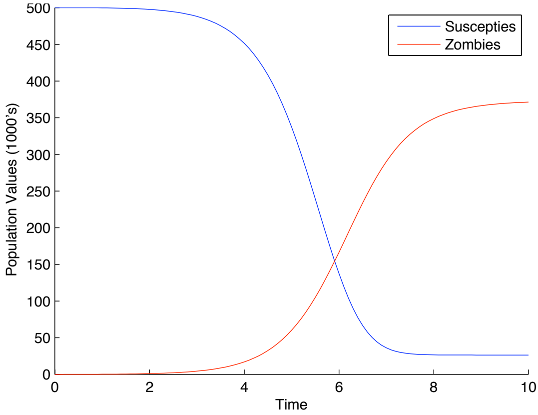

Figure : $M(t)$ in Blau und $Z(t)$ in Rot. Quelle: [1]

Fazit

Wer nach dem nächsten Zombiefilm ein Happy-End vermisst sollte sich erinnern:

Zumindest mathematisch gesehen haben wir so gut wie keine Chance beim Auftreten von Zombies zu Überleben!

Ende

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Literatur

Philip Munz and Ioan Hudea and Joe Imad and Robert J. Smith, When zombies attack!: Mathematical modelling of an outbreak of zombie infection, In J.M. Tchuenche and C. Chiyaka, editors, Infectious Disease Modelling Research Progress (Nova Science), (2009), (Seiten 133–150).