Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 9. April 2019

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2019, Übungsblatt 2)

`https://uol.de/condmat/teaching/qm/`

Abgabe: Dienstag, 23. April bis 10:15 Uhr (*vor* der Vorlesung)

5) **Zeitentwicklung eines Gauß-Wellenpakets**

a) Betrachten Sie ein eindimensionales Wellenpaket

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \, \varphi_0(k) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega(k)t)}$$

mit der Dispersionsrelation $\omega(k) = \hbar k^2/(2m)$ und der Impulsverteilung

$$\varphi_0(k) = N \mathrm{e}^{-(k-k_0)^2 a^2/2} \; .$$

Wie muss (im Rahmen der üblichen statistischen Interpretation der Wellenfunktion) der Normierungsfaktor N gewählt werden? Zeigen Sie, dass

$$\psi(x,t) = \frac{N}{a\sqrt{1 + \mathrm{i}\frac{\hbar t}{ma^2}}} \exp\left(- \frac{x^2 - 2\mathrm{i}a^2 k_0 x + \mathrm{i}\frac{\hbar k_0^2}{m} a^2 t}{2a^2 \left(1 + \mathrm{i}\frac{\hbar t}{ma^2}\right)} \right) \; .$$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ und zeigen Sie, dass diese Dichte um die klassische Trajektorie eines freien Teilchens mit dem Impuls $p = \hbar k_0$ herum zentriert ist.

c) Erklären Sie, warum

$$\Delta x = a\sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{ma^2}\right)^2}$$

ein vernünftiges Maß für die Breite des Wellenpakets darstellt. Nach welcher Zeit Δt wird also das “Zerfließen” des Pakets wesentlich? Welchen Wert erhält Δt für ein Staubkorn der Masse $m = 1/100$ g bzw. für ein Elektron, wenn in beiden Fällen die anfängliche Ortsunschärfe durch $a = 1$ nm gegeben wird? **(3P)**

6) **Weiteres zur Fourier-Transformation**

a) Die Norm $\|\psi\|$ einer auf $\mathbb{R}^n$ quadratintegrablen Funktion ψ wird definiert durch

$$\|\psi\|^2 = \int \mathrm{d}^n x \, |\psi(\vec{x})|^2 \; .$$

Zeigen Sie durch eine formale Rechnung, dass die in Aufgabe 3 eingeführte Fourier-Transformation die Norm erhält, dass also $\|\widehat{\psi}\| = \|\psi\|$.

b) Zeigen Sie durch ein weiteres formales Argument, dass die Zeitentwicklung einer "freien" Schrödingerwelle eines Teilchens der Masse m durch

$$\psi(\vec{x},t) = \int \mathrm{d}^n x' \, K(\vec{x}-\vec{x}\,',t)\, \psi(\vec{x}\,',t=0)$$

beschrieben wird, wobei der Integralkern ("der Propagator") die Form

$$K(\vec{x}-\vec{x}\,',t) = \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar t}\right)^{n/2} \exp\!\left(\mathrm{i}\frac{m}{2\hbar t}(\vec{x}-\vec{x}\,')^2\right)$$

annimmt. **(2P)**

7) **Funktionenräume**

a) Zeigen Sie durch je ein Beispiel, dass eine quadratintegrable Funktion nicht unbedingt auch integrabel ist, eine integrable Funktion ihrerseits nicht unbedingt quadratintegrabel.

b) Zeigen Sie, dass im Raum der auf dem $\mathbb{R}^n$ definierten, komplexwertigen, stetigen und quadratintegrablen Funktionen durch

$$\langle f|g\rangle \equiv \int \mathrm{d}^n x \, f^*(\vec{x}) g(\vec{x})$$

ein Skalarprodukt definiert wird. **(2P)**

8) **Weiteres zu den Hermite-Polynomen**

a) Beweisen Sie für die in Aufgabe 4) eingeführten Hermite-Polynome die Identitäten

$$H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x) \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_n(x) = 2n\, H_{n-1}(x)\;.$$

<u>Hinweis:</u> Sehr hilfreich ist hier die Beziehung (Beweis ?)

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n x\, \mathrm{e}^{-x^2} = x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \mathrm{e}^{-x^2} + n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n-1} \mathrm{e}^{-x^2}\;.$$

Zeigen Sie dann die Gültigkeit der Differentialgleichung

$$H_n''(x) - 2x\, H_n'(x) + 2n\, H_n(x) = 0\;.$$

b) Betrachten Sie nun die Funktionen

$$\psi_n(x) = N_n\, H_n(x)\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\;, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots\;,$$

wobei die Normierungskonstanten N_n hier noch unbestimmt bleiben. Zeigen Sie unter Benutzung von Aufgabenteil a), dass diese Funktionen der Eigenwertgleichung (!)

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}x^2\right] \psi_n(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \psi_n(x)$$

gehorchen.

c) Bestimmen Sie nun die Normierungskonstanten N_n.
<u>Hinweis:</u> Ersetzen Sie dazu in der Bestimmungsgleichung

$$1 = N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} H_n^2(x)$$

nur *eines* der beiden Hermite-Polynome durch den aus Aufgabe 4) bekannten Ausdruck und integrieren Sie n mal partiell. Es wird dann tatsächlich verblüffend einfach! **(3P)**