

## Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2019, Übungsblatt 3)

<https://uol.de/condmat/teaching/qm/>

**Abgabe:** Dienstag, 30. April bis 10:15 Uhr (*vor* der Vorlesung)

### 9) Zum Umgang mit Kommutatoren

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Kommutatorgleichungen:

$$(i) [\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$$

$$(ii) [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$$

$$(iii) [\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$$

b) Es sei  $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + \hat{V}$  der Hamilton-Operator für die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse  $m$  in einem Potential  $V(x)$ . Berechnen Sie die Kommutatoren  $[\hat{H}, \hat{p}]$  und  $[\hat{H}, \hat{x}]$ . **(2P)**

### 10) Erwartungswert der kinetischen Energie für ein Gauß-Wellenpaket

Betrachten Sie noch einmal das eindimensionale Gauß-Wellenpaket aus Aufgabe 5 und berechnen Sie für dieses Paket den Erwartungswert der kinetischen Energie. Zeigen Sie, dass dieser Erwartungswert *größer* ist als die kinetische Energie eines klassischen Teilchens mit dem Impuls  $p = \hbar k_0$ . Um wieviel? Ist das Auftauchen dieser Differenz plausibel? **(2P)**

### 11) Die "allgemeine Unschärferelation"

$\hat{A}$  und  $\hat{B}$  seien hermitesche Operatoren;  $\psi$  sei eine normierte Wellenfunktion. Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung eingeführten Streuungen  $\Delta A$  und  $\Delta B$  für diesen Zustand der folgenden Ungleichung gehorchen:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle \right| .$$

Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass  $\left| \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle \right| \leq 2 \|\hat{A}\psi\| \|\hat{B}\psi\|$  und ersetzen Sie dann  $\hat{A}$  durch  $\hat{A} - \langle A \rangle$  sowie  $\hat{B}$  durch  $\hat{B} - \langle B \rangle$ . **(2P)**

### 12) Die Kugelflächenfunktionen (Teil 1)

In dieser Aufgabe werden Lösungen der Eigenwertgleichung

$$(-\Lambda^2) Y(\vartheta, \varphi) = \alpha Y(\vartheta, \varphi) \tag{1}$$

konstruiert, wobei der lineare Differentialoperator  $-\Lambda^2$  durch

$$-\Lambda^2 = - \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

gegeben ist. Die Eigenfunktionen sollen auf der Oberfläche der Einheitskugel (d.h. für  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) definiert, stetig und eindeutig sein. Ferner fordert man ihre Normierung:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta |Y(\vartheta, \varphi)|^2 = 1 .$$

Diese wichtige Eigenwertaufgabe tritt in der Quantenmechanik bei der Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung für radialsymmetrische Potentiale (also z.B. beim Wasserstoff-Atom) auf, aber auch bereits bei klassischen Randwertproblemen.

a) Zeigen Sie, dass durch den Produktansatz  $Y(\vartheta, \varphi) = F(\vartheta)\Phi(\varphi)$  die partielle Differentialgleichung (1) in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left[ \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \right) + \alpha \sin^2 \vartheta \right] F(\vartheta) = \lambda F(\vartheta) \quad (2)$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi(\varphi) = -\lambda \Phi(\varphi) \quad (3)$$

überführt wird, wobei  $\lambda$  eine noch zu bestimmende Konstante ist.

b) Folgern Sie aus der geforderten Eindeutigkeit, dass  $\lambda = m^2$ , wobei  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  eine ganze Zahl ist. Die normierten Lösungen von (3) erhalten daher die einfache Form

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} .$$

c) Zeigen Sie, dass die  $\vartheta$ -Gleichung (2) durch Übergang zu der neuen Variablen  $t = \cos \vartheta$  die Gestalt

$$\frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \frac{df}{dt} \right] + \left( \alpha - \frac{m^2}{1-t^2} \right) f(t) = 0 \quad (4)$$

annimmt, wobei  $f(t) = F(\vartheta)$ . Da hier nur  $m^2$ , nicht jedoch  $m$  selbst eingeht, reicht es im folgenden, nur den Fall  $m \geq 0$  zu untersuchen.

d) Zur Lösung dieser Gleichung (4) macht man den Ansatz

$$f(t) = (1-t^2)^{m/2} g_m(t) .$$

(Können Sie diesen Ansatz begründen?) Zeigen Sie, dass die dadurch definierten Funktionen  $g_m(t)$  die Differentialgleichung

$$\left\{ (1-t^2) \frac{d^2}{dt^2} - 2(m+1)t \frac{d}{dt} + [\alpha - m(m+1)] \right\} g_m(t) = 0 \quad (5)$$

erfüllen. (Dies ist die "verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung".)

e) Diese Gleichung (5) besitzt eine bemerkenswerte Eigenschaft: Ist  $g_0(t)$  eine Lösung für  $m = 0$ , dann ist

$$g_m(t) = \left( \frac{d}{dt} \right)^m g_0(t)$$

eine Lösung für beliebiges ganzzahliges  $m > 0$ . Wieso? (4P)

**Fazit:** Um die gesuchten Eigenfunktionen  $Y(\vartheta, \varphi)$  und ihre Eigenwerte  $\alpha$  zu bestimmen, muss nun die Gleichung (5) "nur" noch für  $m = 0$  gelöst werden — das geschieht auf dem nächsten Übungsblatt!