Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 14. Mai 2019

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2019, Übungsblatt 6)

`https://uol.de/condmat/teaching/qm/`

Abgabe: Dienstag, 21. Mai bis 10:15 Uhr (*vor* der Vorlesung)

20) **Bindungszustände für eine Potentialmulde**

In dieser Aufgabe soll das Spektrum der „Bindungszustände" für ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(x/a)} \qquad (V_0 > 0)$$

gefunden werden; diese Zustände sind quadratintegrabel und besitzen (im Unterschied zu den hier nicht betrachteten „Streuzuständen") einen *negativen* Energieeigenwert.

a) Machen Sie für die stationären Zustände den Ansatz

$$\varphi(x) = [\cosh(x/a)]^{-2\lambda} u(x)$$

mit zunächst noch unbestimmtem λ und zeigen Sie dann, dass für

$$\lambda = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{8mV_0a^2}{\hbar^2} + 1} - 1\right] \qquad \text{und} \qquad \kappa = \sqrt{\frac{m|E|a^2}{2\hbar^2}}$$

die stationäre Schrödingergleichung in die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} - \frac{4\lambda}{a}\tanh(x/a)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{4}{a^2}\left(\lambda^2 - \kappa^2\right)u(x) = 0$$

überführt wird.

b) Zeigen Sie weiterhin, dass man daraus durch die Substitution

$$z = -\sinh^2(x/a)$$

eine aus Aufgabe 19 bekannte hypergeometrische Differentialgleichung erhält:

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} + \left[\frac{1}{2} - (1-2\lambda)z\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} - \left(\lambda^2 - \kappa^2\right)u(z) = 0\ .$$

c) Erklären Sie, warum man mit Hilfe der in Aufgabe 19 eingeführten Fundamentallösungen $u_1(z)$ bzw. $u_2(z)$ Bindungszustände gerader bzw. ungerader Parität konstruieren kann, sofern die jeweilige Reihe abbricht. Wie lauten daher die Energieeigenwerte der Bindungszustände? Wieviele Bindungszustände gibt es? Zeigen Sie, dass für *jede* Wahl von $V_0 > 0$ und $a > 0$ mindestens ein Bindungszustand existiert. **(4P)**

21) **Aufenthalt im klassisch verbotenen Bereich**

Ein Quantenteilchen bewege sich im Potential eines eindimensionalen harmonischen Oszillators. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im klassisch verbotenen Gebiet anzutreffen, wenn es sich *(i)* im Grundzustand, *(ii)* im ersten angeregten Zustand und *(iii)* im zweiten angeregten Zustand befindet?

Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe werden numerische Werte des Wahrscheinlichkeitsintegrals

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \mathrm{d}y \, \mathrm{e}^{-y^2/2}$$

benötigt, die Sie z.B. in dem bewährten „*Taschenbuch der Mathematik*“ von Bronstein und Semendjajew finden. **(3P)**

22) **Zum Umgang mit Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren**

a) Beweisen Sie die Vertauschungsrelationen

$$[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1} \qquad \text{und} \qquad [a^\dagger, a^n] = -na^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

für den Erzeugungsoperator $a^\dagger$ und den Vernichtungsoperator a des harmonischen Oszillators.

b) Es sei ψ_0 die Grundzustandsfunktion des harmonischen Oszillators. Zeigen Sie allein mit Hilfe der Eigenschaften der Operatoren a und $a^\dagger$, dass die Funktion $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n \psi_0$ eine Eigenfunktion des Operators $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$ ist.

c) Berechnen Sie das Unschärfeprodukt für ein Teilchen, das sich im n-ten angeregten Zustand eines harmonischen Oszillatorpotentials befindet.

Hinweis: Drücken Sie den Orts– und den Impulsoperator durch a und $a^\dagger$ aus! **(3P)**