Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 28. Mai 2019

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2019, Übungsblatt 8)

`https://uol.de/condmat/teaching/qm/`

Abgabe: Dienstag, 4. Juni bis 10:15 Uhr (*vor* der Vorlesung)

26) **Kohärente Zustände (Teil 2)**

a) Erklären Sie, warum die in Aufgabe 25 untersuchten Eigenzustände des Vernichtungsoperators auch in der Form

$$\psi_z(t) = \mathrm{e}^{-|z|^2/2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\, \mathrm{e}^{z(t)a^\dagger}\, \mathrm{e}^{-z^*(t)a}\, \varphi_0$$

geschrieben werden können, wobei $z(t) = z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$. Benutzen Sie dann die in Aufgabe 17 b) erhaltene Beziehung zum Beweis der Darstellung

$$\psi_z(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\, \mathrm{e}^{z(t)a^\dagger - z^*(t)a}\, \varphi_0 \; .$$

b) Geben Sie die Ortsdarstellung von $\psi_z(t)$ explizit an. Zeigen Sie, dass die Dichte $|\psi_z(t)|^2$ der Grundzustandsdichte eines harmonischen Oszillators gleicht, die ohne Formänderung mit der Frequenz ω schwingt.
Hinweis: Drücken Sie die Operatoren a und $a^\dagger$ durch q und $\mathrm{d}/\mathrm{d}q$ aus, wobei q die Ortskoordinate des Oszillators bezeichnet. Beachten Sie dann, dass $\exp(\alpha\, \mathrm{d}/\mathrm{d}q)$ ein Verschiebeoperator ist: $\exp(\alpha\, \mathrm{d}/\mathrm{d}q)f(q) = f(q+\alpha)$ für eine glatte Funktion f. **(3P)**

27) **Der Morse-Oszillator**

Zur Beschreibung der Vibrationen eines zweiatomigen Moleküls konstruierte Philip M. Morse im Jahre 1929 das Potential

$$V(x) = D\left(1 - \mathrm{e}^{-2bx}\right)^2$$

mit $x = (r-a)/a$; die Variable r bezeichnet den Abstand der beiden Atomkerne.

a) Skizzieren Sie den Verlauf der Potentialkurve und zeigen Sie, dass die Kreisfrequenz der Vibrationen in harmonischer Näherung durch

$$\omega = \sqrt{\frac{8D}{m}}\,\frac{b}{a}$$

gegeben wird. Dabei ist m die reduzierte Masse der beiden Atome.

b) Zeigen Sie, dass die stationäre Schrödingergleichung für ein Teilchen mit der (reduzierten) Masse m, das sich in dem Morse-Potential bewegt, in der neuen Variablen

$$y = \frac{4D}{\hbar\omega}\,\mathrm{e}^{-2bx}$$

die Form

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} - \frac{s^2}{y^2} + \frac{2D/(\hbar\omega)}{y} - \frac{1}{4}\right]\varphi(y) = 0$$

annimmt. Dabei bestimmt der dimensionslose Parameter s^2 die Energie E der quadrat-integrablen Schwingungszustände:

$$s^2 = \frac{ma^2(D-E)}{2\hbar^2 b^2} \, .$$

c) Begründen Sie nun den Ansatz

$$\varphi(y) = \mathrm{e}^{-y/2}\, y^s\, u(y)$$

und zeigen Sie, dass die so definierte Funktion $u(y)$ der aus Aufgabe 24 bekannten konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung mit den Parametern

$$\gamma = 2s + 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha = -\left(\frac{2D}{\hbar\omega} - s - \frac{1}{2}\right)$$

gehorcht. Folgern Sie, dass das Schwingungsspektrum durch den Ausdruck

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{(\hbar\omega)^2}{4D}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$$

mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ gegeben wird. Wieviele normierbare Schwingungszustände gibt es?

d) Vergleichen Sie das Spektrum des Morse-Oszillators mit dem Spektrum der Potentialmulde aus Aufgabe 20. Was fällt Ihnen auf? Kann man also aus der Kenntnis des Spektrums der Bindungszustände auf die Form der Potentialkurve schließen? **(4P)**

28) **Zur Feldemission**

Innerhalb eines Metalls, das den gesamten Halbraum $x < 0$ ausfüllen soll, bewegen sich Elektronen (näherungsweise) in einem konstanten Potential $-V_0$. Wenn nun außerhalb des Metalls ein elektrisches Feld der Stärke F wirkt, hat man den Potentialverlauf

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } x < 0 \\ -eFx & \text{für } x > 0 \, . \end{cases}$$

Schätzen Sie die Austrittswahrscheinlichkeit der Elektronen für die drei Feldstärken $F = 10^6$ V/cm, 10^7 V/cm und 10^8 V/cm ab, wenn ihre Austrittsarbeit 2 eV, 3 eV und 5 eV beträgt. (Es sind also 9 Werte anzugegeben!) **(2P)**

29) **Eigenschaften des Drehimpulsoperators**

In der Quantenmechanik wird der Drehimpulsoperator in der Ortsdarstellung durch

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\vec{r} \times \vec{\nabla}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die (kartesischen) Komponenten dieses Operators der Beziehung $[L_j, L_k] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{jkl}L_l$ gehorchen ($j, k, l = 1, 2, 3$), dass aber dennoch jede Komponente mit $\vec{L}^2$ vertauscht: $[L_j, \vec{L}^2] = 0$. **(1P)**