Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 4. Juni 2019

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2019, Übungsblatt 9)

`https://uol.de/condmat/teaching/qm/`

Abgabe: Dienstag, 11. Juni bis 10:15 Uhr (*vor* der Vorlesung)

30) **Der Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten**

a) Drücken Sie die kartesischen Komponenten L_x, L_y und L_z des Drehimpulsoperators in Kugelkoordinaten aus.

Vorschlag: Es kann sinnvoll sein, zunächst den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten darzustellen. Das gelingt mit Hilfe des Ansatzes

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \vec{e}_r c_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta c_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi c_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \, , \end{aligned}$$

wobei $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ die kartesischen Einheitsvektoren und $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi$ die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten (also das "lokale Dreibein") bezeichnen; die Koeffizienten c_r, c_ϑ und c_φ sind zu bestimmen. Die Aufgabe kann jedoch auch vollständig *ohne* Verwendung des lokalen Dreibeins gelöst werden (wenn auch weniger elegant). Sie benötigen in jedem Fall die Elemente der Transformationsmatrix

$$\frac{\partial(r, \vartheta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} \, ,$$

ausgedrückt durch Kugelkoordinaten.

b) Geben Sie auch die Operatoren L_+, L_- und $\vec{L}^2$ in Kugelkoordinaten an. Wie hängt $\vec{L}^2$ mit dem schon in Aufgabe 12 betrachteten Operator $-\Lambda^2$ zusammen? **(4P)**

31) **Weiteres zum Drehimpulsoperator**

a) Welche Werte besitzen die Kommutatoren $[L_j, p_k]$ $(j, k = 1, 2, 3)$?

b) Beweisen Sie die wichtige Operatorgleichung

$$-\hbar^2 \Delta = -\frac{\hbar^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\vec{L}^2}{r^2} \, .$$

Hinweis: Gehen Sie aus von der Darstellung $\vec{L} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \vec{r} \times \vec{\nabla}$ und benutzen Sie den ε-Kalkül zur Berechnung von $\vec{L}^2$. Beachten Sie, dass

$$\vec{r} \cdot \vec{\nabla} = r \frac{\partial}{\partial r} \, .$$

(2P)

32) **Energiebänder für ein periodisches Stufenpotential**

Ein periodisches Potential mit der Periodizitätslänge $L = a + b$ werde für $0 \leq x < a + b$ definiert durch

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < a \\ V_0 & \text{für } a \leq x < a + b\,, \end{cases}$$

wobei $V_0 > 0$, und wird außerhalb dieses Intervalls periodisch fortgesetzt.

a) Zeigen Sie, dass für $0 < E < V_0$ die Transfermatrix für den Übergang vom Intervall $0 \leq x < a$ in das Intervall $a + b \leq x < 2a + b$ die Gestalt

$$T = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kb}\left[\cosh\kappa b - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa}\right)\sinh\kappa b\right] & -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(2a+b)}\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\kappa}{k} + \frac{k}{\kappa}\right)\sinh\kappa b \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(2a+b)}\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\kappa}{k} + \frac{k}{\kappa}\right)\sinh\kappa b & \mathrm{e}^{\mathrm{i}kb}\left[\cosh\kappa b + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa}\right)\sinh\kappa b\right] \end{pmatrix}$$

besitzt, wobei wie üblich $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ und $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$.

b) Folgern Sie, dass die erlaubten Bloch-Wellen mit Wellenzahl q die Gleichung

$$\cos[q(a + b)] = \cosh\kappa b\cos ka + \frac{\kappa^2 - k^2}{2k\kappa}\sinh\kappa b\sin ka$$

erfüllen müssen. Zeigen Sie, dass Energien mit $ka = n\pi$ für jede ganze Zahl n "verboten" sind.

c) Welche Gleichung müssen die Bloch-Zustände erfüllen, wenn $E > V_0$? **(3P)**

33) **Bindungszustand für ein δ-Potential**

Zeigen Sie, dass das eindimensionale Potential

$$V(x) = -W_0\,\delta(x)$$

für jedes $W_0 > 0$ genau einen Bindungszustand zulässt. Wie lautet die Energie dieses Zustandes? **(1P)**