

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2019, Übungsblatt 10)

<https://uol.de/condmat/teaching/qm/>

Abgabe: Dienstag, 18. Juni bis 10:15 Uhr (*vor* der Vorlesung)

34) Bindungszustände für ein “doppeltes δ -Potential”

Untersuchen Sie die Bindungszustände für das eindimensionale Potential

$$V(x) = -W_0(\delta(x+a) + \delta(x-a))$$

in Abhängigkeit vom Abstand $2a$ der beiden δ -Mulden. Zeigen Sie insbesondere, dass für $a \rightarrow 0$ nur ein einziger, symmetrischer Bindungszustand existiert und ein zweiter, anti-symmetrischer Bindungszustand erst bei einem gewissen endlichen Abstand auftreten kann. Wie groß ist die Tunnelaufspaltung für sehr große a ? **(3P)**

35) Noch einmal: Die Kugelflächenfunktionen

Die Leiteroperatoren L_{\pm} und die z -Komponente L_z des Drehimpulsoperators besitzen bekanntlich in Kugelkoordinaten die Darstellungen

$$\begin{aligned} L_{\pm} &= \hbar e^{\pm i\varphi} \left[(-\cot \vartheta) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \pm \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right] \\ L_z &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} . \end{aligned}$$

a) Folgern Sie aus den Gleichungen $L_z Y_{\ell\ell} = \hbar \ell Y_{\ell\ell}$ und $L_+ Y_{\ell\ell} = 0$, dass die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell\ell}$ die Form

$$Y_{\ell\ell}(\vartheta, \varphi) = N_{\ell} e^{i\ell\varphi} \sin^{\ell} \vartheta$$

annehmen. Verwenden Sie dann das Eulersche Integral

$$\int_0^1 dt t^{z_1-1} (1-t)^{z_2-1} = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)}$$

zur Berechnung der Normierungskonstanten N_{ℓ} :

$$N_{\ell} = \frac{(-1)^{\ell}}{2^{\ell} \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}} ,$$

wobei der Faktor $(-1)^{\ell}$ Konvention ist.

b) Zeigen Sie nun zunächst die Beziehung

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(2\ell)!(\ell-m)!}} (L_-/\hbar)^{\ell-m} Y_{\ell\ell}(\vartheta, \varphi) .$$

Beweisen Sie dann für eine glatte Funktion $f(\vartheta)$ die Identität

$$(L_-/\hbar) e^{i\ell\varphi} f(\vartheta) = e^{i(\ell-1)\varphi} \frac{1}{\sin^{\ell-1}\vartheta} \frac{d}{d\cos\vartheta} (f(\vartheta) \sin^\ell\vartheta)$$

und erschließen Sie daraus für die Kugelflächenfunktionen die Darstellung

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell+m)!}{4\pi(\ell-m)!}} e^{im\varphi} \frac{1}{\sin^m\vartheta} \left(\frac{d}{d\cos\vartheta}\right)^{\ell-m} \sin^{2\ell}\vartheta.$$

c) Die zugeordneten Legendre-Funktionen $P_{\ell m}(x)$ gehorchen für $m \geq 0$ der Gleichung

$$P_{\ell, -m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell m}(x).$$

(Diese Gleichung brauchen Sie ausnahmsweise *nicht* zu beweisen!) Zeigen Sie damit, dass die in b) gefundene Darstellung der Kugelflächenfunktionen mit der in der Vorlesung angegebenen übereinstimmt. **(3P)**

36) Die sphärischen Besselfunktionen

Die Funktionen $j_\ell(z)$ und $n_\ell(z)$ sind unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d}{dz} - \frac{\ell(\ell+1)}{z^2} + 1 \right] R(z) = 0,$$

die für $z \rightarrow 0$ regulär bleiben bzw. singular werden.

a) Zeigen Sie, dass diese Lösungen für $\ell = 0$ besonders einfach sind:

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z} \quad \text{und} \quad n_0(z) = -\frac{\cos z}{z}.$$

b) Machen Sie für $\ell > 0$ den in der Vorlesung besprochenen Ansatz $R(z) = z^\ell u_\ell(z)$ und zeigen Sie, dass die Funktionen $u_\ell(z)$ der Gleichung

$$u_\ell''(z) + \frac{2(\ell+1)}{z} u_\ell'(z) + u_\ell(z) = 0$$

gehörchen, die Funktionen $v_\ell(z) = u_\ell'(z)/z$ dagegen der Gleichung

$$v_\ell''(z) + \frac{2(\ell+2)}{z} v_\ell'(z) + v_\ell(z) = 0.$$

Folgern Sie, dass

$$j_\ell(z) = (-z)^\ell \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^\ell \frac{\sin z}{z} \quad \text{und} \quad n_\ell(z) = -(-z)^\ell \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^\ell \frac{\cos z}{z},$$

wobei die Vorzeichen erneut Konvention sind.

c) Geben Sie die Funktionen $j_\ell(z)$ und $n_\ell(z)$ für $\ell = 0, 1, 2$ explizit an.

d) Welches asymptotische Verhalten besitzen die Funktionen $j_\ell(z)$ und $n_\ell(z)$ für $z \rightarrow 0$ sowie für $z \rightarrow \infty$? **(4P)**