

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2019, Übungsblatt 11)

<https://uol.de/condmat/teaching/qm/>

Abgabe: Dienstag, 25. Juni bis 10:15 Uhr (*vor* der Vorlesung)

37) Der Atomkern — ein unendlich tiefer sphärischer Potentialtopf?

a) Betrachten Sie das Zentralpotential

$$V(r) = \begin{cases} 0 & ; r \leq a \\ \infty & ; r > a \end{cases}$$

und geben Sie die energetische Reihenfolge seiner niedrigsten 10 Niveaus an. Zeigen Sie insbesondere, dass das $2s$ -Niveau unterhalb des $1f$ -Niveaus liegt.

Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe benötigen Sie die Nullstellen der sphärischen Besselfunktionen $j_\ell(z)$, die Sie z.B. in dem nützlichen, von M. Abramowitz und I. A. Stegun herausgegebenen *Handbook of Mathematical Functions* finden können.

b) Die Nukleonen im Atomkern unterliegen einem kurzreichweitigen Potential, das durch den Potentialtopf aus Aufgabenteil a) modelliert werden soll. Da die Nukleonen Fermionen sind, können sie jeden Zustand zweifach besetzen. Wie lauten dann die niedrigsten 10 „magischen Nukleonenzahlen“, bei denen jeweils ein Niveau vollständig gefüllt ist?

Bemerkung: Da hier die Spin-Bahn-Wechselwirkung der Nukleonen vernachlässigt wird, können nicht alle der tatsächlichen „magischen Zahlen“ 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, ... herauskommen. **(2P)**

38) Das „zweidimensionale Wasserstoffatom“

a) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten die Gestalt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

besitzt. Folgern Sie, dass die radiale Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m in einem *zweidimensionalen* radialsymmetrischen Potential $V(r)$ die Form

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\hbar^2 \ell^2}{2mr^2} + V(r) \right) R(r) = E R(r)$$

annimmt, wobei die Bahndrehimpulsquantenzahl ℓ ganzzahlig ist. Wie hoch sind die Bindungszustände mindestens entartet?

b) Betrachten Sie speziell ein „zweidimensionales Wasserstoffatom“, d.h. setzen Sie

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

und ermitteln Sie das Spektrum der gebundenen Zustände. Sie können hierzu das in der Vorlesung für den *drei*dimensionalen Fall besprochene Verfahren weitgehend übernehmen. Was ändert sich nun im Vergleich zum dreidimensionalen Fall? Wie hoch ist der Entartungsgrad der Bindungszustände? **(3P)**

Bemerkung: Zweidimensionale wasserstoffartige Bindungszustände lassen sich mit Exzitonen in bestimmten Halbleiter-Schichtstrukturen realisieren; das in dieser Aufgabe gefundene Spektrum lässt sich an solchen Systemen experimentell vermessen.

39) Der zweidimensionale isotrope harmonische Oszillator

a) Betrachten Sie einen zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillator mit Kreisfrequenz ω in kartesischen Koordinaten und geben Sie seine Energieeigenwerte und deren Entartungsgrade an. Wie sehen insbesondere die Grundzustandswellenfunktion und die Wellenfunktionen der beiden ersten angeregten Zustände aus?

b) Lösen Sie nun die stationäre Schrödingergleichung des zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators in ebenen Polarkoordinaten. Zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte dieses Systems in der Form

$$E_{N,\ell} = \hbar\omega(2N + |\ell| + 1)$$

geschrieben werden können, wobei N die radiale Quantenzahl und ℓ die in Aufgabe 38 a) eingeführte Drehimpulsquantenzahl bezeichnet. Stellen Sie sicher, dass diese Niveaus und ihre Entartungsgrade mit den in Aufgabenteil a) gefundenen übereinstimmen.

c) Konstruieren Sie die Wellenfunktionen der ersten angeregten Zustände mit den Drehimpulsen $+\hbar$ und $-\hbar$ und zeigen Sie, dass diese Funktionen Linearkombinationen der in Teil a) angegebenen sind. **(3P)**

Bemerkung: Die Lösung der Schrödingergleichung des *zwei*dimensionalen isotropen harmonischen Oszillators ermöglicht sofort die Bestimmung der Bindungszustände des *drei*dimensionalen Wasserstoffatoms. Diese überraschende Tatsache wird später in Aufgabe 41 verdeutlicht werden.

40) Der Bohrsche Radius in der Wellenmechanik

Die normierte Grundzustandswellenfunktion des Wasserstoffatoms lautet

$$\psi_{1,0,0}(\vec{r}) = \frac{2}{a^{3/2}} e^{-r/a} Y_{0,0}(\vartheta, \varphi) ,$$

wobei a den Bohrschen Radius bezeichnet.

a) In welcher Entfernung vom Proton wird die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte des Grundzustands maximal?

b) Was ist der Erwartungswert für den Abstand des Elektrons vom Proton, wenn sich das Atom im Grundzustand befindet? **(2P)**