Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 25. Juni 2019

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2019, Übungsblatt 12)

`https://uol.de/condmat/teaching/qm/`

Abgabe: Dienstag, 2. Juli bis 10:15 Uhr (*vor* der Vorlesung)

41) Separation von Schwerpunkts– und Relativkoordinaten

Zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 werden durch das Potential eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz ω gefangen und wechselwirken über ein Potential V, das nur von ihrem Abstand abhängt. Der Hamiltonoperator dieses Zweiteilchenproblems lautet also

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2 + \frac{1}{2}m_1\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 r_2^2 + V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \; .$$

Zeigen Sie, dass die stationäre Schrödingergleichung bei Verwendung von Schwerpunkts– und Relativkoordinaten in zwei Gleichungen separiert werden kann. Was beschreiben diese beiden Gleichungen? **(2P)**

42) Das Wasserstoffatom als zweidimensionaler harmonischer Oszillator

Eine elegante Methode zur Bestimmung der Bindungszustände des Wasserstoffatoms besteht in der Rückführung der radialen Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms auf die radiale Schrödingergleichung eines *zwei*dimensionalen isotropen harmonischen Oszillators. Dieses Verfahren, das durch die „versteckte“ Symmetrie des Wasserstoffatoms ermöglicht wird, geht zurück auf Julian Schwinger.

a) Gehen Sie aus von der radialen Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms, also von

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \right) u(r) = E\, u(r) \; ,$$

und substituieren Sie

$$r = \frac{\lambda}{2}\,\rho^2 \; .$$

Setzen Sie weiterhin $u(r) = \rho\, F(\rho)$ und zeigen Sie, dass man dann für geeignete Wahl des Skalierungsfaktors λ die aus Aufgabe 39 bekannte radiale Schrödingergleichung eines zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators mit Drehimpuls $|\widetilde{\ell}| = 2\ell + 1$ erhält, wobei die Energie des Wasserstoffatoms die Oszillatorfrequenz bestimmt.

b) Benutzen Sie das in Aufgabe 39 b) erhaltene Resultat für die Energieeigenwerte des isotropen Oszillators, um die Energien der Bindungszustände des Wasserstoffatoms zu erschließen.

c) Verwenden Sie dieses Verfahren zur expliziten Konstruktion der Grundzustandsfunktion des Wasserstoffatoms. **(3P)**

43) **Zum Umgang mit Wasserstoff-Eigenfunktionen**

Die radialen Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms besitzen bekanntlich die Gestalt

$$R_{n\ell}(r) = N_{n\ell} \left(\frac{2r}{na}\right)^{\ell} \mathrm{e}^{-r/na} \, L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na}\right) ,$$

wobei a den Bohrschen Radius bezeichnet. Die zugeordneten Laguerre-Polynome $L_r^s(\rho)$ sollen hier in der Form

$$L_r^s(\rho) = \sum_{\nu=0}^{r-s} \binom{r}{r-s-\nu} \frac{(-\rho)^\nu}{\nu!}$$

verwendet werden; für sie gilt die Rodrigues-Darstellung

$$L_r^s(\rho) = \frac{1}{(r-s)!} \, \rho^{-s} \, \mathrm{e}^{\rho} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)^{r-s} \left(\rho^r \mathrm{e}^{-\rho}\right) .$$

a) Berechnen Sie die Normierungskonstanten $N_{n\ell}$, indem Sie das bereits in Aufgabe 8 zur Normierung der Oszillatorfunktionen erprobte Verfahren heranziehen. **(3P)**

b*) Berechnen Sie die radialen Erwartungswerte

$$\langle r \rangle_{n\ell} = \int_0^\infty \mathrm{d}r \, r^3 R_{n\ell}^2(r) .$$

Stellen Sie sicher, dass Ihr Resultat für $n = 1$, $\ell = 0$ mit dem bereits aus Aufgabe 40 b) bekannten Spezialfall übereinstimmt. **(+3P)**

44) **Störungsrechnung für den harmonischen Oszillator mit äußerer Kraft**

Ein (eindimensionaler) harmonischer Oszillator mit der Kreisfrequenz ω wird durch eine äußere Kraft der Stärke F gestört:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - Fx .$$

a) Erklären Sie (— *ohne* lange Rechnung! —), warum die exakten Energieeigenwerte E_N und –eigenzustände $|N\rangle$ durch

$$E_N = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right) - \frac{F^2}{2m\omega^2}$$

bzw.

$$|N\rangle = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{F}{m\omega^2}\, p\right) |n\rangle$$

gegeben werden, wobei $|n\rangle$ die ungestörten Oszillatorzustände für $F = 0$ bezeichnet.

b) Berechnen Sie die Energieeigenwerte nun mit Hilfe der Rayleigh-Schrödinger-Störungstheorie in zweiter Ordnung von F, indem Sie $V(x) = -Fx$ als „Störung“ auffassen.

Hinweis: Drücken Sie den Störoperator durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus.

c) Zeigen Sie, dass die mit Hilfe der Störungstheorie berechneten Eigenzustände in erster Ordnung von F mit den exakten Eigenzuständen übereinstimmen. **(2P)**