1 Einführung in die Fehlerrechnung, Dichtebestimmung

Abbildung 1.1: Messschieber zur Bestimmung von Längen; Messwert hier: (14,30 ± 0,05) mm.

1.1 Grundlagen der Fehlerrechnung

1.1.1 Ungenauigkeiten und Fehler

Bei jeder physikalischen Messung treten Ungenauigkeiten auf, die sich prinzipiell nicht vermeiden lassen.[1] Dies liegt in der Natur des Messens, denn eine physikalische Größe zu messen bedeutet, sie mit einem willkürlich, aber zweckmäßig festgelegten Maßstab zu vergleichen. Aus zwei Gründen kann ein solcher Vergleich keinen absolut "wahren" Zahlenwert ergeben. Zum einen ist der "wahre" Wert einer Größe ein Konstrukt, einfach deswegen, weil sich dieser Wert nie ganz genau festlegen lässt (wie lang ist ein Seil wirklich, auf einer atomaren Skala beurteilt?) Zum zweiten kann man mit einem Zollstock als Vergleichsmaßstab nicht Längenmessung mit einer Genauigkeit im Mikrometer-Bereich durchführen, mit einer Bügelmessschraube nicht im Nanometer-Bereich; es gibt grundsätzlich weder absolut genaue Messgeräte noch absolut genaue Messmethoden. Jede Messung kann nur mit einer endlichen Genauigkeit durchgeführt werden; auch modernste Hochpräzisionsexperimente liefern Zahlenwerte, die mit einer - wenn auch kleinen - Ungenauigkeit behaftet sind (in bestimmten Experimenten kommt man auf relative Messungenauigkeiten von 10^{-12} und besser). Die Ungenauigkeit eines Messwertes ist also als *Abweichung des Messwertes von dem Konstrukt eines als "wahr" angenommenen Wertes* zu verstehen.

Nun hat sich seit Jahrhunderten eingebürgert, nicht *Ungenauigkeit* zu sagen, sondern *Fehler*, nicht Messungenauigkeit, sondern Messfehler, nicht Ungenauigkeitstheorie, sondern Fehlertheorie. Mit dem Wort ‘Fehler‘ verbindet man ja eigentlich Begriffe wie Irrtum, Versehen - das ist aber nicht gemeint, wenn man vom *Messfehler* spricht (= Messungenauigkeit). Die Angabe des Messfehlers bedeutet nicht, etwas sei falsch gemacht worden; sie liefert vielmehr ein (notwendiges) Maß für

[1] Eine Ausnahme ist natürlich das Abzählen kleiner Mengen diskreter Objekte wie Billardkugeln oder Frösche.

die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Messung. Insbesondere hat die Fehlerrechnung nicht den Sinn, am Schreibtisch (d.h. ohne Wiederholung der Messung) "falsche" Messwerte zu "richtigen" zu machen

Wichtig bei der Fehlerbetrachtung ist zunächst die Berechnung der Messfehler der einzelnen Größen und darüber hinaus die Klärung der Frage, wie diese Fehler das Gesamtergebnis beeinflussen. Die Berechnung und Angabe der Messfehler gehört immer und selbstverständlich ebenso zur Messung wie die Angabe der Messgröße selbst. Das Ergebnis z.B. einer Massenbestimmung lautet also nicht "m=4", sondern "m=(4,0±0,1) kg".

1.1.2 Fehlerklassifizierung

Alle auftretenden Messfehler lassen sich wie folgt kategorisieren:

Unsorgfältig, nachlässig oder mit ungeeigneten Messgeräten durchgeführte Messungen werden durch die Fehlerrechnung nicht aussagefähiger.

a) ***Grobe Fehler:*** Solche Fehler werden ausschließlich von den Experimentierenden begangen. Sie beruhen z.B. auf unsachgemäßer Handhabung oder falscher Ablesung von Messgeräten, auf falscher Anordnung (z.B. Schaltung) des apparativen Aufbaus, auf Nichtbeachtung physikalischer Nebenbedingungen usw. Grobe Fehler sind bei einiger Sorgfalt, guter Vorbereitung und durch ‚Mitdenken' leicht zu vermeiden.

   Zwei Beispiele aus diesem Praktikum: 1) Ein Thermometer falsch herum in eine Flüssigkeit stecken und dann folgern, die Temperatur sei über lange Zeit konstant gleich der Raumtemperatur. 2) Eine Messschaltung falsch aufbauen, die Anzeige des Amperemeters als "Spannung" interpretieren, außerdem noch mit einem falschen Skalenfaktor umrechnen - macht gleich drei grobe Fehler.

b) ***Systematische Fehler*:** Hier liegen die Ursachen meist im Messverfahren bzw. im Messgerät selbst. So können z.B. Messgeräte auf den zu messenden Vorgang zurückwirken und dadurch Fehler verursachen: Ein Quecksilber-Thermometer, mit dem die Temperatur einer relativ geringen Flüssigkeitsmenge bestimmt werden soll, erwärmt sich selbst und kühlt dabei die Flüssigkeit ab. Die Temperatur wird also zu niedrig angezeigt.

   Darüber hinaus können Messgeräte konstruktiv ungenau oder mangelhaft kalibriert sein. Beispiele sind zu schnell oder zu langsam gehende Uhren, Nullpunktfehler, ungleichmäßige Teilung eines Maßstabs usw. Kennzeichnend für das Vorliegen systematischer Fehler ist die Tatsache, dass bei Wiederholung der Messung die Messwerte *immer* zu groß oder *immer* zu klein sind.

   Systematische Fehler sind bisweilen schwer erkennbar. Sie lassen sich jedoch prinzipiell durch Wechsel der Messgeräte bzw. durch Änderung der Versuchseinrichtung vermeiden oder lassen sich durch eine Kalibrierung der Messgeräte beheben.

c) ***Statistische Fehler, Zufallsfehler*:** Auch bei völliger Vermeidung grober und systematischer Fehler liefert die mehrfache Messung ein und derselben Größe kaum jemals genau übereinstimmende Ergebnisse. Ursache hierfür kann z.B. sein, dass bei Ablesung einer Skala Werte zwischen zwei Skalenstrichen geschätzt werden müssen oder dass bei Eintritt eines bestimmten Ereignisses die Stoppuhr zu betätigen ist (*subjektiv* bedingte Zufallsfehler). Sie können aber auch durch mangelnde Reproduzierbarkeit in einem Messsystem ent-

stehen, z.B. bei Lagerreibung im Messwerk eines Strommessers, Einfluss von Temperaturänderungen auf Längen- und Volumenmessgeräte usw. Darüber hinaus kann die zu messende Größe selbst gewissen Schwankungen unterliegen (*objektiv* bedingte Zufallsfehler). Zufallsfehler sind erkennbar daran, dass bei einer Reihe gleicher Messungen etwa ebenso viele positive wie negative Abweichungen vom "wahren" Wert entstehen. Man sagt, dass die unter gleichen Bedingungen erhaltenen Messwerte um den "wahren" Wert "streuen".

1.1.3 Fehlerberechnung

Der "wahre" Wert einer physikalischen Größe lässt sich aus den oben genannten Gründen nicht feststellen. Ziel einer Fehlerrechnung ist es, aus den Messwerten einen Bereich zu berechnen, innerhalb dessen der "wahre" Wert *wahrscheinlich* anzutreffen ist.

Die Angabe $f = (256 \pm 2)\mathrm{mm}$ für die Brennweite einer Linse bedeutet, dass die wahre Brennweite mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit (ca. 68% bzw. rund 2/3) im Bereich zwischen 254 mm und 258 mm liegt. Dagegen bedeutet $f = (256{,}6 \pm 0{,}4)\mathrm{mm}$, dass mit der gleichen Wahrscheinlichkeit die wahre Brennweite zwischen 256,2 mm und 257,0 mm zu finden ist. Im letzteren Fall wurde demnach ein präziseres Messverfahren angewendet.

Die Angabe des Fehlerbereichs zum Messergebnis lässt daher Rückschlüsse auf die Präzision der Messung zu und ist deshalb bei Dokumentationen (d.h. auch bei Protokollen) ebenso unentbehrlich wie die Angabe der Maßeinheit.

Messresultat = Messwert + Messfehler + (physikalische) Maßeinheit

1.1.4 Mittelwert und Standardabweichung

Angenommen, eine Länge *l* werde *n*-mal unter gleichen Bedingungen gemessen. Aus den einzelnen Messwerten l_i ergibt sich der Mittelwert $\vec{l}$ zu

$$\bar{l} = \frac{1}{n}(l_1 + l_2 + \cdots + l_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i \; 1.1 \qquad (1.1)$$

Der Mittelwert sagt nun noch nichts über die Qualität oder die Präzision der Messung. Ein qualitatives Kriterium hierfür ist die *Streuung* der Messwerte um den Mittelwert. In **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** repräsentiert die zweite Messreihe eine "bessere", d.h. präzisere Messreihe als die erste, da die einzelnen Messpunkte näher am Mittelwert liegen.

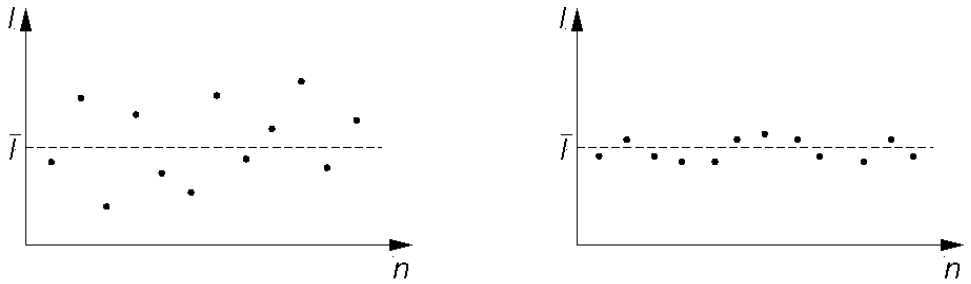


Abbildung 1.2: Streuung von Messwerten um einen Mittelwert: links größere, rechts kleinere Streuung.

Die übliche Charakterisierung der Streuung beruht auf der Summe der Quadrate der Abweichungen:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (l_i - \bar{l})^2 \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (l_i - \bar{l})^2}{n-1}} \qquad (1.2)$$

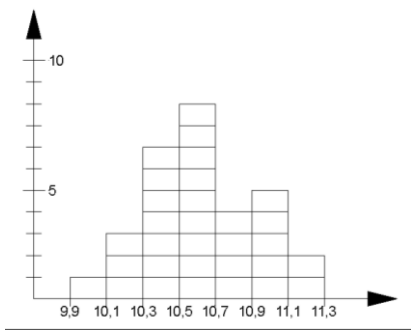
Die so errechnete Größe σ^2 heißt *Varianz* der Einzelmessung, die Quadratwurzel σ heißt *Standardabweichung der Einzelmessung***.** Vereinfacht sagt man statt Standardabweichung auch oft "Standardfehler" oder noch kürzer einfach "Fehler".

Wegen des Nenners *n*-1 in der letzten Gleichung ist die Varianz für eine Einzelmessung (d.h. *n*=1) nicht definiert; erst ab *n* =2 wird die Berechnung sinnvoll. Für den häufig auftretenden Fall genügend großer *n* kann man dagegen *n*-1 ohne große Fehler durch *n* annähern.

Bemerkung: Wenn man genügend häufig misst, sollte die Standardabweichung unabhängig von der Zahl *n* der Messungen werden. Dies liegt anschaulich daran, dass mit größer werdendem *n* nicht nur der Nenner des Wurzelausdrucks in Gleichung (1.2) wächst, sondern auch der Zähler (Summation über *n* Messungen). Für den sehr häufigen Fall normalverteilter Daten (siehe folgenden Abschnitt) folgt daraus, dass für große *n* die Standardabweichung unabhängig von *n* wird.

1.1.5 Darstellung von Messwerten

Die *n* Messwerte $l_1, l_2, \ldots l_n$ lassen sich in einem sogenannten *Histogramm* graphisch darstellen: Man unterteilt den gesamten Bereich der Messwerte (vom kleinsten bis zum größten gemessenen Wert) in gleich große Intervalle, deren Breite beliebig ist, jedoch in der Regel so, dass in jedem Intervall mindestens ein Messwert vorkommt. Die Häufigkeit des Auftretens des Messwertes l_i wird dann als Funktion des jeweiligen Intervalls aufgetragen. In der nachfolgenden Abb. 1.3 ist dieses Vorgehen verdeutlicht.



Intervallbreite (mm)	Zahl der Werte in diesem Intervall
9,9 – 10,1	1
10,1 – 10,3	3
10,3 – 10,5	7
10,5 – 10,7	9
10,7 – 10,9	4
10,9 – 11,1	5
11,1 – 11,3	2

Abbildung 1.3: Messwerte, Intervallbreite und das zugehörige Histogramm einer Beispielmessung.

Bei einer sehr großen Zahl von Messwerten können die Intervalle sehr klein gewählt werden; es entsteht dann eine "glatte" Kurve. Häufig sind die Messwerte gaußverteilt (= normalverteilt); sie liegen dann auf der Gaußschen Verteilungsfunktion (oder auch wegen ihrer Form Gaußsche Glockenkurve genannt). Ihre mathematische Formulierung lautet:

$$f(l) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot exp\left[\frac{-(l-\bar{l})^2}{2 \cdot \sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(l-\bar{l})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \qquad (1.3)$$

Die ersten beiden Ableitungen dieser Funktion liefern folgende Ergebnisse:

- Das Maximum liegt an der Stelle $\bar{l}$; dies ist der bereits errechnete Mittelwert aus unserer Messreihe.
- Die Wendepunkte P_1 und P_2 der Kurven liegen an den Stellen $\bar{l} \pm \sigma$, wobei σ die in Gl. (1.2) beschriebene Standardabweichung der Einzelmessung ist.

Die folgenden Grafiken in Abb. 1.4 zeigen Gaußsche Glockenkurven für gleiche Mittelwerte $\bar{l} = 10$, aber unterschiedliche Standardabweichungen (links: $\sigma = 1$, rechts: $\sigma = 1{,}5$)

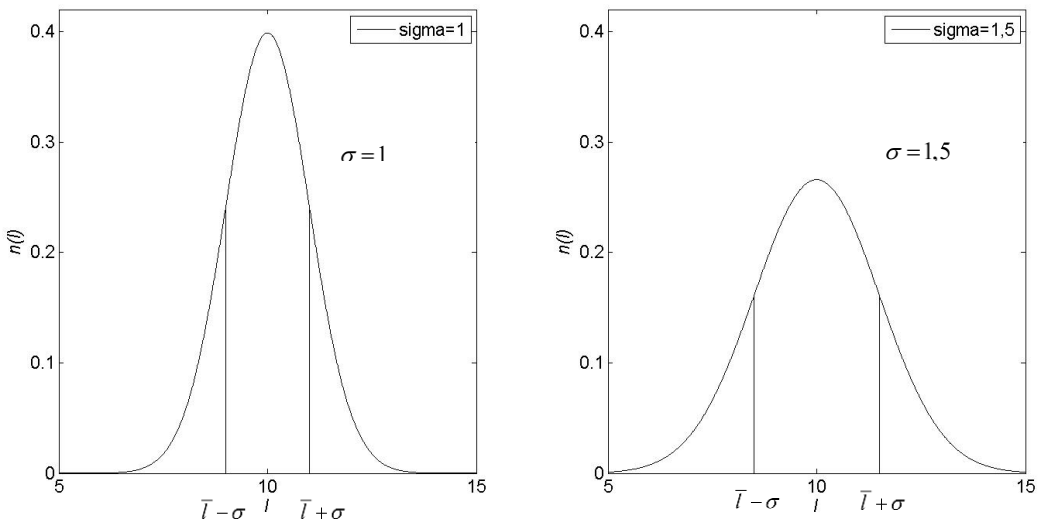


Abbildung 1.4: Gaußkurven mit gleichem Mittelwert, aber unterschiedlichen Standardabweichungen.

Die beiden Senkrechten bei $\bar{l} \pm \sigma$ begrenzen einen Abschnitt, der unter der Verteilungskurve liegenden Fläche, der umso breiter wird, je größer die Standardabweichung σ ist. Die Fehlertheorie besagt, dass irgendein aus der Gesamtheit aller Messwerte willkürlich herausgegriffener Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit in diesen Bereich fällt – anders ausgedrückt: Wiederholt man die Messung unter gleichen Bedingungen, so fallen zwei von drei Messwerten in den Bereich zwischen $\bar{l} \pm \sigma$. Je kleiner σ, desto größer ist demnach die Präzision der Messung.

Standardabweichung des Mittelwertes einer Messreihe

Mit Gl. (1.2) ist der Standardfehler einer Einzelmessung definiert. In der Praxis ist aber häufig die Frage relevant, wie genau der Mittelwert einer *Messreihe* von *n*

Messungen ist. Kennzeichnend hierfür ist der Standardfehler σ_n des Mittelwertes einer Messreihe. Es gilt

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2}{n \cdot (n-1)}} \tag{1.4}$$

Zwischen den Standardfehlern des Einzel- und des Mittelwertes bei *n* Messungen besteht also die Beziehung

$$\sigma_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1.5}$$

Während σ im Wesentlichen von der Präzision der Einzelmessung abhängt, hängt σ_n auch von der Anzahl der Messungen ab. Mit anderen Worten: der Mittelwert einer Messreihe ist um den Faktor $\sqrt{n}$ genauer als jeder einzelne Messwert.

Darüber hinaus besagt die letzte Gleichung: Wiederholt man nicht nur eine Einzelmessung, sondern eine Messreihe mit *n* Messungen und berechnet hieraus einen neuen Mittelwert, so liegt dieser mit der Wahrscheinlichkeit 68% (also rund 2/3) zwischen den Grenzen $\bar{l} \pm \sigma_n$.

Fehlerfortpflanzung

In vielen Fällen kann eine physikalische Größe f nicht direkt gemessen werden, sondern muss aus zwei oder mehreren anderen, direkt messbaren Größen *x*,*y*,*z*… errechnet werden (zum Beispiel ist der Druck eines Gases eine Funktion von Volumen und Temperatur). In der Fehlerfortpflanzungsrechnung wird untersucht, welcher Fehler bei der zu errechnenden Größe auftritt, wenn die Fehler der direkt messbaren Größen bekannt sind. Die mathematische Formulierung findet sich im *Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz*.

Bevor wir dieses Gesetz aufschreiben, sollen einige folgende Ausführungen es vielleicht etwas plausibler machen. Sie erinnern sich (hoffentlich) noch aus der Schule an die Definition der Ableitung. Wenn eine Größe f (entspricht unserer *indirekt* messbaren Größe) von der Variablen *x* (entspricht unserer *direkt* messbaren Größe) abhängt, dann ist die Ableitung am Punkt x_0 definiert als

$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left.\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|_{x=x_0} \tag{1.6}$$

Da diese Definition für (fast) jeden Punkt x_0 gilt, lässt man in der Regel den Index Null weg und schreibt

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{1.7}$$

Vielleicht haben Sie nur die Schreibweise $f'(x)$ kennengelernt; sie bedeutet zwar genau das gleiche wie $\frac{df}{dx}$, ist aber für die folgenden Darstellungen eher unpraktischer; wir werden ausschließlich $\frac{df}{dx}$ verwenden.

Anschaulich ist die Ableitung ein Maß dafür, wie stark sich f ändert, wenn man *x* um Δx ändert (siehe Abb. 1.4). Wenn f zum Beispiel konstant ist, dann gilt $f(x + \Delta x) = f(x)$ und damit ist die Ableitung Null. Zur Technik des Ableitens finden Sie einige Informationen im Anhang.

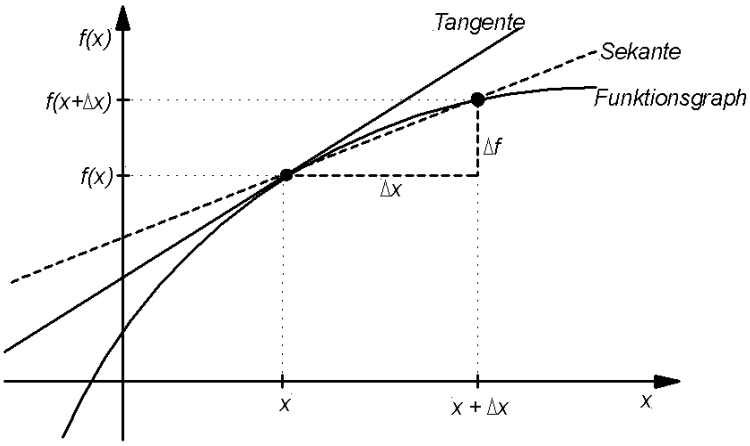


Abbildung 1.5: Veranschaulichung der Ableitung einer Funktion *f*(*x*).

Wir wollen nun für die Zwecke der Fehlerrechnung die exakte Definition der Ableitung etwas "aufweichen", indem wir folgendes sagen: wenn Δx genügend klein ist, dann können wir den Limes weglassen und erhalten aus Gl. (1.7) in guter Näherung

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \cong \frac{df}{dx} \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta f \cong \frac{df}{dx}\Delta x \tag{1.8}$$

Das bedeutet, wenn die Änderung Δx von *x* klein genug ist, dann ist die Änderung Δf von f (annähernd) gegeben durch $\Delta f = \frac{df}{dx}\Delta x$. Mit anderen Worten: wenn wir bei der Bestimmung von *x* einen Fehler Δx machen, dann ist der Fehler in f ungefähr durch Δf gegeben.

Damit haben wir den Kontakt zur Fehlerrechnung hergestellt. Allerdings interessiert uns dort ja im Allgemeinen das Vorzeichen der Fehler nur bedingt; deswegen gehen wir einen Schritt weiter und schreiben

$$(\Delta f)^2 \cong \left(\frac{df}{dx}\right)^2 (\Delta x)^2 \tag{1.9}$$

Mit Gleichung (1.9) können wir also eine Aussage über den Fehler Δf machen, wenn wir die Messgröße *x* mit dem Fehler Δx messen. Was passiert nun, wenn f von mehreren Variablen x,*y*,z … abhängt? Anschaulich heißt das, dass sich f nicht nur bei Änderung von x ändert, sondern auch bei Änderung von *y*,z …. Mit anderen Worten: statt der einen Ableitung von f nach *x*, also $\frac{df}{dx}$, gibt es nun mehrere Ableitungen, nämlich nach x,*y*,z …. Um das auch in der Schreibweise hervorzuheben, verwendet man im Fall mehrerer Variablen ein spezielles rundes 'd' und schreibt $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ …Man bezeichnet diese Ableitungen als 'partielle Ableitungen'. Zur Technik des partiellen Ableitens finden Sie einige Informationen im Anhang.

Zurück zum Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz. Die detaillierte Herleitung dieses Gesetzes wäre hier zu aufwendig, aber wenn Sie sich Gleichung (1.9) anschauen, ist es vielleicht einsichtig, dass man die Fehler aufsummiert

$$(\Delta f)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2 + \cdots \tag{1.10}$$

Wenn wir jetzt noch die von uns salopp 'Fehler' genannten Terme $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ durch die Standardabweichungen ersetzen, haben wir schließlich das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz in aller Schönheit. Es besagt: Wenn die physikalische

Größe $f(x, y, z, \dots)$ aus den Messgrößen x,y,z …. mit den Standardabweichungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \dots$, berechnet wird, gilt für den Fehler Δf:

$$\boxed{\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \cdots}} \tag{1.11}$$

Setzt man statt der Standardfehler σ_x etc. den Messfehler Δx etc. ein, schreibt sich die letzte Gleichung als

$$\boxed{\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2 + \cdots}} \tag{1.12}$$

Diese beiden Gleichungen (1.11) oder (1.12) müssen Sie im Protokoll für die Fehlerbestimmung einer zusammengesetzten Größe benutzen.

Statt dieses *absoluten* Fehlers wird auch oft der *relative* Fehler $\frac{\Delta f}{f}$ angegeben. Während der absolute Fehler die gleiche Einheit wie die Messgröße selbst besitzt, ist der relative Fehler einheitenlos und wird häufig in Prozent angegeben.

Wir wollen diese Berechnung anhand eines **Beispiels** verdeutlichen:

Die Dichte eines homogenen Metallblocks soll gemäß der Definition $\rho = m/V$ ermittelt werden. Die Masse wird mit einer Waage bestimmt, das Volumen über die Messung von Länge, Breite und Höhe des Metallblocks, $V = l \cdot b \cdot h$. Jede dieser vier Messungen ist mit einem Fehler behaftet. Wie groß ist der Gesamtfehler bei der Bestimmung der Dichte?

Wir berechnen zuerst die partiellen Ableitungen von ρ nach den beiden Variablen m und V:

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{1}{V} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \rho}{\partial V} = -\frac{m}{V^2}$$

Die Fehler bei der Massen- und Volumenbestimmung sind Δm und ΔV; damit folgt

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)^2 (\Delta m)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right)^2 (\Delta V)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{V}\right)^2 (\Delta m)^2 + \left(\frac{m}{V^2}\right)^2 (\Delta V)^2}.$$

.

Δm ist der bei der Wägung entstehende Fehler, über den allgemein hier nichts weiter gesagt werden kann. Da das Volumen ja eine zusammengesetzte Größe aus den drei Messungen der Längen, Breiten und Höhen mit möglicherweise verschieden großen Fehlern ist, müssen wir zur Bestimmung von ΔV eine ‚Unter'-Fehlerrechnung machen:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)^2 (\Delta l)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)^2 (\Delta b)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 (\Delta h)^2}.$$

Mit $V = lbh$ folgt

$$\frac{\partial V}{\partial l} = bh, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = lh, \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = lb$$

und damit

$$\Delta V = \sqrt{(bh)^2(\Delta l)^2 + (lh)^2(\Delta b)^2 + (lb)^2(\Delta h)^2}.$$

Bemerkung*:* Die von Ihnen zu benutzenden Auswerteprogramme (Excel, Origin, etc.) besitzen zur Berechnung des Mittelwertes und der Standardabweichungen feste Funktionen. Prüfen Sie jedoch, welche konkreten Funktionen mit den hier angegebenen Definitionen übereinstimmen.

Angabe des Messergebnisses

Zu *jeder* Angabe eines Messergebnisses gehört ganz selbstverständlich die Maßeinheit, wie eigentlich jede und jeder weiß: "Das kostet 4" – Euro, Cent, Dollar? oder "Das wiegt 78" – Gramm, Tonnen, Mikrogramm? Ergebnisse ohne Maßeinheit sind sinnleer.

Zur Angabe eines Messergebnisses gehört außerdem *immer* auch die Angabe des Messfehlers. Von dieser ehernen Regel gibt es wie gesagt nur ein paar triviale Ausnahmen – zwei Frösche sind (wenigstens im Allgemeinen) nicht $2 \pm 0{,}1$ Frösche, sondern eben zwei. Ansonsten aber gilt immer:

Messresultat = Messwert + Messfehler + (physikalische) Maßeinheit

Bei manchen Messungen wird man nur *einen* Wert erhalten, so dass man keinen Mittelwert bilden kann, beispielsweise beim Ablesen eines Thermometers, eines Zollstocks oder einer Waage. Hier wird als Fehler die Ablesegenauigkeit angegeben; bei einem Zollstock z.B. ca. 0,5 mm. Das Resultat einer Längenmessung würde dann lauten L=34,2 cm $\pm$ 0,5 mm.

Bei manchen Messungen erhält man zwar verschiedene Messwerte, aber dennoch kann die Angabe eines berechneten Mittelwertes unsinnig sein. Beispiel: Sie wiegen einen Gegenstand auf einer (ungenauen) Waage und erhalten als Ergebnis mal 36,6 g, mal 36,7 g und mal 36,5 g. Natürlich könnten Sie jetzt 100 Mal messen und einen scheinbar phantastisch genauen Wert ermitteln – aber das wäre eine Scheingenauigkeit, denn Ihre Waage hat offensichtlich eine Ungenauigkeit von 0,1 g und gibt nun mal nicht mehr her als das Resultat m =36,6 g $\pm$ 0,1 g. Grundsätzlich gilt: man gibt nicht mehr Stellen im Endergebnis an, als man mit den Messgeräten noch sicher erfassen kann; bei einer Schieblehre sind das zum Beispiel 0,1 mm.

Das bedeutet: auch wenn die Angabe eines berechneten Mittelwertes sinnvoll ist, darf man nicht einfach den numerisch ermittelten Wert übernehmen. Jemand misst z.B. die Schwingungsdauer eines Pendels und findet T_1=82,5 s, T_2=82,7 s, T_3=82,6 s, T_4=82,5 s, T_5=82,5 s, T_6=82,6 s, T_7=82,6 s und gibt als Ergebnis den vom Rechner angegebenen Mittelwert an, $\bar{T} = 82{,}571428571s$. Damit wird suggeriert, die Messung sei mit einer Genauigkeit von einer milliardstel Sekunde erfolgt, was offensichtlich Unsinn ist. Wenn die verwendete Stoppuhr auf Hundertstelsekunden genau ist, heißt das Ergebnis vielmehr $\bar{T} = 82{,}57s$. Die gleichen Überlegungen gelten natürlich auch bei der Angabe des Fehlers, im Beispiel berechnet zu $\Delta T = \pm 0{,}028571429$ s und 'vernünftig' angegeben zu $\Delta T = \pm 0{,}03$ s. Das Endergebnis lautet also $\bar{T} = 82{,}57$ s $\pm$ 0,03 s (und bei einer auf Zehntelsekunden genauen Stoppuhr $\bar{T} = 82{,}6$ s $\pm$ 0,1 s).

Wie viele Stellen nach dem Komma angegeben werden, hängt also von der Genauigkeit der Messung ab – je mehr Stellen, desto genauer, je weniger, desto ungenauer. Um dieses Prinzip auch bei sehr großen oder sehr kleinen Zahlen realisieren zu können, schreibt man das Ergebnis als Produkt einer Zehnerpotenz: Statt z.B. 1687513 s besser $1{,}69 \cdot 10^6$ s, statt 0,00035461 m besser $3{,}55 \cdot 10^{-4}$ m. Auch hier gilt die Regel: Nicht mehr Stellen nach dem Komma als messtechnisch möglich sind oder durch die Fehlerangabe sinnvoll sind.

Ähnliches gilt natürlich auch, wenn man statt des absoluten Fehlers den relativen (in Prozent) angibt. Rein rechnerisch wird aus der absoluten Fehlerangabe $\bar{T} = 82{,}57\ \mathrm{s} \pm 0{,}03\ \mathrm{s}$ die relative Angabe $\bar{T} = 82{,}57s \pm 0{,}03633281\%$. Auch diese Angabe spiegelt eine bizarre Genauigkeit vor; die angemessene Angabe lautet stattdessen $\bar{T} = 82{,}57s \pm 0{,}05\%$ oder $\bar{T} = 82{,}57s \pm 0{,}1\%$ (und bei einer auf Zehntelsekunden genauen Stoppuhr $\bar{T} = 82{,}6s \pm 1\%$). Generell gilt: Im Zweifelsfall den Fehler lieber etwas höher als niedriger angeben.

Ein letztes Beispiel: Sie haben vier Kristalle gezüchtet und messen ihre Längen zu 7,4 / 8,9 / 9,6 / 10,7 cm. Der Rechner liefert den Mittelwert 9,15 cm und die Varianz 0,69101375 cm. Das Anführen aller Nachkommastellen wäre hier wieder überkandidelt; sinnvoll ist eine Angabe der Art (9 ± 1) cm (beziehungsweise 9 cm ± 10%) oder allenfalls (9,2 ± 0,7) cm (beziehungsweise 9,2 cm ± 8%).

Also:
Übernehmen Sie nicht unkritisch das Ergebnis Ihres Rechners (das ist eine generelle Regel), sondern überlegen Sie, wie viele Dezimalen im Messergebnis überhaupt sinnvoll sind.

1.2 Grundlagen zur Dichte

Die Dichte ist eine der wichtigsten Materialeigenschaften. Sie hängt von verschiedenen materialbedingten Parametern ab wie z.B. Atomgewicht, Atomradius, Kristallstruktur. Ein einfacher Zusammenhang zwischen Stellung im Periodensystem und Dichte kann deshalb nicht erwartet werden. Außerdem ist die Dichte eine Funktion von Temperatur und Druck, da das Volumen – insbesondere bei Gasen – von diesen beiden Größen abhängt (nicht aber bekanntlich die Masse). Zur Angabe von Dichten gehört also die gleichzeitige Angabe von Druck und Temperatur; fehlt sie, muss man Normbedingungen voraussetzen.

1.2.1 Definition der Dichte

Die Dichte ρ an einem Raumpunkt ist als differenzieller Quotient aus der Masse m einer Substanz und ihrem Volumen V, d.h. als Ableitung der Masse nach dem Volumen definiert:[2]

$$\rho = \frac{dm}{dV}\ ^{3} \tag{1.13}$$

[2] Genau genommen handelt es sich hier um die Massendichte. In der Elektrizitätslehre untersucht man Ladungen, die in einem Volumen verteilt sind und somit ebenfalls eine Dichte darstellen: Das Verhältnis von Ladung zu Volumen ist dann die Ladungsdichte.

[3] Die Größe dm ist nicht das Produkt zweier Terme d und m, sondern ist ein Ausdruck und bezeichnet ein differenziell kleines Massenelement. Das ist eine Bildung, wie Sie sie ja mit $\frac{df}{dx}$ schon kennen- ein differenziell kleines Stück der Funktion f (= df) wird durch ein entsprechendes differenziell kleines Stück der x-Achse (= dx) geteilt, sprich: f wird nach x abgeleitet.

Für homogene Körper (mit anderen Worten: für konstante Dichte) gilt $\rho = \frac{m}{V}$. Die Maßeinheit ist $[\rho] = \frac{\text{kg}}{m^3}$, abgeleitete Größen sind $[\rho] = \frac{g}{\text{cm}^3}$ oder (besonders bei Gasen verwendet) $[\rho] = \frac{g}{\text{dm}^3}$.

Gemäß der Definition der Dichte kommt es bei deren experimenteller Bestimmung stets auf eine Massen- und eine Volumenbestimmung an. Während die Masse sich im Allgemeinen durch Wägung recht genau messen lässt, ist die Bestimmung des Volumens nur bei Körpern mit geometrisch regelmäßiger Form (Quader, Kugel etc.) unmittelbar möglich. Bei unregelmäßig geformten Körpern lässt sich die Dichte nur indirekt bestimmen, wobei es je nach Form und Aggregatzustand der Probesubstanz unterschiedliche Methoden gibt.

1.2.2 Messung der Dichte durch Auftrieb

Bereits in der Antike (Archimedes: "Heureka!") wurde die Dichte über die *Auftriebskraft* bestimmt, die auf einen Körper wirkt, wenn er in eine Flüssigkeit bekannter Dichte eingetaucht wird. Ursache der Auftriebskraft ist der *Druck* in Flüssigkeiten und Gasen. Der Druck *p* ist definiert als *Kraft F pro Flächeneinheit A:*

$$p = \frac{F}{A} \tag{1.14}$$

mit $[p] = \frac{\text{Newton}}{m^2} = \frac{\text{kg}}{s^2 m}$ [4].

Die Maßeinheit Newton/m² oder N/m² wird als Pa (= *Pascal*) abgekürzt. Der *Normaldruck* der Atmosphäre auf Meeresniveau ist 101325 Pa = 1013,25 hPa (hPa = Hektopascal). Andere Druckeinheiten sind das Bar bzw. das Millibar und das Torr. Das Millibar ist zahlenmäßig mit dem hPa identisch. Das Torr leitet sich aus der Steighöhe einer Quecksilbersäule in einem vorher evakuierten Steigrohr ab (Torricelli-Versuch), die bei Normaldruck 760 mm beträgt, weshalb dann der Druck gleich 760 Torr ist; das Torr ist heute keine gesetzlich zulässige Einheit mehr.

Nehmen wir nun an, dass ein Gefäß bis zu einer Höhe *h* mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ_{Fl} gefüllt ist. Auf jedem Flächenelement A_B der Bodenfläche lastet dann nach dem allgemeinen Prinzip "Kraft gleich Masse mal Beschleunigung" das Gewicht F_B der gesamten Flüssigkeitssäule (*g* = Erdbeschleunigung):

$$F_B = mg = A_B h \rho_{Fl} g \tag{1.15}$$

Der Druck am Boden des Gefäßes ist demnach

$$p = \frac{F_B}{A_B} = \frac{A_B h \rho_{Fl} g}{A_B} = h \rho_{Fl} g \tag{1.16}$$

Da ρ_{Fl} und *g* im Allgemeinen konstant sind, ist der Druck der Höhe direkt proportional.

Infolge der freien Verschiebbarkeit der Flüssigkeits- und Gasmoleküle wirkt der Druck *isotrop*, d.h. in alle Richtungen gleich (was Sie merken können, wenn Sie versuchen, einen nicht ganz prallen Luftballon zusammenzudrücken). Tauchen wir jetzt einen Körper (dessen Form der Einfachheit halber als zylindrisch angenommen sei) bis zu einer Tiefe von h_1 in die Flüssigkeit ein (1.6), dann wirkt auf die

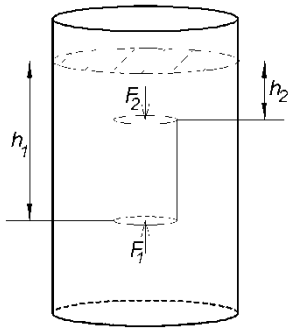


Abbildung 1.6: zur Bestimmung des Auftriebs.

[4] Diese Definition gilt nur für konstanten Druck. Allgemein gilt: Druck = Ableitung der Kraft nach der Fläche, also $p = \frac{dF}{dA}$.

untere Begrenzungsfläche A des Zylinders der Druck $p_1 = h_1\rho_{Fl}g$, also die (aufwärts gerichtete) Kraft

$$F_1 = -p_1 A = -Ah_1\rho_{Fl}g \tag{1.17}$$

(negativ, weil h_1 und F_1 entgegengesetzt gerichtete Größen sind).

Auf die obere Begrenzungsfläche des Zylinders, der sich in der Tiefe h_2 befinden soll, wirkt der Druck$p_2 = h_2\rho_{Fl}g$, also ist die nach unten gerichtete Kraft

$$F_2 = p_2 A = Ah_2\rho_{Fl}g \tag{1.18}$$

Die Summe beider Kräfte ist die Auftriebskraft

$$F_A = F_1 + F_2 = -A(h_1 - h_2)\rho_{Fl}g = -m_{Fl}g \tag{1.19}$$

d.h. es wirkt eine aufwärts gerichtete Kraft $m_{Fl}g$, die gleich dem Gewicht des verdrängten Flüssigkeitsvolumens ist (Gesetz des *Archimedes*). Ist die Dichte ρ_{Fl} der Flüssigkeit bekannt, so lässt sich aus der Auftriebskraft das Volumen des Zylinders bestimmen.

Auf den Zylinder wirken demnach zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte: Das Gewicht $F_G = mg$ und die Auftriebskraft $F_A = -m_{Fl}g$. Die resultierende Kraft beträgt

$$F_{res} = F_G + F_A = g(m - m_{Fl}) = mg(1 - \frac{m_{Fl}}{m}) = mg(1 - \frac{\rho_{Fl}}{\rho}) \tag{1.20}$$

(Das letzte Gleichheitszeichen folgt, weil das Volumen des Zylinders gleich groß ist wie das Volumen der verdrängten Flüssigkeit.) Ist nun die Dichte des Zylinders ρ größer als die Dichte der Flüssigkeit ρ_{Fl}, so ist die letzte Klammer in Gl. (1.20) positiv; damit ist $F_{res} > 0$; der Zylinder sinkt auf den Boden des Gefäßes. Ist dagegen $\rho < \rho_{Fl}$, so ist der letzte Klammerausdruck negativ. Der Zylinder steigt zur Flüssigkeitsoberfläche und schwimmt. Er taucht soweit ein, dass die verdrängte Flüssigkeitsmenge ebenso viel wiegt wie der schwimmende Zylinder. Ist schließlich $\rho = \rho_{Fl}$, so ist die resultierende Kraft Null, der Zylinder "schwebt" in der Flüssigkeit.

1.2.3 Volumenkontraktion bei Stoffgemischen

Die Dichte einer *homogenen* Mischung, z.B. zweier Flüssigkeiten, sollte sich – sofern keine chemische Reaktion auftritt – als Quotient aus der Gesamtmasse $m_1 + m_2$ und dem Gesamtvolumen $V_1 + V_2$ berechnen lassen. Häufig beobachtet man jedoch, dass das Gesamtvolumen der Mischung kleiner ist als die Summe der Einzelvolumina. Diese *Volumenkontraktion* entsteht z.T. dadurch, dass wegen unterschiedlicher Größe der Moleküle eine dichtere Packung möglich ist, aber auch dadurch, dass zwischenmolekulare Bindungskräfte auftreten können. Da die Gesamtmasse die Summe der beiden Teilmassen ist, ist also die Dichte solcher Gemische größer als die "mittlere" Dichte.

Wir mischen nun ein bestimmtes Volumen V_1 einer Substanz 1, deren Dichte ρ_1 sei, mit einem Volumen V_2 einer Substanz 2 (Dichte ρ_2). Die relative Massenkonzentration der Masse m_1 beträgt dann:

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{\rho_1 V_1}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2} \tag{1.21}$$

Sofern keine Kontraktion auftritt, ist das rechnerische Gesamtvolumen $V = V_1 + V_2$. Im Falle der Volumenkontraktion lässt sich das tatsächliche Volumen V_M der Mischung über deren Dichte ρ_M bestimmen:

$$V_M = \frac{m_1 + m_2}{\rho_M} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{\rho_M} \tag{1.22}$$

Die absolute Volumenkontraktion ist die Differenz $\Delta V = V - V_M$. Für die relative Volumenkontraktion gilt mit Gl. (1.22):

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V - V_M}{V} = 1 - \frac{V_M}{V} = 1 - \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{\rho_M (V_1 + V_2)} \tag{1.23}$$

1.3 Experimentelle Aufgaben

1.3.1 Volumen und Dichte eines Metallkörpers

Geräte: Bügelmessschrauben, Metallblöcke, Metallscheiben, Waage

Mit Hilfe einer Bügelmessschraube (Abb. 7) soll das Volumen eines quader- oder zylinderförmigen Metallblocks bestimmt werden.

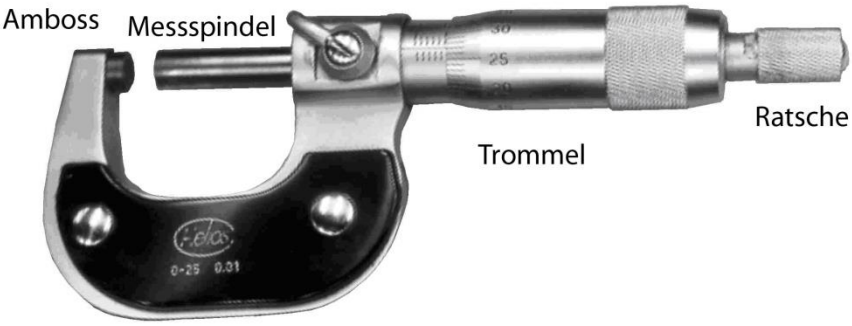


Abbildung 1.7: Bügelmessschraube

Machen Sie sich zunächst mit der Funktionsweise dieses Messgerätes vertraut. Durch das Zusammenwirken der Skalen auf der Trommel und der Spindel kann eine Messgenauigkeit von 0,01 mm = 10 µm erreicht werden.

Beispiel für das Ablesen einer Bügelmessschraube zeigt Abb. 1.8:

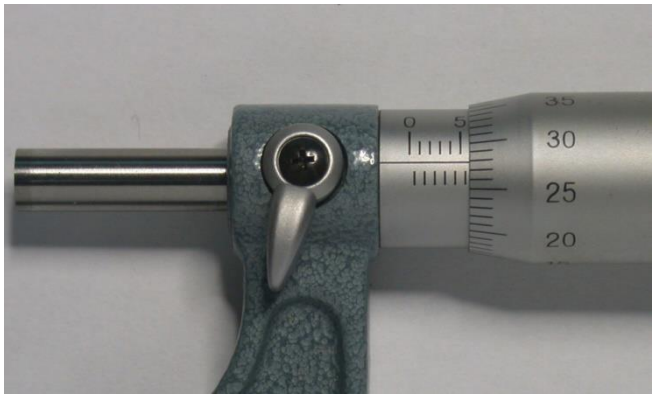


Abbildung 1.8: Bügelmessschraube zeigt *d* = 5,78 mm.

Die oberen Striche der waagrechten Skala zeigen die Millimeter, die unteren Striche sind um einen halben Millimeter versetzt. Damit ergibt sich zunächst ein Maß von 5,5 mm plus eine kleine Größe. Diese kleine Größe kann man an der im Bild vertikalen Skala als notierte 28 ablesen, also als 0,28 mm. Damit ergibt sich insgesamt d = 5,5 mm + 0,28 mm = 5,78 mm. Bei sorgfältigem Ablesen ist also eine Genauigkeit von ca. ±0,01 mm durchaus erreichbar.

Prüfen Sie auf Nullpunktfehler und berücksichtigen Sie diese bei der Messung.

Achtung: Betätigen Sie beim Messen die Kupplungsschraube (= Rutschkupplung, Ratsche, 'Gefühlsschraube'); diese verhindert, dass die Mechanik der Messschraube verzogen oder die Probe durch evtl. zu hohen Druck deformiert wird.

Messen Sie je zehnmal die Länge *l*, die Breite *b* und die Höhe *h* bzw. die Dicke *h* und den Durchmesser *d* des Metallkörpers (Messschraube jeweils an anderen Stellen ansetzen). Berechnen Sie die Mittelwerte der gemessenen Größen, sowie deren Standardfehler. Bestimmen Sie den Mittelwert des Volumens sowie dessen Fehler.

Zur Bestimmung der Masse des Metallkörpers dient eine Waage, die auf 0,01 g genau misst. Um den Standardfehler der Masse zu berechnen, wäre es unsinnig, den Metallkörper mehrmals auf die Waage zu legen. Es genügt daher, den Fehler der Masse mit ±0,01 g anzusetzen.

Bestimmen Sie die Dichte ρ des Metallkörpers und den Standardfehler des Mittelwertes unter Ansatz des Volumenfehlers und des Massenfehlers.

1.3.2 Bestimmung der Rohdichte und der Reindichte

Geräte: Waage, Pyknometer (Volumen eingraviert), Thermometer, Messzylinder (20 – 50ml), destilliertes Wasser, Probematerial Quarzsand.

Bei Stoffen mit poröser, körniger oder faseriger Struktur (z.B. Sand, Kies, Bodenproben) wird zwischen der *Rohdichte* bzw. *Schüttdichte* einerseits und der *Reindichte* andererseits unterschieden. Bei der Reindichte wird das Volumen des Feststoffes allein berücksichtigt, bei der Rohdichte bezieht man sich auf das Volumen der ganzen Stoffmenge (einschließlich der Zwischenräume und Poren). Da dieses Volumen größer ist als das Volumen des Feststoffes, ist die Rohdichte kleiner als die Reindichte.

Es soll a) die Rohdichte und b) die Reindichte von Quarzsand bestimmt werden. Zur Bestimmung der Rohdichte wird die Probe in einen Messzylinder gefüllt; dann wird das Volumen abgelesen und die Masse bestimmt.

Zur Messung der Reindichte verwenden wir ein *Pyknometer* (**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**). Dies ist ein Gefäß mit eingeschliffenem, durchbohrtem Glasstöpsel, das die Herstellung eines exakt reproduzierbaren Volumens ermöglicht.

Zur Messung der Reindichte sind folgende Wägungen erforderlich:

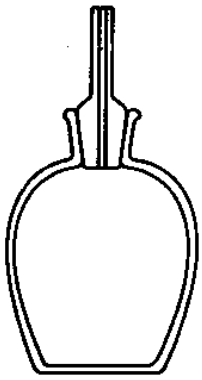


Abbildung 1.9: Pyknometer

1. m_1: Masse des leeren, trockenen Pyknometers (zur Trocknung eventuell ausspülen mit Aceton).
2. m_2: Masse des Pyknometers, randvoll mit Wasser gefüllt[5]

[5] aus der Bohrung austretendes Wasser vor der Wägung abtupfen

3. m_3: Masse des Pyknometers mit 2-3ml der Probe
4. m_4: Masse des Pyknometers wie 3., jedoch randvoll aufgefüllt mit Wasser

Zur Auswertung:

- Bestimmen Sie zunächst die (temperaturabhängige) Dichte des Wassers.
- Aus der Differenz der Massen m_4-m_3 kann die Masse des Wasseranteils aus 4. und daraus das Volumen bestimmt werden.
- Aus der Differenz der Volumina des Wasseranteils aus 4. und des gesamten Volumens des Pyknometers können Sie das Volumen des Sandanteils bestimmen.
- Bestimmen Sie dann durch geeignete Kombination der Messwerte m_1 bis m_4 das Volumen der Probe und die Reindichte.
- Aus der Masse der eingefüllten Sandprobe und ihres Volumens kann die Reindichte der Quarzsandprobe bestimmt werden.

➢ Bestimmen Sie die Roh- und Reindichte von Quarzsand incl. des Fehlers. Was ergibt ein Vergleich mit Literaturwerten?
➢ Wie groß ist das prozentuale Verhältnis zwischen Rein- und Rohdichte?
➢ Wie viel Prozent des Rohvolumens besteht aus dem Feststoff der Probe?

1.3.3 Dichtemessung über die Auftriebskraft

Geräte: Waage, Becherglas, Thermometer, Probekörper

Zur Bestimmung der Dichte ρ eines unregelmäßig geformten Körpers führen wir zwei Wägungen durch: Der Körper wird – an einem dünnen Faden an der Waage hängend – einmal in Luft (Gewichtskraft G_1) und einmal in Wasser (Gewichtskraft G_2, Dichte ρ_{Fl}) gewogen. Dabei muss darauf geachtet werden, dass der Körper ganz von Wasser umgeben ist – auch anhaftende Luftbläschen müssen entfernt werden. Bei der Berechnung der Dichte aus den Messergebnissen ist die Temperaturabhängigkeit der Dichte des Wassers zu berücksichtigen. Es gilt:

$$\rho = \rho_{Fl} \frac{G_1}{G_1 - G_2}.$$

Leiten Sie diese Gleichung schriftlich im Protokoll her. Schließen Sie aus der ermittelten Dichte auf das Material des Probekörpers.

1.3.4 Dichte von Flüssigkeiten - U-Rohr

Geräte: U - Rohr, Probematerial nach Angabe

In einem U-Rohr befinden sich zwei nicht mischbare Flüssigkeiten verschiedener Dichte. Sie stehen deshalb in den Schenkeln des U - Rohres verschieden hoch.

Aus den Höhen der Flüssigkeiten über der Trennstelle und der Dichte einer der beiden Flüssigkeiten soll die Dichte der anderen Flüssigkeit bestimmt werden. Bezugsflüssigkeit ist Quecksilber (Dichte: $13{,}56 \cdot 10^3$ kg cm^{-3}), Probesubstanz ist Glycerinlösung.

1.3.5 Dichte von Flüssigkeiten – Volumenkontraktion

Geräte: Dichtewaage nach Mohr mit Zubehör, Bechergläser, Messzylinder, Pipetten, Isopropanol

Die relative Volumenkontraktion einer Mischung aus Wasser und einem Alkohol (Isopropanol) soll als Funktion des Massenverhältnisses ermittelt werden.

Die zu messenden Dichten ρ_1, ρ_2 und ρ_M (s.u.) werden mit einer Dichtewaage nach Mohr gewonnen. Bei der Mohrschen Waage handelt es sich um eine dezimal eingeteilte Balkenwaage, die auf der einen Seite einen Auftriebskörper trägt, der vollständig in die zu untersuchende Flüssigkeit eintauchen muss. Dabei wirkt eine Auftriebskraft auf den Körper, die nach Gl. (1.11) der Dichte der Flüssigkeit proportional ist. Die Auftriebskraft bringt die Waage aus dem Gleichgewicht. Dieses wird wieder hergestellt durch Verschieben von Reitern auf dem Waagearm. Aus der Stellung der Reiter lässt sich die Dichte unmittelbar ablesen.

Versuchsdurchführung:

Beachten Sie: Bei der Berechnung der Konzentrationen und Volumenkontraktion wird immer der Index 1 für Alkohol und der Index 2 für Wasser verwendet.

Hinweis: jedes Team misst die Dichten nur für eine Konzentration (Schritt 1-3) und stellt sie den anderen Teams zur Verfügung. Zur Auswertung werden die Messwerte aller Teams benutzt.

1. Zunächst wird die Dichte ρ_1 des unverdünnten Alkohols mit der Mohrschen Waage bestimmt. Dazu werden 50 ml (V_1) in ein Becherglas gegeben. Hiervon füllt man so viel in den zur Waage gehörenden Standzylinder ein, dass sich der Auftriebskörper ganz innerhalb der Flüssigkeit befindet und weder den Boden noch die Wände des Standzylinders berührt. Ebenso bestimmt man die Dichte des reinen Wassers (ρ_2).
2. Man mischt das Volumen V_1 Alkohol mit 10 ml Wasser (Pipette benutzen) und bestimmt die Dichte der Mischung ρ_M. Ausgehend von der ursprünglichen Menge reinen Alkohols wird durch immer weitergehende Verdünnung mit je 10 ml Wasser eine Messreihe mit abnehmender Konzentration erstellt, bis der Massenanteil von Alkohol und Wasser gleich groß ist (d.h. also, die Lösungskonzentration wird durch weitere Verdünnung und nicht durch Neuansatz aus reinem Alkohol eingestellt).
3. Als zweite Messreihe werden nun wie unter 2. dem Volumen V_2 Wasser jeweils 10 ml Alkohol zugesetzt und die Mischung bestimmt, so dass eine Messreihe mit zunehmender Konzentration entsteht (wieder bis zu gleichem Massenanteil von Alkohol und Wasser).
4. Der relative Massenanteil der Mischung an Alkohol und die relative Volumenkontraktion werden für jede Konzentration berechnet und tabellarisch (siehe Beispieltabelle) und graphisch dargestellt (dabei $\Delta V/V$ gegen $m_1/(m_1 + m_2)$ auftragen).

Nr.	V_1	$m_1 = \rho_1 V_1$	V_2	$m_2 = \rho_2 V_2$	$m_1/(m_1 + m_2)$	ρ_M	$V_1 + V_2$	$\rho_M(V_1 + V_2)$	$\Delta V/V$
1	50		0						
2	50		10						
3	50		20						
4	50		30						
5	50		40						
6	50		50						
7	0		50						
8	10		50						
9	20		50						
10	30		50						
11	40		50						
12	50		50						

1.3.6 Dichte von Gasen (Luft) unter Normaldruck

Geräte: Kunststoffgefäß mit Ventil, Luftpumpe, Waage, Gasometer

Das Litergewicht von Luft soll mit Hilfe eines Kunststoffgefäßes mit eingebautem Ventil bestimmt werden. Die Kunststoffkugel wird mit einer Handluftpumpe aufgepumpt. Die Gewichtsdifferenz wird mit der Waage, das Gasvolumen mit dem Gasometer bestimmt. Dabei ist auf die Bedingung "Normaldruck" zu achten.

Der Literaturwert beträgt 1,293 kg/m^3 bei Normaldruck und einer Temperatur von 0°C. Welche Ursachen bedingen die Abweichungen der Messwerte von diesem Wert?