

## 5 Elektrisches Feld

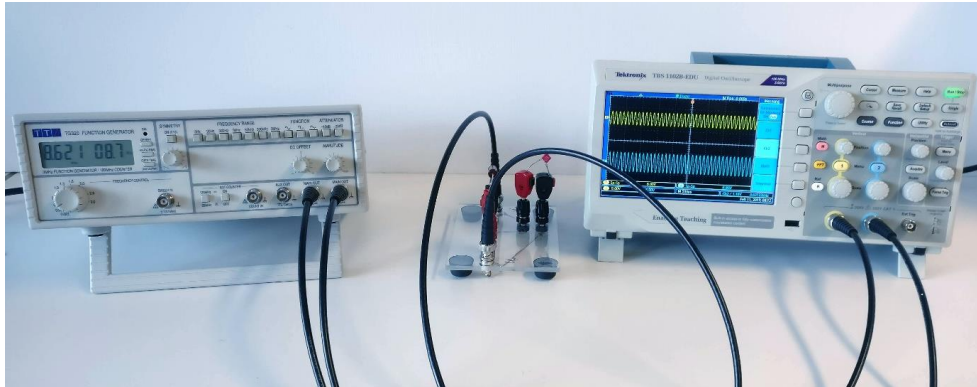


Abbildung 5.1: Aufbau zum Hoch- und Tiefpass

### 5.1 Grundlagen

#### 5.1.1 Ionenbeweglichkeit

In metallischen Leitern wird der elektrische Strom von freien Elektronen transportiert. Der Mechanismus des Ladungstransports in Elektrolyten beruht dagegen ausschließlich auf dem Vorhandensein elektrisch geladener Atome oder Moleküle, den Ionen. Elektrolytische oder Ionenleiter sind vor allem Salze in festem, geschmolzenem oder gelöstem Zustand, ferner Säuren und Basen in wässriger Lösung sowie Stoffe, die erst durch Wechselwirkung mit dem Lösungsmittel Ionen bilden.

Die Leitfähigkeit hängt ab von

1. der Ionenbeweglichkeit  $\mu$ ,
2. der Anzahl der verfügbaren Ionen,
3. der Temperatur des elektrolytischen Leiters.

Zu 1:

Die Leitfähigkeit ist proportional zur Ionenbeweglichkeit  $\mu$ :

$$\mu = \frac{ze}{6\pi\eta r} \quad (5.1)$$

(Herleitung der Gleichung s.u.). Dabei ist  $ze$  die Ladung des Ions ( $z$  ist die Wertigkeit,  $e$  die Elementarladung),  $\eta$  ist die Viskosität des Elektrolyten,  $r$  ist ein Maß für die 'Größe' des Ions (hier kommt es nicht nur auf die räumliche Ausdehnung an, sondern es spielen auch noch andere Effekte wie z.B. die Hydratation eine Rolle).

Über die Viskosität hängt die Ionenbeweglichkeit von der Temperatur ab. Mit steigender Temperatur nimmt die Viskosität ab, bei Wasser hat sie zum Beispiel für Temperaturen von 10/20/30/40° C die Werte 1309/1006/800/657  $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ . Daraus folgt eine Erhöhung der Leitfähigkeit des Elektrolyten bei steigender Temperatur.

Zu 2:

Je höher die Konzentration und je größer der Dissoziationsgrad des Elektrolyten sind, desto mehr Ladungsträger (Ionen) stehen für den Elektrizitätstransport zur Verfügung, desto größer ist also die Leitfähigkeit (Dissoziationsgrad: Zahl der in

Ionen dissoziierten Moleküle). Die Konzentration eines Elektrolyten und sein Dissoziationsgrad sind nicht unabhängig voneinander: Nach dem Ostwaldschen Verdünnungsgesetz nimmt der Dissoziationsgrad mit steigender Konzentration ab.

Zu 3:

Der Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Temperatur ist komplexer Art: Zunächst nimmt die Viskosität des Lösungsmittels mit steigender Temperatur ab (vgl. 1.). Darüber hinaus nimmt bei vielen Elektrolyten der Dissoziationsgrad mit der Temperatur zu. Addieren sich beide Effekte, so resultiert eine starke Zunahme der Leitfähigkeit mit wachsender Temperatur. Es gibt aber eine Reihe von Elektrolyten, bei denen der Dissoziationsgrad mit steigender Temperatur abnimmt. Dabei kann der Fall eintreten, dass die Leitfähigkeit aufgrund der Viskositätsabnahme bei steigender Temperatur zunächst zunimmt, dann aber wegen des fallenden Dissoziationsgrades ein Maximum erreicht oder sogar wieder abnimmt

Herleitung von Gl. (5.1):

Befindet sich ein Ion mit der Ladung  $Q = ze$  in einem elektrischen Feld mit der Feldstärke  $E = U_0 / l$ , so wirkt eine Kraft

$$F_E = QE = zeU_0 / l \quad (5.2)$$

auf das Ion. Hierbei ist  $U_0$  die Spannung zwischen den Elektroden und  $l$  deren Abstand, siehe Abb. 5.22. Wir setzen voraus, dass das elektrische Feld homogen ist, d.h. dass die Kraft  $F_E$  innerhalb des Raumes zwischen den Elektroden überall gleich groß und gleich gerichtet ist.

Durch das Einwirken der Kraft  $F_E$  wird der ungeordneten Wärmebewegung der Ionen eine gerichtete Bewegung überlagert. Infolgedessen kommt es zu einer beschleunigten Bewegung der Ionen in Richtung auf die Elektroden.

Der Kraft  $F_E$  ist in flüssigen Medien die *Reibungskraft*

$$F_R = 6\pi\eta rv \quad (\text{Stokessches Gesetz}) \quad (5.3)$$

entgegengerichtet.  $\eta$  ist die Viskosität des Lösungsmittels,  $r$  ist ein Maß für die "Größe" des Ions und  $v$  seine Geschwindigkeit. Die Reibungskraft nimmt also mit der Geschwindigkeit zu.

Unter geeigneten Bedingungen kann sich der stationäre Fall  $F_E = F_R$  einstellen; die Bewegung erfolgt nicht mehr beschleunigt, die Geschwindigkeit ist konstant. Dann ist

$$6\pi\eta rv = QE = ze \frac{U_0}{l} \quad (5.4)$$

und also:

$$v = \frac{ze}{6\pi\eta r} \frac{U_0}{l} \quad (5.5)$$

Die Ionen legen in der Zeit  $\Delta t$  den Weg  $\Delta s$  zurück:

$$\Delta s = \frac{ze}{6\pi\eta r} \frac{U_0}{l} \Delta t \quad (5.6)$$

Die *Ionenbeweglichkeit*  $\mu$  ist als das Verhältnis der Ionengeschwindigkeit  $v$  zur Feldstärke  $E$  definiert:

$$\mu = \frac{v}{E} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{I}{U_0} \quad (5.7)$$

Hieraus folgt:

$$\Delta s = \mu \frac{U_0}{I} \Delta t \quad (5.8)$$

Aus dem Vergleich von Gl. (5.6) und (5.8) folgt:

$$\mu = \frac{ze}{6\pi\eta r} \quad (5.9)$$

Die Ionenbeweglichkeit wächst also proportional zur Ladung  $ze$  und umgekehrt proportional zur Viskosität des Lösungsmittels und zur "Größe" des Ions.

### 5.1.2 Ladung und Entladung eines Kondensators

Ein Kondensator besteht im Prinzip aus zwei metallischen Körpern beliebiger Form (den sogenannten *Belegungen*), die einander isoliert gegenüberstehen. Bei den üblicherweise verwendeten Kondensatoren bestehen die Belegungen meist aus dünnen Metallfolien, die – durch eine Isolierschicht voneinander getrennt – aufgewickelt und mit Anschlüssen versehen werden.

Wird ein Kondensator an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen, so entsteht auf der einen Belegung ein Elektronenüberschuss, also negative Ladung, auf der anderen Belegung bildet sich ein Elektronenmangel, also positive Ladung. Zwischen den so aufgeladenen Belegungen besteht ein elektrisches Feld.

Das Verhältnis der Ladung  $Q$  des Kondensators zu der Spannung  $U$  an seinen Anschlüssen wird als *Kapazität* bezeichnet. Kapazitäten werden mit dem Formelzeichen  $C$  bezeichnet und in der Einheit Farad (F) gemessen:  $[C]=F$ .

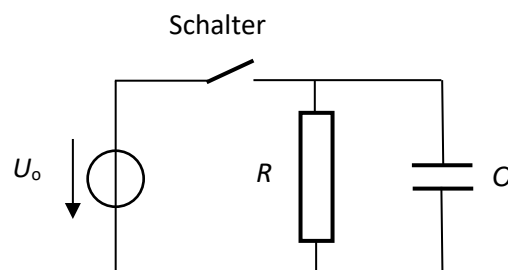


Abb. 5.3: Kondensator im Stromkreis.

Sobald der Kondensator in Abb. 5.33 bei geschlossenem Schalter aufgeladen ist, fließt kein Ladestrom mehr, obwohl die Spannungsquelle noch angeschlossen ist. Wird die Spannungsquelle durch Öffnen des Schalters entfernt, so bleibt der Ladestand erhalten; der Kondensator selbst stellt eine Spannungsquelle dar.

Wir betrachten einen Kondensator, der bis zur Spannung  $U_0$  aufgeladen sei. Dann ist die im Kondensator gespeicherte elektrische Ladung

$$Q = C U_0 \quad (5.10)$$

Nun klemmen wir die Spannungsquelle ab und lassen den Kondensator sich über einen Widerstand  $R$  entladen. Dadurch verringert sich die Ladung auf dem Kondensator exponentiell mit der Zeit nach dem Gesetz<sup>1</sup>

$$U_C^{Entl}(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (5.11)$$

Für die Aufladung des Kondensators ergibt sich in ähnlicher Weise

$$U_C^{Auf}(t) = U_\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right] \quad (5.12)$$

Dabei ist  $U_\infty$  die Ladung, mit der der Kondensator für  $t \rightarrow \infty$  aufgeladen wird.

Nach der sog. Halbwertszeit  $t_h$  sinkt die Spannung am Kondensator vom Anfangswert auf die Hälfte ab. Gl. (5.12) liefert für diesen Fall

$$\frac{U_C^{Entl}(0)}{2} = U_0 \exp\left(-\frac{t_h}{RC}\right) \quad (5.13)$$

$$\frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{t_h}{RC}\right) \quad \text{bzw.} \quad t_h = RC \ln 2 \approx 0,693 RC \quad (5.14)$$

Die letzten Gleichungen enthalten im Nenner des Exponenten das Produkt  $RC$ , dessen Maßeinheit die Dimension einer Zeit besitzt.  $RC$  ist die Zeit, in der die Spannung beim Entladen auf  $e^{-1} = 0,368$  des Anfangswertes  $U_0$  abgesunken bzw. beim Aufladen auf  $1 - e^{-1} = 0,632$  des Endwertes  $U_\infty$  angestiegen ist. (Für die Zeiten  $t = 2/3/4/5 RC$  steigt die Spannung auf 0,86 / 0,95 / 0,98 / 0,99  $U_\infty$ .)

### 5.1.3 Passverhalten eines RC-Glieds

Ein  $RC$ -Glied (Abb. 5.6) besteht aus einem ohmschen Widerstand  $R$  und einem Kondensator  $C$ , die hintereinander an eine Wechselspannungsquelle mit der Spannung  $U_e$  angeschlossen werden.

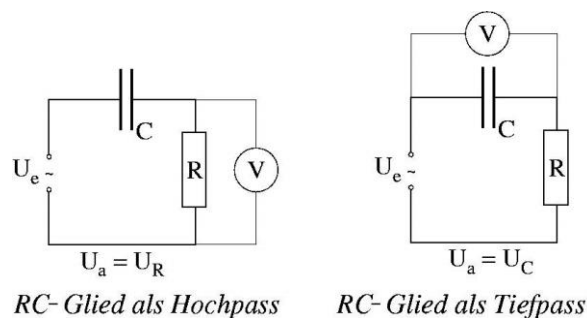


Abb. 5.6: RC-Glieder: Hoch- und Tiefpass

Solche  $RC$ -Glieder sind durch ein besonderes Passverhalten gekennzeichnet: aus einem Gemisch von Wechselspannungen verschiedener Frequenzen am Eingang  $U_e$  werden vom "Hochpass" nur Spannungen hoher Frequenz zum Ausgang  $U_a$  durchgelassen, Spannungen kleiner Frequenz (insbesondere Gleichspannungen

<sup>1</sup> Zur Erinnerung:  $e^z = \exp(z)$

mit der Frequenz Null) werden blockiert. Umgekehrt werden beim "Tiefpass" Spannungen kleiner Frequenz durchgelassen und Spannungen hoher Frequenz kurzgeschlossen.  $RC$ -Glieder ermöglichen es z. B., unerwünschte Frequenzen aus einem Frequenzgemisch von einer Messschaltung (Schreiber, Oszilloskop etc.) fernzuhalten.

In der von  $U_e$ ,  $C$  und  $R$  gebildeten Masche gilt

$$U_e - U_R = U_C \quad \text{und} \quad U_R = RI \quad (5.15)$$

Für die weitere Diskussion nehmen wir an, dass die Spannung  $U_e$  eine mit der Schwingungsdauer  $T$  periodisch alternierende Gleichspannung ist (also  $U_e = U_0$  für  $0 < t < T/2$ ,  $U_e = -U_0$  für  $T/2 < t < T$  plus periodische Fortsetzung). In der Zeitspanne  $0 < t < T/2$  ist  $U_C$  durch Gl. (5) gegeben; damit erhält man aus Gl. (5.15):

$$U_C = U_e - RI = U_e \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right) \right] \quad (5.16)$$

und

$$U_R = RI = U_e \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right) \quad (5.17)$$

Es sei  $t_a$  die Zeit bis zur vollständigen Aufladung des Kondensators (in guter Näherung etwa in der Größenordnung von  $4RC$ , und  $T/2$  die Dauer einer Halbwelle der Spannung  $U_e$  (halbe Periodendauer). Bei *großer* Frequenz (kleine Schwingungsdauer) der Eingangsspannung  $U_e$  gilt  $0 < t < T/2 \ll t_a$ . Der exponentielle Faktor in Gl. (5.17) bleibt in diesem Zeitintervall annähernd 1; damit gilt  $RI \approx U_e$  und  $U_C \approx 0$ . Mit anderen Worten: Spannungen großer Frequenz können nur über  $R$  gemessen werden (*Hochpass*).

Bei *kleiner* Frequenz der Spannung  $U_e$  gilt umgekehrt, dass sich  $U_C$  sehr schnell dem Endwert  $U_e$  annähert, während  $U_R$  sehr schnell auf den Wert Null fällt; in Formeln  $RI = U_R \approx 0$  und damit  $U_C \approx U_e$ . Mit anderen Worten: Spannungen kleiner Frequenz können nur über dem Kondensator gemessen werden (*Tiefpass*).

Die hier für eine spezielle Form der Eingangsspannung  $U_e$  hergeleiteten Ergebnisse gelten sinngemäß auch für beliebige Wechselspannungen.

## 5.2 Aufgaben

### 5.2.1 Beweglichkeit von $\text{MnO}_4^-$ -Ionen

Geräte: Netzgerät 30-50 V Gleichspannung, Flachkammer für Ionenwanderung, Stativ mit Drehgelenk, Voltmeter,  $\text{KNO}_3$ -Lösung (0,01M),  $\text{KMnO}_4$ -Lösung (0,06 m), Stopuhr, Tropfpipetten, Multimeter.

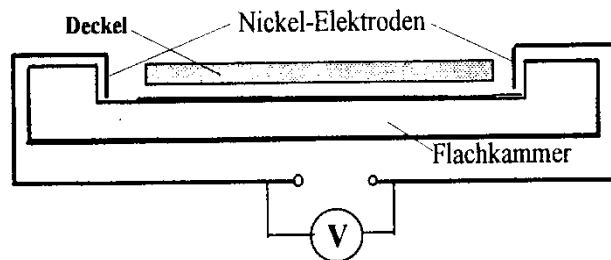


Abbildung 5.7: Schema des Versuchsaufbaus.

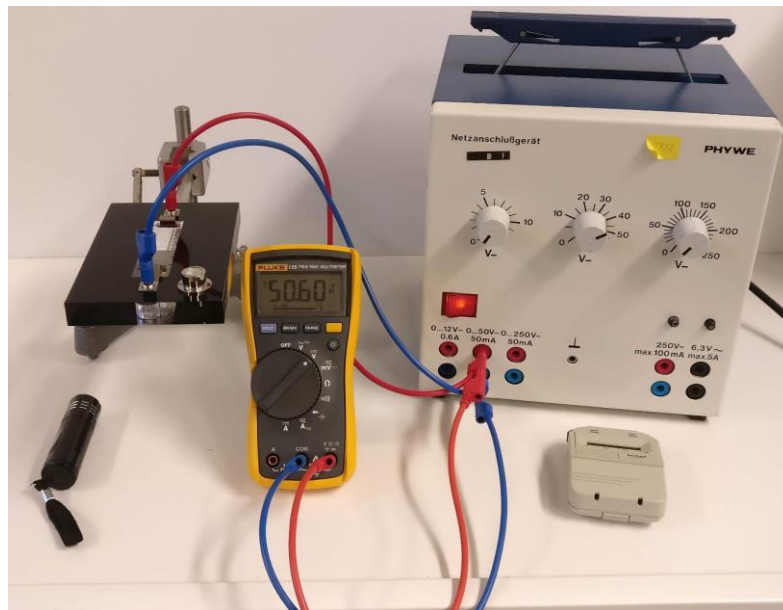


Abbildung 5.8: Foto des Versuchsaufbaus zur Ionenbeweglichkeit.

Zur Beobachtung der Ionenwanderung benutzen wir eine 6 cm lange Kapillare mit rechteckigem Querschnitt (siehe Abbildungen 5.7 und 5.8). Diese besteht aus einer in eine Kunststoffplatte eingefrästen Rinne mit aufgelegtem Glasdeckel. Zuerst wird die Schaltung hergestellt und anschließend die Kammer exakt horizontal ausgerichtet.

Das größte Problem bei diesem Experiment ist das saubere Füllen der Kapillare: Die Vertiefung an der Anodenseite wird nach Herstellung der Schaltung, jedoch vor dem Einschalten, mit  $\text{KNO}_3$ -Lösung (Kaliumnitrat) gefüllt (Tropfpipette). Die Lösung soll sich infolge der Kapillarkräfte zur Kathodenseite bewegen. Wenn die Kapillare blasenfrei mit der Lösung gefüllt ist (evtl. muss tropfenweise nachgefüllt werden), wird an der Kathodenseite die  $\text{KMnO}_4$ -Lösung (Kaliumpermanganat) eingebracht. Wenn dabei die violette Lösung in den Kapillarraum eindringt, ist der Füllstand zu hoch; durch Zugabe von  $\text{KNO}_3$ -Lösung an der Anodenseite oder durch

Absaugen von  $\text{KMnO}_4$  - Lösung an der Kathodenseite kann der Füllstand ausgeglichen werden.

**Aufgabe:**

Nach Einschalten der Spannung soll der von den  $\text{MnO}_4^-$  - Ionen (Permanganat-Anionen) zurückgelegte Weg  $s$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  gemessen werden (ca. 8 Werte). Wird nun in einem Diagramm  $s$  gegen  $t$  aufgetragen, so kann gemäß Gl. (5.6) aus der Steigung des Graphen die Ionenbeweglichkeit  $\mu$  incl. des Fehlers zu berechnet werden. Der Versuchsparameter Feldstärke muss während der Messung konstant gehalten werden.

**5.2.2 Zeitaufgelöste Darstellung von Wechselströmen**

Geräte: Oszilloskop, Funktionsgenerator (FG), Multimeter

Der FG wird mit Hilfe eines BNC-Kabels an einen der beiden Y-Eingänge des Oszilloskops angeschlossen (zur Bedienung des Oszilloskops wird auf den Anhang des Anleitungstextes zum 2. Versuchstag und auf das Erklärvideo hingewiesen!). Durch Einregeln der Zeitablenkung und der Spannungsverstärkung lässt sich erreichen, dass ein stehendes Bild entsteht.

**Aufgabe:**

- Stellen Sie verschiedene Frequenzen am Funktionsgenerator ein und messen Sie die Frequenz mit dem Oszilloskop. Vergleichen Sie die Messwerte mit der Frequenzeinstellung am Funktionsgenerator.
- Der Funktionsgenerator wird auf Rechteckspannung umgeschaltet und eine Frequenz von ca. 1 MHz bei einer Amplitude von ca. 5 V wird eingestellt. Auf dem Oszilloskopschirm soll nur eine positive Flanke des Rechteckimpulses erscheinen. Wie groß ist die Anstiegszeit der Flanke bei dieser Frequenz (10%-90% der Amplitude)?
- Der Funktionsgenerator wird wieder auf Sinusspannung umgeschaltet. Die Ausgangsspannung des Funktionsgenerator wird nun direkt mit einem Voltmeter gemessen. Das Signal wird gleichzeitig auf den Y-Kanal des Oszilloskops gegeben und die Amplitude gemessen. Da das Voltmeter den Effektivwert der Spannung, gegeben durch  $U_{eff} = \frac{|U_0|}{\sqrt{2}}$  anzeigt, muss die mit dem Oszilloskop gemessene Amplitude zunächst umgerechnet werden. Zu berechnen ist dann das Verhältnis  $U_{Osz} / U_{Voltm}$  für 10 verschiedene Frequenzen im Bereich zwischen 10 Hz und 1 MHz.

Hinweis:

Der Faktor  $\sqrt{2}$  bei der Bestimmung des Effektivwertes für Wechselspannung ergibt sich so:

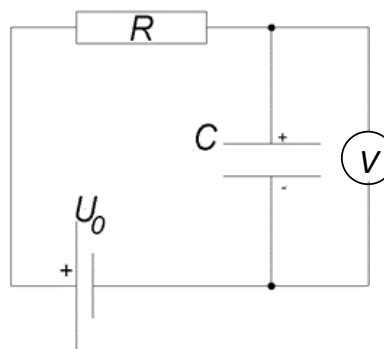
sei die Spannung gegeben als  $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ . Die effektive Spannung  $U_{eff}$  ist definiert als der zeitliche Mittelwert der Spannung

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt} \quad \text{mit } T = 2\pi / \omega.$$

Ausrechnen ergibt  $U_{eff} = \frac{|U_0|}{\sqrt{2}}.$

### 5.2.3 Laden und Entladen eines Kondensators

Geräte: Netzgerät 15 V, Oszilloskop, Widerstand ca. 10 kΩ, Kondensator ca. 2500 μF



**Abb. 5.9:** Schematischer Aufbau zur Ladung und Entladung eines Kondensators

Ein Kondensator wird über einen Widerstand auf 10 V aufgeladen und anschließend wieder entladen. Es soll die Spannung am Kondensator sowohl für den Aufladevorgang, als auch für den Entladevorgang mit Hilfe eines Oszilloskops in Abhängigkeit von der Zeit beobachtet werden. Errechnen Sie zunächst die ungefähr zu erwartende Halbwertszeit, damit Sie die Zeitablenkung am Oszilloskop entsprechend einstellen können. Vor dem eigentlichen Schaltungsaufbau wird der Kondensator durch ein Kabel kurzgeschlossen, damit evtl. vorhandene Restladungen abfließen können.

**Vor dem Einschalten auf richtige Polung achten. Der Kondensator wird bei falscher Polung zerstört.**

#### Aufgabe:

Nach Einschalten des Netzgerätes wird der Spannungsverlauf während der Aufladung am Oszilloskop dargestellt. Nach erfolgter Aufladung wird Stecker A aus dem Netzgerät entfernt und mit B verbunden. Die Ladung des Kondensators fließt über den Widerstand (und das Oszilloskop) ab und es wird die Entladekurve dargestellt.

#### Auswertung:

1. Die Entladekurve wird zu passender Zeit über die RUN/STOP-Taste am Oszilloskop ‚eingefroren‘. Wie groß ist die Halbwertszeit bei der Entladung (Cursor am Oszilloskop zur Ablesung benutzen)?
2. Das Oszilloskop-Bild und die Daten werden abgespeichert und nach Excel (o.ä.) exportiert, für Excel gemäß untenstehendem Vorgehen. Die Messdaten werden halblogarithmisch aufgetragen (also  $\ln U$  gegen  $t$ ). Aus der Stei-



gung ist die Zeitkonstante  $RC$  incl. des Fehlers zu berechnen.

3. Auf welchen Bruchteil der Anfangsspannung  $U_0$  ist die Spannung nach der Zeit  $RC$  abgesunken?
4. Mit einem Digital-Multimeter werden die Werte für  $R$  und  $C$  zum Vergleich gemessen (mit Fehlerangabe).

Die in 1., 2. und 3. experimentell bestimmten Werte sollen mit den theoretisch errechneten Daten verglichen werden (Werte aus 4. benutzen!). Welche möglichen Fehlerquellen existieren?

Datenexport in Excel:

1. Registerkarte „Daten“ → „Aus Text/CSV“ in der Kategorie „Daten abrufen und transformieren“ → CSV-Datei vom Oszilloskop auswählen und „Importieren“ → Trennzeichen „Komma“ & Datentyperkennung „Datentyp nicht ermitteln“ (wichtig) → „Laden“
2. Registerkarte „Start“ → „Suchen und Auswählen“ in der Kategorie „Bearbeiten“ → „Ersetzen“ → Suchen nach „.“ & ersetzen durch „.“ → „Alle ersetzen“
3. In Spalte D befinden sich jetzt die Zeitwerte in Sekunden und in Spalte E die Spannung in Volt.

#### 5.2.4 Passverhalten eines RC-Gliedes (Hoch- und Tiefpass)

Geräte: Oszilloskop, Funktionsgenerator, Schaltplatte mit  $R=2,2\text{ k}\Omega$ ,  $C=10\text{ nF}$

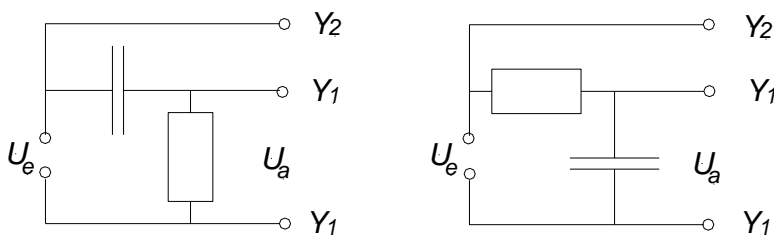


Abb. 5.10: Aufbau zur Messung des Durchlassverhaltens von RC-Gliedern.

##### Aufgabe:

Der "Durchlass", d.h. der Quotient  $U_a/U_e$ , soll für jede der beiden Schaltungen in Abb. 5.10 in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen werden.

##### Durchführung:

Die vom Funktionsgenerator gelieferte Spannung  $U_e=10\text{V}$  wird auf einem der beiden Y-Kanäle, die Spannung  $U_a$  auf dem zweiten Y-Kanal gemessen. Für mindestens 20 verschiedene Frequenzen  $f$  (nicht  $\omega$ ) im Intervall zwischen 100 Hz und 100 kHz werden  $U_e$  und  $U_a$  gemessen (im entscheidenden Bereich zwischen 5 kHz und 15 kHz sollen etwa 10 Messwerte liegen). Beachten Sie die Erdung der Geräte. Überprüfen Sie die angegebenen Werte für  $R$  und  $C$  mit

dem Multimeter und benutzen Sie diese Werte für die spätere Auswertung.

**Auswertung:**

Die Messwerte  $U_a / U_e$  werden (für beide Schaltungen) in einem Diagramm über der Frequenz aufgetragen, wobei die Frequenzachse im Zehnerlogarithmus skaliert werden soll. Für welche Frequenz zeigen beide Schaltungen den gleichen Durchlass des RC-Gliedes? Diese Frequenz heißt ‚Grenzfrequenz‘ und berechnet sich nach  $f_{g,theo} = \frac{1}{2\pi RC}$ . Stimmt die gemessene Grenzfrequenz mit dem theoretischen Wert überein? Wie groß ist das Verhältnis  $U_a / U_e$  für diese Grenzfrequenz? Stimmt der ermittelte Wert mit dem Theoriewert  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  überein?