6 Magnetfeld, Induktion, Wechselstromgrößen

6.1 Grundlagen

6.1.1 Induktion

Vom Strom zum Magnetfeld: Jede bewegte elektrische Ladung erzeugt ein magnetisches Feld mit der Feldstärke H (Einheit: A/m). Das bedeutet, dass um einen stromdurchflossenen Leiter immer ein Magnetfeld existiert. Deswegen lassen sich relativ starke Magnetfelder durch Spulen erzeugen, da sich in einer stromdurchflossenen Spule die magnetischen Felder der einzelnen Windungen zu einem Gesamt-Magnetfeld addieren. Ist der durch die Spule fließende Strom konstant, verändert sich das Magnetfeld nicht, d.h., auch die magnetische Feldstärke H bleibt zeitlich konstant.

Vom Magnetfeld zum Strom: 1831 entdeckte Michael Faraday, dass sich ändernde Magnetfelder elektrische Spannung und somit in z.B. einem Leiter Strom erzeugen. Man nennt diesen Vorgang *Induktion*. Genauer gesagt kommt es nur auf die relative Änderung an; eine Induktionsspannung lässt sich sowohl durch Bewegen eines elektrischen Leiters in einem konstanten Magnetfeld als auch in einem festen Leiter durch Änderung des magnetischen Flusses erzeugen.

Wenn man in einer stromdurchflossenen Spule in der Zeit Δt z. B. den Strom abschaltet oder seine Richtung umkehrt, so wird im Inneren der Spule die Feldstärke um ΔH geändert. Die Folge ist ein induktiver "elektrischer Spannungsstoß" $U\Delta t$, der an den Enden der Spule messbar ist:

$$U\Delta t = \mu_0 n_2 A \Delta H \tag{1}$$

A bezeichnet dabei den Spulenquerschnitt, n_2 die Windungszahl der Spule, und $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{\text{Vs}}{\text{Am}} = 1{,}2566 \cdot 10^{-6} \dfrac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ ist die magnetische Feldkonstante. Gleichung (1) gilt allerdings nur für den Fall, dass im Innenraum der Spule Vakuum herrscht (näherungsweise: dass er mit Luft gefüllt ist). Bei anderen Materialien wird μ_0 um die stoffspezifische Permeabilität μ erweitert.

Die Änderung der magnetischen Feldstärke kann auch mittels "magnetischer Kopplung" zwischen zwei Spulen geschehen; in diesem Fall bewirkt die Änderung des Magnetfeldes der einen stromdurchflossenen felderzeugenden Primärspule eine Induktion in einer zweiten Sekundärspule. Für ΔH gilt dann:

$$\Delta H = \frac{n_1 \Delta I}{l}$$

n_1 und l beschreibt die Windungszahl und die Länge der sogenannten felderzeugenden Primärspule, ΔI ist die Änderung der Stromstärke in der Primärspule. Damit wird aus Gl. (1):

$$U\Delta t = \mu_0 \frac{n_1 n_2 A}{l} \Delta I$$

oder, in differenzieller Form

$$U = \mu_0 \frac{n_1 n_2 A}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

Bei dauernder *Änderung* der Primärstromstärke kann also eine Induktionsspannung dauernd aufrechterhalten werden.

Ein sinusförmiger Wechselstrom $I = I_0 \sin(\omega t)$ mit $\omega = 2\pi f$ als Kreisfrequenz (*f* ist die Frequenz in Hz) erzeugt demnach eine Induktionsspannung

$$U(t) = \mu_0 \frac{n_1 n_2 A}{l} I_0 \omega \cos(\omega t)$$

Der Höchstwert der Spannung ist dann

$$U_0 = \mu_0 \frac{n_1 n_2 A}{l} \omega I_0 \tag{3}$$

Diese Gleichung gilt auch, wenn man die momentanen Höchstwerte U_o und I_o durch die mit Analog- oder Digitalmessgeräten messbaren Werte U_{eff} und I_{eff} ersetzt. Dabei gilt $U_{eff} = |U_0| / \sqrt{2}$.

Gleichung (3) gilt jedoch nur für den Idealfall einer langgestreckten Spule (bei der die Länge sehr groß gegenüber dem Durchmesser ist). Für gedrungene Spulen (Durchmesser nicht vernachlässigbar klein gegen Spulenlänge *l*) muss die rechte Seite der Gleichung (3) mit dem Faktor $1/\sqrt{1+\frac{d^2}{l^2}}$ korrigiert werden.

Aufgabe:

Schätzen Sie diesen Faktor $1/\sqrt{1+\frac{d^2}{l^2}}$ für *l*=*d*, *l*=10*d*, *l*=100*d* ab und vergleichen Sie mit dem Ergebnis der Näherungsformel $1-\frac{1}{2}\frac{d^2}{l^2}$.

Bemerkung:

Der Faktor $\sqrt{2}$ für Wechselspannung ergibt sich so: sei die Spannung gegeben als $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$. Die effektive Spannung U_{eff} ist definiert als $U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U^2(t)\,dt}$ mit $T = 2\pi/\omega$. Ausrechnen führt auf $U_{eff} = \frac{|U_0|}{\sqrt{2}}$.

6.1.2 Induktiver Widerstand

Wird eine Spule mit einer Wechselspannungsquelle verbunden, so wird auch in ihr eine Induktionsspannung erzeugt. Diese ist zu jeder Zeit der angelegten Wechselspannung entgegengerichtet (Lenzsche Regel).

In diesem Fall ist $n_1 = n_2 = n$; Gl. (2) erhält damit die Form

$$U(t) = \mu_0 \frac{n^2 A}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

Die Induktivität L (Einheit Henry (H)) hängt von der "Bauart" einer Spule ab; sie ist definiert als

$$L = \mu_0 \frac{n^2 A}{l}$$

Mit ihr schreibt sich Gl. (4) als

$$U(t) = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}U(t) \tag{5}$$

Die Induktivität verknüpft also die zeitliche Stromänderung in der Primärspule mit der Induktionsspannung.

Bei Verwendung sinusförmiger Wechselspannungen der Form

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t) \tag{6}$$

erhält man
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}U_0 \sin(\omega t)$$

und daraus durch Integration:

$$I(t) = -\frac{1}{\omega L}U_0 \cos(\omega t)$$

Der Faktor $U_0/(\omega L)$ stellt die Stromamplitude I_o dar; wegen $\pm\cos x = \sin(x \pm \pi/2)$ (für diese Gleichung gibt es eine sehr anschauliche Begründung – welche?) folgt:

$$I(t) = -I_0 \cos(\omega t) = I_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{7}$$

Ein Vergleich zwischen Gl. (6) und (7) zeigt, dass zwischen $U(t)$ und $I(t)$ eine Phasenverschiebung besteht, und zwar eilt bei einer idealen Induktivität (d. h. der Eigenwiderstand und die Eigenkapazität der Spule sei vernachlässigbar) die Spannungsamplitude der Stromamplitude um den Winkel $\varphi = 90° = \pi/2$ voraus (wobei diese Phasenverschiebung nicht von der speziellen Annahme $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ abhängt). Für beliebige (also auch nicht-ideale) Spulen schreibt man allgemein

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

Der Widerstand ist für Gleichstromkreise als $R = U/I$ definiert. Diese Definition ergibt für Wechselstromkreise mit $U(t)/I(t)$ keinen Sinn, da R zeitabhängig wäre und alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen würde. Dagegen ist der Quotient $R_L = U_0/I_0$ konstant; wegen $I_0 = U_0 \frac{1}{\omega L}$ ist

$$\frac{U_0}{I_0} = R_L = \omega L$$

R_L heißt *induktiver Widerstand* oder *Blindwiderstand der Induktivität*. Als 'Blindwiderstände' werden allgemein frequenzabhängige Widerstände bezeichnet, bei denen keine Wärmeverluste auftreten.

6.1.3 Kapazitiver Widerstand

Der Kondensator im Gleichstromkreis wurde bereits in einem früheren Versuch behandelt. Hier sollen nun die gewonnenen Erkenntnisse auf den Wechselstromkreis erweitert werden.

Zwischen Ladung *Q*, Kapazität *C* und Spannung *U* am Kondensator besteht die allgemeine Beziehung

$$Q = CU \tag{8}$$

Bei Verwendung sinusförmiger Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ wird der Kondensator im Takt der Wechselspannungsfrequenz laufend umgeladen d. h. bei Polaritätswechsel der Spannung fließt der Ladestrom in umgekehrter Richtung. Man erhält für die Ladung

$$Q(t) = CU_0 \sin(\omega t)\,.$$

Folglich ist $$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = \omega C U_0 \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t)\,.$$

Der Faktor $\omega C U_0$ stellt die Stromamplitude I_o dar. Mit $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$ folgt schließlich

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \pi/2)\,.$$

Auch hier besteht zwischen $U(t)$ und $I(t)$ eine Phasenverschiebung, wobei jetzt der Strom $I(t)$ der Spannung $U(t)$ um den Winkel $\pi/2 = 90°$ vorauseilt (der Eigenwiderstand und die Eigeninduktivität des Kondensators sei vernachlässigbar). Der Wechselstromwiderstand des Kondensators ist wegen $I_0 = \omega C U_0$ gleich

$$\frac{U_0}{I_0} = R_C = \frac{1}{\omega C}\,.$$

Man bezeichnet R_C als *kapazitiven Widerstand* oder als *Blindwiderstand der Kapazität*; R_C wächst im umgekehrten Verhältnis zur Frequenz.

6.1.4 Der Schwingkreis

Ein Stromkreis, der aus einem Kondensator mit der Kapazität *C* und einer Spule mit der Induktivität *L* besteht, heißt (idealer) Schwingkreis. Der Kondensator sei zur Zeit $t = 0$ auf die Ladung $Q = CU$ aufgeladen. Für $t > 0$ entlädt sich der Kondensator über die Spule, wobei diese aufgrund der Selbstinduktion dafür sorgt, dass der Kondensator (wegen der Lenzschen Regel) mit umgekehrter Polung wieder aufgeladen wird. Dieser Vorgang wiederholt sich ständig; ein solcher Kreis stellt also ein schwingungsfähiges System dar.

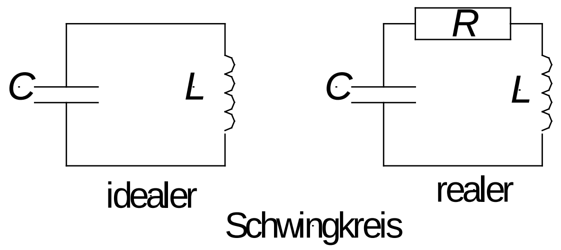

Abb. 6.1: Idealer und realer Schwingkreis.

Im realen Fall hat man immer mit dem Ohmschen Widerstand der Spule und dem der Kabelverbindungen zu rechnen, in der Zeichnung durch den Widerstand *R* symbolisiert. Ein Teil der Energie des Kondensators wird über diese Ohmschen Widerstände in Wärme verwandelt und steht damit der Schwingung nicht mehr zur Verfügung: Die Schwingung wird durch den ohmschen Widerstand gedämpft. Darüber hinaus wird dem Schwingkreis immer durch die unvermeidbare Abstrahlung elektromagnetischer Wellen Energie entzogen.

Nach der Maschenregel ist

$$U_C + U_R + U_L = 0$$

Mit den Gl. (5) und (8) sowie den Beziehungen $U_R = RI$ und $Q = \int I\,\mathrm{d}t$ wird daraus:

$$\frac{1}{C}\cdot\int I\,\mathrm{d}t + RI + L\dot{I} = 0$$

$$\frac{1}{C}I + R\dot{I} + L\ddot{I} = 0$$

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0$$

Diese Gleichung entspricht formal der mathematischen Beschreibung einer gedämpften mechanischen Schwingung (vgl. Versuch 2)

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Dabei ist β der Dämpfungsfaktor und ω_0 die Eigenfrequenz des schwingenden Systems. Analog gilt für den elektrischen Schwingkreis

$$\beta = \frac{R}{2L};\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L\cdot C}};\qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2;\qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{9}$$

6.2 Aufgaben

6.2.1 Magnetische Feldkonstante - Induktion

Geräte: Netztrafo, Spule, Amperemeter, Voltmeter

Experiment:

Die magnetische Feldkonstante μ_0 soll mittels Induktion bestimmt werden.

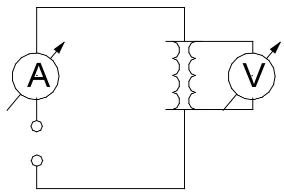

Abb. 6.2: Aufbau zur Messung von μ_0

Durchführung:

Erstellen Sie den Aufbau gemäß Abb. 6.2. Der Strom in der Feldspule wird in geeigneten Schritten erhöht (ca. 10 Messwerte im Bereich 0 bis 1 A) wobei jeweils die induzierte Spannung an der Induktionsspule gemessen wird. Experimentelle Parameter, die Sie für die Auswertung brauchen: Länge l der Feldspule, Querschnittsfläche A der Induktionsspule, Windungszahlen n_1 und n_2 von Feld- bzw. Induktionsspule.

Auswertung:

Stellen Sie die induzierte Spannung als Funktion des Feldspulenstroms graphisch dar und bestimmen Sie die magnetische Feldkonstante aus der Steigung des Graphen. Überlegen Sie, ob Sie den Korrekturfaktor für gedrungene Spulen berücksichtigen müssen.

6.2.2 Wechselstromwiderstand von Spule und Kondensator

Geräte: Funktionsgenerator, Spule mit 1600 Windungen, U-Kern, Spannvorrichtung, Kondensatoren, Ampere- u. Voltmeter, Oszilloskop

Experiment:

Der Wechselstromwiderstand einer Spule und von zwei Kondensatoren soll bestimmt werden.

Durchführung:

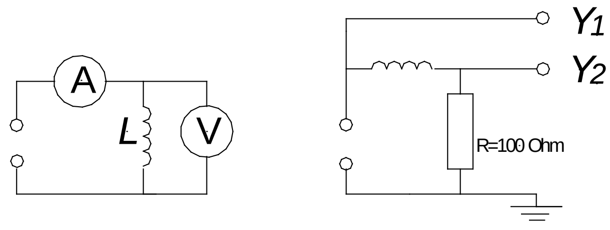

Abb. 6.3: Aufbauten zur Messung der Wechselstromwiderstände (links) und zur Messung der Phasenverschiebungen (rechts).

1. Mit dem Aufbau aus Abb. 6.3 (links) sollen bei verschiedenen Frequenzen die Stromstärken I und die Spannungen U des Schaltkreises gemessen werden. Führen Sie die Versuche mit einer Spule a) ohne Eisenkern, b) mit geschlossenem Kern (Spannvorrichtung) c) mit zwei Kondensatoren unbekannter Kapazität durch. Variieren Sie dazu die Frequenzen in geeigneten Schritten von ca. 20 bis 1000 Hz (jeweils ca. 10 Messwerte, sinusförmige Spannungen benutzen).
2. Stellen Sie mit Hilfe des Aufbaus aus Abb. 6.3 (rechts) den Spannungs- und Stromverlauf an der Spule mit geschlossenem Kern und an einem Kondensator auf dem Zweikanal-Oszilloskop übereinander dar. Dokumentieren Sie den Kurvenverlauf (z.B. Handyfoto) und ermitteln Sie die Phasenverschiebung

   $$\varphi = 2\pi \cdot f \cdot \Delta T = 2\pi \cdot$$

   für eine bestimmte Frequenz (Vorschlag 1kHz).

   Y_1 und Y_2 bezeichnen jeweils einen Eingang des Oszilloskops, der übrigbleibende Anschluss wird auf Masse (Erde) gelegt.

   Zum Ablesen der Phasenverschiebung ist es sinnvoll, Nulldurchgänge beider Kurven in den Ursprung des Koordinatensystems des Schirmes zu legen und die Zeitachse entsprechend zu "dehnen" (Cursor des Oszilloskops benutzen!). Achten Sie darauf, ein stehendes Bild am Oszilloskop zu sehen (‚Triggerung').

Auswertung Wechselstromwiderstand Spule:

Da es sich nicht um eine ideale Induktivität handelt, liegt eine Reihenschaltung von Induktivität L und (Gleichstrom-)Widerstand R vor. Diese hat den Widerstand (vergl. S. 6 – 4):

$$R_{Ges} = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{(R^2 + (\omega L)^2}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$R_{Ges}^2 = R^2 + \omega^2 L^2 = R^2 + 4\pi^2 L^2 f^2$$

Trägt man nun das Quadrat des gemessenen Widerstandswertes der Spule gegen das Quadrat der Frequenz auf, ergibt sich daraus ein linearer Zusammenhang, also eine Geradengleichung mit der Steigung $m = 4\pi^2 L^2$ und dem Achsabschnitt R^2. Bestimmen Sie aus dem jeweils erhaltenen Diagramm mithilfe der linearen Regression die Induktivität L der Spule für die drei Fälle. Wie groß ist der Gleichstromwiderstand der Spule?

Auswertung: Wechselstromwiderstand Kondensator

Tragen Sie den kapazitiven Widerstand R_C der verschiedenen Kondensatoren gegen den Kehrwert der Frequenz auf. Ermitteln Sie die Kapazität des Kondensators.

Auswertung: Phasenverschiebung

Vergleichen Sie die jeweils gemessene Phasenverschiebung φ bei 1kHz mit derjenigen, die sich aus Gleichstromwiderstand, Induktivität und der Frequenz rechnerisch ergibt.

6.2.3 Schwingkreis

2 Widerstandsdekaden, Kondensatordekade, Spulendekade, Oszilloskop, Funktionsgenerator FG.

Experiment:

Bestimmung der Eigenfrequenz und der Dämpfung im Serienschwingkreis

Durchführung:

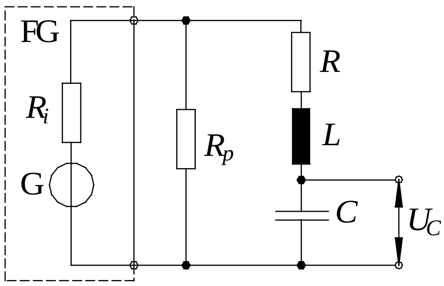

Abb. 6.4: Aufbau zur Bestimmung der Dämpfung und der Eigenfrequenz eines Schwingkreises.

Zu Beginn wird die in der Abb. 6.4 dargestellte Schaltung aufgebaut. Das in der Abb. gestrichelt gezeichnete Rechteck stellt den Funktionsgenerator dar. Zur regelmäßigen Aufladung des Schwingkreiskondensators wird eine periodische Rechteckspannung aus diesem Funktionsgenerator verwendet. Dadurch kann das Verhalten des Schwingkreises periodisch wiederkehrend beobachtet werden. Dabei muss die Periode der Rechteckspannung groß gegen die Schwingungsdauer des Schwingkreises sein. Am FG wird eine Rechteckspannung von ca. 10 V Amplitude und einer Frequenz von ca. 1 kHz eingestellt. Für den parallel geschalteten Widerstand, der den Einfluss des Innenwiderstandes des FG minimieren soll, wählen wir $R_p = 1\,\Omega$. Mit einem Oszilloskop wird die Spannung U_C über dem Kondensator gemessen (Amplitude im Bereich einiger 100 mV).

Hinweis:

Da die äußeren Kontakte der BNC-Eingangsbuchsen des Oszilloskops immer auf gleichem Potential liegen, muss auf die richtige Polarität beim Anschluss geachtet werden.

Dämpfungskonstante:

Zunächst soll die Dämpfungskonstante des Serienkreises (Gl. 9) als Funktion des Widerstandes R gemessen werden. Dazu wird C = 0,3 nF und L $\approx$ 470 μH gewählt. Der tatsächliche Wert von L kann dem Aufdruck auf der Spulendekade entnommen werden (Größtfehler ca. 2 %), der Wert für C wird für die Auswertung nicht benötigt. Für 3 verschiedene Werte von R im Bereich von 20 Ω bis 50 Ω, beginnend mit 20 Ω, werden jeweils die Spannungswerte von fünf benachbarten Amplituden der gedämpften Schwingung gemessen. Zur Auswertung wird jeweils der natürliche Logarithmus dieser Werte errechnet und über der Zeit aufgetragen. Die Steigung der Regressionsgerade entspricht dann der Dämpfungskonstante. Vergleichen Sie die erhaltenen Dämpfungskonstanten mit dem erwarteten Wert aus Gl. (9)

Eigenkreisfrequenz:

Als nächstes soll die Eigenkreisfrequenz des Serienkreises als Funktion der Kondensatorkapazität C gemessen werden. Dazu wird R = 20 Ω und $L \approx$ 470 μH gewählt. Der mit einem Multimeter gemessene Wert von R kann als fehlerfrei angenommen werden. Für mindestens 5 verschiedene Werte von C im Bereich 5 nF bis 20 nF (ebenfalls als fehlerfrei anzunehmen) wird die Eigenkreisfrequenz ω gemessen (Cursor des Oszilloskops benutzen) und über C aufgetragen. In das gleiche Diagramm werden auch die theoretisch erwarteten Ergebnisse gem. Gl. (9) eingetragen (benutzen Sie hierzu die aus dem letzten Versuch ermittelte Dämpfungskonstante für 20 Ω).