

## Fourieranalyse

### Stichworte:

FOURIERreihe (trigonometrische Reihe), FOURIERkoeffizienten, FOURIERanalyse (FOURIERzerlegung, harmonische Analyse), Amplitudenspektrum, Phasenspektrum, lineare Systeme, Übertragungsfunktion, Grund- und Oberschwingungen, EULERSche Formeln, Abtasttheorem.

### Messprogramm:

Aliasing bei Verletzung des Abtasttheorems, Spektren von Fotodetektorsignalen, Spektren von Schallsignalen, Spektrum eines Schwebungssignals und eines amplitudenmodulierten Signals, Spektren von Rechteck-, Sägezahn- und Dreieckssignal, Gibbsches Phänomen.

### Literatur:

- /1/ HÄNSEL, H., NEUMANN, W.: „Physik - Mechanik und Wärmelehre“, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg u.a.
- /2/ BRACEWELL, R. N.: „The Fourier Transform and its Applications“, McGraw-Hill, London u.a. (für Fortgeschrittene)
- /3/ EICHLER, H. J., KRONFELDT, H.-D., SAHM, J.: „Das Neue Physikalische Grundpraktikum“, Springer-Verlag, Berlin u.a.

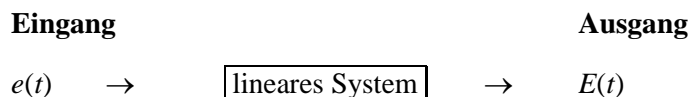
## 1 Einleitung

Die FOURIERanalyse (nach JEAN-BAPTISTE-JOSEPH DE FOURIER, Abb. 1) ist ein wichtiges Werkzeug im Bereich der Signalanalyse und -verarbeitung. Mit ihrer Hilfe kann ausgerechnet werden, aus welchen harmonischen Signalen<sup>1</sup> unterschiedlicher Amplitude, Frequenz und Phasenlage ein periodisches Signal zusammengesetzt ist. Im Folgenden beschränken wir uns auf die Analyse sogenannter *Zeitsignale*. Das sind Signale wie z.B. eine Spannung  $U(t)$  oder ein Strom  $I(t)$ , die sich mit der Zeit  $t$  ändern. Formal lassen sich die folgenden Überlegungen jedoch auch auf Signale übertragen, bei denen sich eine physikalische Größe mit dem Ort ändert, wie etwa die Intensität  $I(x)$  von Licht längs der Ortskoordinate  $x$ .



Abb. 1: JEAN-BAPTISTE-JOSEPH DE FOURIER (1768-1830)<sup>2</sup>

Wir wollen als Beispiel für eine Anwendung der FOURIERanalyse ihre Bedeutung in der *Systemtheorie* zur Beschreibung des Verhaltens *linearer Systeme* herausgreifen. Die Theorie linearer Systeme hat in der Physik eine große praktische Bedeutung. Mit ihr kann das Verhalten vieler *physikalischer Systeme* beschrieben werden, ohne im Einzelnen wissen zu müssen, wie diese Systeme im Inneren aufgebaut sind. Wir behandeln diese Systeme als „Kästen“ unbekanntes Inhalts („Black-Boxes“), von denen wir wissen, dass sie auf ein bestimmtes Eingangssignal  $e(t)$  mit einem bestimmten Ausgangssignal  $E(t)$  antworten:



*Lineare Systeme* erfüllen die Bedingung der *Linearität* (daher der Name): Eine Summe von Eingangssignalen führt zu einer entsprechenden Summe von Ausgangssignalen:

<sup>1</sup> Mit *harmonischen Signalen* sind in diesem Text *sinusförmige Signale* gemeint.

<sup>2</sup> Quelle: GELLERT, W. et al. [Eds.]: „Kleine Enzyklopädie Mathematik“, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig, 1969

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \text{Eingang} & & \text{Ausgang} \\ f(t) = \sum_j e_j(t) \rightarrow & \boxed{\text{lineares System}} & \rightarrow F(t) = \sum_j E_j(t) \end{array}$$

Beispiele solcher linearer Systeme sind:

- in der Akustik: das System Mikrophon  $\rightarrow$  Verstärker  $\rightarrow$  Lautsprecher,
- in der Optik: das System Objektiv  $\rightarrow$  Bildaufnehmer,
- in der Elektrotechnik: das System Sender  $\rightarrow$  Nachrichtenübertragungsstrecke  $\rightarrow$  Empfänger.

Nach dem *FOURIER-Theorem*, auf das wir in Kap. 2 noch detailliert eingehen werden, kann ein *periodisches* Signal, also auch ein *periodisches Eingangssignal*  $f(t)$  eines linearen Systems, durch eine unendliche Summe *harmonischer* Signale  $h_n(t)$  ( $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ) mit unterschiedlichen Kreisfrequenzen  $\omega_n$  dargestellt werden, die sich in ihren Amplituden  $c_n$  und Phasen  $\phi_n$  unterscheiden können, aber nicht müssen:

$$(2) \quad f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \quad (c_0: \text{Konstante}^3)$$

Harmonische Signale werden von linearen Systemen unverzerrt übertragen, d.h. sie ändern bei der Übertragung allenfalls ihre Amplitude und Phasenlage, nicht jedoch ihre Form. Wir treffen nun die Annahme, dass wir wissen, wie ein System auf harmonische Eingangssignale unterschiedlicher Frequenz reagiert, dass wir also zu jedem harmonischen Eingangssignal  $h_n(t)$  die Amplitude und Phasenlage des zugehörigen harmonischen Ausgangssignals  $H_n(t)$  kennen.

Verändert das System die Amplituden aller harmonischen Eingangssignale unabhängig von ihrer Frequenz in gleicher Weise (z.B. Verstärkung um den Faktor 2) und werden alle harmonischen Eingangssignale um  $m\pi$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) in der Phase verschoben, so haben wir es mit einem *idealen System* zu tun. Aus der Linearität des Systems (Gl. (1)) folgt dann sofort, dass ein periodisches Eingangssignal  $f(t)$ , das sich nach dem *FOURIER-Theorem* in eine unendliche Summe harmonischer Signale zerlegen lässt<sup>4</sup>, unverzerrt durch das System übertragen wird. Das Ausgangssignal  $F(t)$  ist gegenüber dem Eingangssignal  $f(t)$  lediglich um einen konstanten Faktor (z.B. 2) verstärkt worden, es hat jedoch seine Form beibehalten.

*Reale Systeme* verhalten sich in der Regel anders. Bei ihnen kommt es je nach Frequenz  $\omega_n$  eines harmonischen Eingangssignals zu unterschiedlichen *Verstärkungen*  $V(\omega_n)$  und zu unterschiedlichen *Phasenverschiebungen*  $\Delta\phi(\omega_n)$  und damit zu einer Verzerrung des Ausgangssignals  $F(t)$  gegenüber dem Eingangssignal  $f(t)$ .

$V(\omega_n)$  heißt *Amplituden-Übertragungsfunktion* oder *Amplitudenspektrum* und  $\Delta\phi(\omega_n)$  *Phasen-Übertragungsfunktion* oder *Phasenspektrum* des Systems. Beide Funktionen zusammen beschreiben das so genannte *Frequenzverhalten* realer Systeme.

Wir gehen nun entsprechend unserer obigen Annahme davon aus, dass dieses Frequenzverhalten für ein von uns untersuchtes System bekannt ist. In der Praxis ist dies oft der Fall, z.B. weil der Hersteller des Systems entsprechende Daten mitgeliefert hat. Abb. 2 zeigt beispielsweise die Amplituden-Übertragungsfunktion einer PC-Soundkarte. Ihr können wir entnehmen, dass die Karte nur im Frequenzbereich zwischen etwa  $\nu = 200$  Hz und  $\nu = 10$  kHz gute Übertragungseigenschaften hat, weil sie dort harmonische Signale unabhängig von ihrer Frequenz gleichmäßig verstärkt ( $V(\nu) = \text{const.}$ ). Außerhalb dieses Frequenzbereichs werden die Ein- und Ausgangssignale dagegen frequenzabhängig gedämpft, was zwangsläufig zu einer Signalverzerrung führt, falls das Eingangssignal  $f(t)$  harmonische Komponenten mit entsprechenden Frequenzen enthält.

In Kenntnis des Frequenzverhaltens eines linearen Systems können wir für ein periodisches Eingangssignal  $f(t)$  *berechnen*, wie das Ausgangssignal  $F(t)$  aussehen wird. Wir müssen dazu lediglich wissen, aus welchen harmonischen Signalen  $h_n(t)$  das Signal  $f(t)$  gemäß dem *FOURIER-Theorem* zusammengesetzt ist.

<sup>3</sup>  $c_0$  stellt den zeitunabhängigen Gleichanteil von  $f(t)$  dar, der zum Informationsgehalt des Signals nichts beiträgt.

<sup>4</sup> Bei Formulierungen dieser Art ist in diesem Text der Gleichanteil des Signals ( $c_0$  in Gl. (2)) immer mit eingeschlossen.

Dann können wir für jedes dieser Signale  $h_n(t)$  unter Kenntnis von  $V(\omega_n)$  und  $\Delta\phi(\omega_n)$  das zugehörige Ausgangssignal  $H_n(t)$  angeben und anschließend die  $H_n(t)$  zum Ausgangssignal  $F(t)$  aufaddieren.

Die hierfür erforderliche Berechnung der Parameter (Amplitude, Phase, Frequenz) der *harmonischen Signale*, in die sich ein *periodisches Signal* zerlegen lässt, heißt *FOURIERzerlegung* oder *FOURIERanalyse* oder *harmonische Analyse* und ist Gegenstand dieses Versuches.

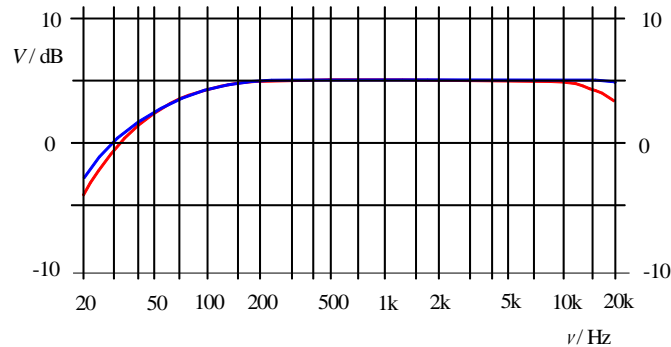


Abb. 2: Amplituden-Übertragungsfunktionen einer PC-Soundkarte (YAKUMO Soundcard 16 MCD); blaue Kurve: für Wiedergabe, rote Kurve für Aufnahme.<sup>5</sup>

## 2 Theorie

Im Folgenden werden wir auf mathematische Beweise verzichten, die in der angegebenen Literatur nachgelesen werden können, und uns auf die Darstellung der für den Versuch benötigten Zusammenhänge beschränken.

### 2.1 Fourierreihe und Fourierkoeffizienten

Nach dem bereits in der Einleitung erwähnten *FOURIER-Theorem* lässt sich ein *periodisches Signal*  $f(t)$  mit der Periodendauer  $T$  durch einen Gleichanteil und eine unendliche Summe harmonischer Signale darstellen, deren Kreisfrequenzen jeweils *ganzzahlige Vielfache* von  $\omega_0 = 2\pi/T$  sind. Man nennt diese harmonischen Signale mit den Kreisfrequenzen

$$(3) \quad n \omega_0 := \omega_n ; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

*Oberschwingungen* zur *Grundschiwingung* mit der Grundkreisfrequenz  $\omega_0$  und bezeichnet die Summendarstellung als *trigonometrische Reihe* oder *FOURIERreihe*. Sie ist gegeben durch:

$$(4) \quad f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Die Größen  $c_0$ ,  $a_n = a(n\omega_0)$  und  $b_n = b(n\omega_0)$  heißen *FOURIERkonstanten* oder *FOURIERkoeffizienten*. Ihre Bestimmung ist Gegenstand der *FOURIERanalyse*. Man findet nach kurzer Rechnung (s. z.B. /1/), dass sie sich aus dem Signal  $f(t)$  wie folgt berechnen lassen:

$$(5) \quad c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$(6) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

<sup>5</sup> Verstärkungen werden in der Messtechnik häufig in der logarithmischen Größe Dezibel (dB) angegeben. Einzelheiten dazu werden im Versuch „Operationsverstärker“ im SoSe behandelt. Eine Verstärkung um  $x$  dB entspricht einer linearen Verstärkung um den Faktor  $10^{x/20}$ .

$$(7) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Die Konstante  $c_0$  ist der Mittelwert (Gleichanteil) des Signals  $f(t)$ . Stellt  $f(t)$  z.B. eine zeitlich oszillierende Spannung  $U(t)$  dar, entspricht  $c_0$  dem Gleichspannungsanteil (DC-Anteil) des Signals.

Die Darstellung der FOURIERreihe gem. Gl. (4) lässt sich vereinfachen, wenn man folgenden Zusammenhang benutzt:

$$(8) \quad a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = c_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n)$$

mit

$$(9) \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

und

$$(10) \quad \phi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Damit wird aus Gl. (4) die so genannte *spektrale Darstellung* der FOURIERreihe:

$$(11) \quad f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n)$$

Ein periodisches Signal  $f(t)$  kann somit nach seiner FOURIERanalyse durch die Größen

$$(12) \quad \begin{array}{ll} c_0 & : \text{Gleichanteil (Mittelwert des Signals } f(t), \text{ s. Gl. (5))} \\ c_n = c_n(n\omega_0) & : \text{Amplitudenspektrum} \\ \phi_n = \phi_n(n\omega_0) & : \text{Phasenspektrum} \end{array}$$

beschrieben werden.<sup>6</sup>

Zwei Beispiele sollen die Verhältnisse verdeutlichen.

Das erste Beispiel zeigt einen recht einfachen Fall. In Abb. 3 ist oben ein anharmonisches, aber periodisches Signal  $f(t) = h_1(t) + h_2(t)$  mit der Periodendauer  $T = 1$  (in beliebigen Einheiten) dargestellt. Es ist zusammengesetzt aus den beiden darunter abgebildeten harmonischen Signalen: der Grundschwingung  $h_1(t)$  mit der Amplitude  $c_1 = 0,5$  (in beliebigen Einheiten), der Kreisfrequenz  $\omega_1 = 1 \times \omega_0 = 2\pi/T$  und der Phase  $\phi_1 = \pi$  sowie der ersten Oberschwingung  $h_2(t)$  mit der gleichen Amplitude  $c_2 = 0,5$ , der Kreisfrequenz  $\omega_2 = 2 \times \omega_0$  und der Phase  $\phi_2 = \pi/2$ . Eine FOURIERanalyse des Signals  $f(t)$  würde demnach liefern:

$$\begin{array}{lll} \text{Gleichanteil:} & c_0 & = 0 \\ \text{Amplitudenspektrum:} & c_1 = c_1(\omega_0) & = 0,5 \\ & c_2 = c_2(2\omega_0) & = 0,5 \\ & c_m = c_m(m\omega_0) & = 0 \quad \forall m \geq 3 \\ \text{Phasenspektrum:} & \phi_1 = \phi_1(\omega_0) & = \pi \\ & \phi_2 = \phi_2(2\omega_0) & = \pi/2 \\ & \phi_m = \phi_m(m\omega_0) & = 0 \quad \forall m \geq 3 \end{array}$$

<sup>6</sup> Die grafische Darstellung von  $c_n$  über  $\omega_n$  heißt Amplitudenspektrum. Die grafische Darstellung von  $a_n$  über  $\omega_n$  heißt Kosinusspektrum; die Darstellung von  $b_n$  über  $\omega_n$  heißt Sinusspektrum.

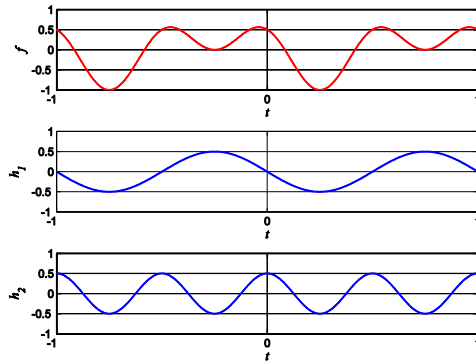


Abb. 3: Oben (rot): anharmonisches, aber periodisches Signal  $f(t)$  mit der Periode  $T = 1$  (in beliebigen Einheiten) mit seinen harmonischen Komponenten  $h_1(t)$  (Mitte, blau) und  $h_2(t)$  (unten, blau).

Das Amplituden- und das Phasenspektrum, also  $c_n(\omega_n)$  und  $\phi_n(\omega_n)$ , sind in Abb. 4 dargestellt.

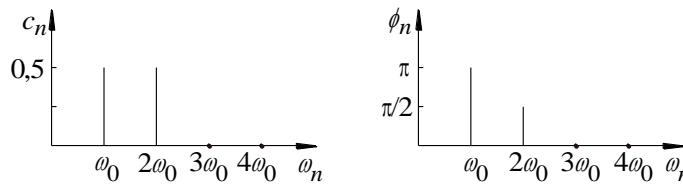


Abb. 4: Amplitudenspektrum (links) und Phasenspektrum (rechts) des in Abb. 3 oben dargestellten Signals. In solchen Diagrammen werden üblicherweise statt Datenpunkten senkrechte *Spektrallinien* gezeichnet, die von der Abszisse bis zum jeweiligen Ordinatenwert reichen.

Deutlich komplexer ist die in Abb. 5 dargestellte Situation. Oben links ist ein anharmonisches, aber periodisches Signal  $f(t)$  mit der Periodendauer  $T = 1$  (in beliebigen Einheiten) gezeigt, rechts daneben die Grundschwingung mit der Kreisfrequenz  $\omega_1 = 1\omega_0 = 2\pi/T$  sowie darunter vier Oberschwingungen mit den Kreisfrequenzen  $\omega_n = n\omega_0, n = 2, 3, 4, 5$ , die alle unterschiedliche Amplituden und Phasenlagen haben. Eine FOURIERANALYSE würde hier den Gleichanteil  $c_0 = 0$  sowie fünf Werte  $c_n$  für das Amplitudenspektrum und fünf Werte  $\phi_n$  für das Phasenspektrum liefern.

**Frage 1:**

- Versuchen Sie der Abb. 5 auf grafischem Wege die nötigen Daten zu entnehmen, um das Amplituden- und Phasenspektrum analog zu Abb. 4 zu skizzieren.

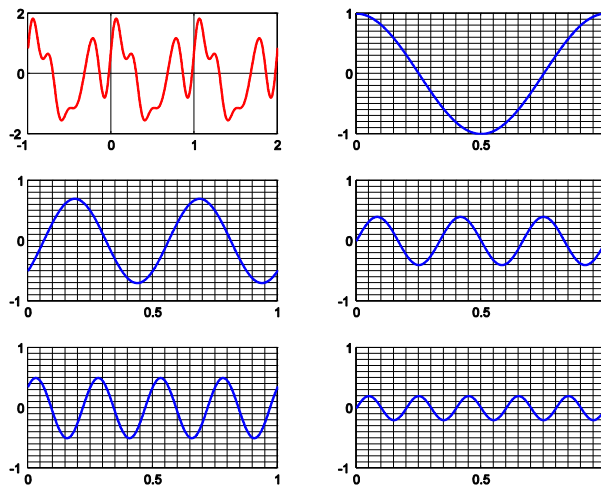


Abb. 5: Anharmonisches, periodisches Signal  $f(t)$  (oben links, rot) mit seinen fünf harmonischen Komponenten (oben rechts sowie Mitte und unten, blau). Abszisse:  $t$ , Ordinate:  $f(t)$  bzw.  $h_n(t)$ , Periodendauer  $T = 1$  ( $t$  und  $f(t)$  in beliebigen Einheiten)

## 2.2 Abtastung und Abtasttheorem

Wir wissen nun, wie man die FOURIERkoeffizienten  $a_0$ ,  $a_n$  und  $b_n$  und daraus die Größen  $c_0$ ,  $c_n$  und  $\phi_n$ , also das Amplituden- und Phasenspektrum für periodische Signale  $f(t)$  berechnen kann. In der Praxis tritt an dieser Stelle ein Problem auf: Bei den zu untersuchenden Signalen handelt es sich in der Regel nicht um analytisch bekannte Signale, sondern um *Messsignale* mit kompliziertem zeitlichen Verlauf, die z.B. mit einer Messwerterfassungskarte in einem Computer aufgezeichnet wurden. Solche Aufzeichnungsverfahren liefern zu den äquidistanten Zeitpunkten  $t_i$  (Zeitabstand  $\Delta t$ ) diskrete Funktionswerte  $y_i = f(t_i)$ <sup>7</sup>. Man spricht dann auch davon, dass das Signal  $f(t)$  mit der *Abtastkreisfrequenz*  $\omega_a = 2\pi/\Delta t$  an den Stellen  $t_i$  *abgetastet* wurde. Die FOURIERanalyse eines so abgetasteten Signals lässt sich natürlich nur *näherungsweise* durchführen - denn auch das Signal selber ist ja nur näherungsweise (nämlich nur an den Stellen  $t_i$ ) bekannt. Wie eine FOURIERanalyse in einem solchen Fall durchgeführt wird, soll im Folgenden dargestellt werden.

Nehmen wir an, von dem Signal  $f(t)$  lägen  $2m$  Messwerte (Abtastwerte)  $y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 2m-1$ ) zu den äquidistanten Zeitpunkten  $t_i$  vor. Dann erhalten wir für die FOURIERkoeffizienten:

$$(13) \quad c_0 = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{2m-1} y_i$$

$$(14) \quad a_n = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{2m-1} y_i \cos\left(\frac{2\pi n i}{2m}\right) \quad n = 1, 2, \dots, m$$

$$(15) \quad b_n = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{2m-1} y_i \sin\left(\frac{2\pi n i}{2m}\right) \quad n = 1, 2, \dots, m-1$$

Aus  $2m$  *unabhängigen* Funktionswerten gewinnen wir demnach  $m$  Koeffizienten  $a_n$ ,  $(m-1)$  Koeffizienten  $b_n$  und eine Konstante  $c_0$ , zusammen also  $m + (m-1) + 1 = 2m$  *unabhängige* FOURIERkoeffizienten. Dies ist vom Standpunkt des Informationsgehalts her auch verständlich: durch bloße Rechnung geht weder Informationsgehalt verloren, noch kommt neuer hinzu.

Die Frage, wie viel Funktionswerte man *mindestens* benötigt, um mit Hilfe der Gl. (13) - (15) die Kreisfrequenz  $\omega_s$  einer im Signal  $f(t)$  enthaltenen harmonischen Schwingung sicher bestimmen zu können, klärt das so genannte *Abtasttheorem* (*Samplingtheorem*, SHANNON-*Theorem*<sup>8</sup>). Es besagt, dass eine Kreisfrequenz  $\omega_s$  dann noch sicher detektiert werden kann, wenn für die Abtastkreisfrequenz  $\omega_a$  gilt:

$$(16) \quad \omega_a > 2 \omega_s \quad \text{Abtasttheorem}$$

Mit anderen Worten: Die Kreisfrequenz  $\omega_s$  eines harmonischen Signals kann nur dann sicher bestimmt werden, wenn für das Signal mehr als 2 Abtastwerte pro Periode vorliegen. Wird die Bedingung aus der Ungleichung (16) verletzt, wird ein Signal mit der Kreisfrequenz  $\omega_s$  also „unterabtastet“, so kommt es zu falschen Resultaten (*Aliasing-Effekten*). Die FOURIERanalyse liefert in diesem Fall die falsche Kreisfrequenz  $\omega_f$ :

$$(17) \quad \omega_f = |\omega_a - \omega_s|$$

Das Signal mit der Kreisfrequenz  $\omega_s$  taucht demnach im Amplitudenspektrum unter dem „falschem Namen“  $\omega_f$  auf, daher die Bezeichnung „Alias“. Für  $\omega_s \leq \omega_a \leq 2\omega_s$  erscheint es im Spektrum gespiegelt an der Achse  $\omega = \omega_a/2$ .

Ist die Abtastkreisfrequenz  $\omega_a$  vorgegeben, so kann ein harmonisches Signal gem. Gl. (16) nur dann richtig abgetastet werden, wenn für seine Kreisfrequenz gilt:

<sup>7</sup> Siehe Versuch „Datenerfassung und -verarbeitung mit dem PC...“.

<sup>8</sup> CLAUDE ELWOOD SHANNON (1916 - 2001).

$$(18) \quad \omega_s < \frac{\omega_a}{2}$$

Die Kreisfrequenz  $\omega_a/2$  heißt NYQUIST-Frequenz<sup>9</sup>.

Bei Einhaltung des Abtasttheorems bestimmt die Länge  $2 m \Delta t$  des Zeitintervalls, über das das Messsignal abgetastet wurde, die *Frequenzauflösung*  $\Delta f$ , d.h. die Genauigkeit, mit der Signalfrequenzen bestimmt werden können:

$$(19) \quad \Delta f \sim \frac{1}{2 m \Delta t}$$

Dieser Aspekt der FOURIERanalyse kann jedoch im Grundpraktikum nicht weiter vertieft werden.

### 2.3 Praktische Hinweise

Die Berechnungen der FOURIERkoeffizienten bzw. des Amplituden- und Phasenspektrums sind recht aufwändig. Heute können sie jedoch selbst von Personal Computern sehr schnell durchgeführt werden und im Falle großer Datenmengen lässt sich die Berechnung durch Einsatz spezieller Prozessoren noch beschleunigen.

Es ist noch gar nicht so lange her, dass hier mühsame Handarbeit geleistet werden musste. So findet man in einem Mathematikhandbuch aus dem Jahr 1969 den Hinweis (GELLERT, W. u.a. [Hrsg.]: „Kleine Enzyklopädie Mathematik“, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig, 1969):

*„Ein geübter Rechner braucht bei Benutzung einer elektrischen Rechenmaschine und unter Verwendung spezieller Rechenschemata zur Durchführung dieser harmonischen Analyse mit 12 Punkten etwa 1/2 Stunde, mit 24 Punkten etwa 2 Stunden, mit 36 Punkten etwa 6 Stunden und mit 72 Punkten etwa 16 Stunden... Eine mittelschnelle elektronische Rechenmaschine bewältigt die Rechnung für 36 Punkte in etwa 2 Minuten. Die Zeit, die erforderlich ist, um das Ergebnis auszudrucken, ist meist länger als die Rechenzeit.“*

Im vorliegenden Praktikumsversuch wird die FOURIERanalyse mit einigen 100 bis einigen 1000 Punkten durchgeführt. Halten Sie sich also schon mal die Semesterferien frei - oder setzen Sie den bereitstehenden PC ein, dann werden Sie ohne Probleme an einem Nachmittag fertig!

In der Praxis ist man häufig nur daran interessiert zu erfahren, welche *Amplituden* die harmonischen Signale haben, die in einem periodischen Messsignal enthalten sind. Die Phasenlage der einzelnen Beiträge ist oftmals unwichtig. Mit anderen Worten: das Amplitudenspektrum ist meistens von erheblich größerer praktischer Bedeutung als das Phasenspektrum. Auch bei den durchzuführenden Versuchen werden wir uns deshalb auf die Interpretation der Amplitudenspektren beschränken.

Hat man ein nicht-periodisches Signal  $f(t)$  vorliegen, das nur in einem Zeitintervall der Länge  $\tau$  definiert ist (z.B. ein Spannungsimpuls aus einem Fotodetektor), so kann man sich das Signal formal links und rechts des Intervalls periodisch fortgesetzt denken (mit der „Periode“  $\tau$ ) und es ebenfalls mit einer FOURIERreihe darstellen. Zwar werden durch eine so berechnete FOURIERreihe gem. Gl. (4) auch Funktionswerte außerhalb des Definitionsintervalls  $\tau$  dargestellt, diese können jedoch für die weiteren Betrachtungen einfach ignoriert werden.

---

<sup>9</sup> HARRY NYQUIST (1889 - 1976).

### 3 Versuchsdurchführung

#### Zubehör:

Digital-Oszilloskop TEKTRONIX TDS 1012 / 1012B / 2012C / TBS 1102B - EDU, PC mit Datenerfassungsgerät (NATIONAL INSTRUMENTS MyDAQ) und zugehörigem BNC-Adapter, 2 Funktionsgeneratoren (TOELLNER 7401 und AGILENT 33120A / 33220A), Additionsverstärker, Fotodiode mit integriertem Verstärker und Lochblende (Durchmesser 1 mm), AC-Filter für Fotodiode, Glühlampe und Leuchtstofflampe in lichtdichtem Kasten, Mikrophon mit Vorverstärker, Stimmgabel, Netzgerät (PHYWE (0 - 15 / 0 - 30) V).

#### 3.1 Allgemeine Hinweise

##### 3.1.1 Inbetriebnahme der Messwerterfassungskarte

Der Schalter der BNC-Buchse AGND, die mit dem NI myDAQ Datenerfassungsgerät verbunden ist, sollte hier auch wieder ausgeschaltet sein. Der Anschluss der Signalquellen (Funktionsgenerator, Mikrophonverstärker usw.) erfolgt über einen der BNC Eingänge AI 0 oder AI 1. Der entsprechend verwendete Eingang muss in der Software dann ausgewählt werden.

##### 3.1.2 Eingangsspannungsbereich der Messwerterfassungskarte

Der maximale Eingangsspannungsbereich des Datenerfassungsgerätes beträgt  $\pm 10$  V; er darf nicht überschritten werden. Zur Kontrolle werden deshalb alle Eingangssignale der Messwerterfassungskarte gleichzeitig am Oszilloskop dargestellt.

##### 3.1.3 Software

Die folgenden Versuche werden mit Hilfe der MATLAB-Skripte `Dateneingabe_FourierAnalyse.m` bzw. `Dateneingabe_Rekonstruktion.m` durchgeführt. Die Skripte melden sich mit selbsterklärenden Fenstern. Textausgaben der Skripte, wie z.B. Tabellen mit Amplituden und Frequenzen von FOURIERkomponenten, erscheinen im Command Window. Sie können dort markiert und per „Copy and Paste“ in andere Anwendungen übernommen werden (z. B. Word, Notepad-Editor u.a.).

##### 3.1.4 Ausdruck und Speicherung von Grafiken

Die erzeugten Grafiken (MATLAB *Figures*) können über  $\rightarrow$  File  $\rightarrow$  Print auf dem Drucker im Grundpraktikum ausgedruckt werden. Über  $\rightarrow$  File  $\rightarrow$  Save as kann eine Speicherung in verschiedenen gängigen Grafikformaten erfolgen.

Details von Grafiken können mit Hilfe der Zoom-Funktion im Figure-Fenster vergrößert werden.

#### 3.2 Abtasttheorem

Mit Hilfe des AGILENT-Funktionsgenerators wird ein sinusförmiges Zeitsignal  $U(t)$  ohne DC-Anteil mit einer Frequenz von 140 Hz und einer Amplitude von 4 V erzeugt (Kontrolle der Einstellungen am Oszilloskop) und an die Eingänge AI 0 bzw. AI 1 des BNC Adapters des Messwerterfassungsgerätes gelegt. Mit Hilfe des Programms `Dateneingabe_FourierAnalyse` werden bei Abtastfrequenzen von (1.000, 500, 300, 200, 150, 120) Hz jeweils 1.000 Abtastwerte eingelesen und FOURIERanalysiert. Die Ergebnisse (Zeitsignale und Amplitudenspektren) werden ausgedruckt bzw. gespeichert.

#### Frage 2:

- Wie lassen sich die Ergebnisse unter Berücksichtigung von Gl. (16) bis (18) interpretieren?

#### 3.3 Spektren der Signale eines Fotodetektors

Beim Praktikumsversuch zum Oszilloskop haben wir gesehen, dass der zeitliche Verlauf der Lichtintensität einer am normalen Stromnetz betriebenen Glühlampe anders aussieht, als der Lichtintensitätsverlauf für eine Leuchtstofflampe. Diesen qualitativen Befund wollen wir nun quantitativ untersuchen. Dazu wird eine Fotodiode zunächst mit dem Licht einer mit Netzspannung betriebenen Glühlampe und anschließend mit dem Licht einer ebenfalls mit Netzspannung betriebenen Leuchtstofflampe beleuchtet. Durch eine passende Lochblende vor der Fotodiode wird verhindert, dass das Ausgangssignal des Fotodiodenverstärkers (Zeitsignal  $U(t)$ ) übersteuert. Mit Hilfe des bereitliegenden AC-Filters wird der Gleichspannungsanteil aus dem jeweiligen Signal herausgefiltert (Kontrolle am Oszilloskop) und das Signal anschließend an einen der Eingänge AI 0 bzw. AI 1 des Messwerterfassungsgerätes gelegt. Mit Hilfe des Programms `Dateneingabe_FourierAnalyse` werden von beiden Signalen bei einer Abtastfrequenz von 5 kHz



jeweils 5.000 Abtastwerte eingelesen und FOURIERanalysiert. Die Ergebnisse (Zeitsignale und Amplitudenspektren) werden ausgedruckt bzw. gespeichert.

**Frage 3:**

- Worin unterscheiden sich die Zeitsignale, worin ihre Amplitudenspektren? (Angaben über die *absoluten* Amplituden der spektralen Anteile sind nicht von Bedeutung.)

### 3.4 Spektren von mit einem Mikrophon aufgezeichneten Schallwellen

Zunächst soll die Grundfrequenz einer Stimmgabelschwingung ermittelt werden. Dazu wird die Stimmgabel angeschlagen und die von ihr erzeugte Schallwelle mit Hilfe eines Mikrophons aufgezeichnet, indem das untere Ende der Stimmgabel auf das Mikrophon aufgesetzt wird. Das Ausgangssignal des Mikrophons wird mit dem bereitliegenden Verstärker verstärkt und dessen Ausgangssignal (Zeitsignal  $U(t)$ ) an einen der Eingänge AI 0 bzw. AI 1 des Messwerterfassungsgerätes gelegt. Mit Hilfe des Programms `Dateneingabe_FourierAnalyse` werden bei einer Abtastfrequenz von 5 kHz 10.000 Abtastwerte eingelesen und FOURIERanalysiert. Das Ergebnis (Zeitsignal und Amplitudenspektrum) wird ausgedruckt bzw. gespeichert.

**Frage 4:**

- Entspricht das Amplitudenspektrum den musikalischen Erwartungen?

Im zweiten Schritt wird versucht, den von der Stimmgabel erzeugten Ton (das a') zunächst nachzusingen und anschließend nachzusummen. Für beide Fälle sollen die akustischen Signale mit dem Mikrophon aufgezeichnet werden und anschließend eine Auswertung wie bei der Stimmgabelschwingung erfolgen.

**Frage 5:**

- Worin unterscheiden sich die Ergebnisse von denen der Stimmgabelschwingung?

### 3.5 Spektrum eines Schwebungssignals

Mit Hilfe eines Additionsverstärkers werden die Sinussignale zweier Funktionsgeneratoren (AGILENT und TOELLNER) addiert. Der eine Generator wird bei 104 Hz, Amplitude 1 V, kein DC-Anteil betrieben, der andere bei 108 Hz, Amplitude 0,75 V, kein DC-Anteil (Einstellungen mit dem Digital-Oszilloskop kontrollieren). Das Ausgangssignal des Additionsverstärkers (Zeitsignal  $U(t)$ ) wird an einen der Eingänge AI 0 bzw. AI 1 der Messwerterfassungskarte gelegt und gleichzeitig mit dem Oszilloskop beobachtet. Mit Hilfe des Programms `Dateneingabe_FourierAnalyse` werden bei einer Abtastfrequenz von 2 kHz 10.000 Abtastwerte eingelesen und FOURIERanalysiert. Das Ergebnis (Zeitsignal und Amplitudenspektrum) wird ausgedruckt bzw. gespeichert und der Verlauf des Amplitudenspektrums interpretiert.

### 3.6 Spektrum eines amplitudenmodulierten Signals

Wir betrachten ein harmonisches Spannungssignal  $U(t)$  der Form

$$(20) \quad U(t) = U_T \sin(\omega_T t)$$

mit der Amplitude  $U_T$  und der Kreisfrequenz  $\omega_T$ . Wird zu der konstanten Amplitude  $U_T$  dieses Signals ein zeitabhängiges Signal  $U_M(t)$  hinzu addiert, so erhält man ein *amplitudenmoduliertes* Signal<sup>10</sup>:

$$(21) \quad U(t) = [U_T + U_M(t)] \sin(\omega_T t)$$

Das Signal aus Gl. (20) heißt *Trägersignal* und  $\omega_T$  heißt *Trägerkreisfrequenz*.

Im einfachsten Fall ist  $U_M(t)$  ein harmonisches Signal mit der Kreisfrequenz  $\omega_M$  und der Amplitude  $U_{M0}$ . Dann folgt:

$$(22) \quad U(t) = [U_T + U_{M0} \sin(\omega_M t)] \sin(\omega_T t)$$

<sup>10</sup> Das Prinzip der Amplitudenmodulation (*amplitude modulation, AM*) wird z.B. zur Signalübertragung beim Lang-, Mittel- und Kurzwellenrundfunk eingesetzt. Der heutige Standard im Ultrakurzwellen-(UKW)-Bereich ist die Frequenzmodulation (*frequency modulation, FM*).

Diese Gleichung lässt sich umformen zu:

$$(23) \quad U(t) = U_T \sin(\omega_T t) + \frac{U_{M0}}{2} \left[ \cos((\omega_T - \omega_M)t) - \cos((\omega_T + \omega_M)t) \right]$$

**Frage 6:**

- Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum des Signals  $U(t)$  nach Gl. (23) für den Fall  $U_T = 2U_{M0} = 1 \text{ V}$ ,  $\omega_T/2\pi = 750 \text{ kHz}$  und  $\omega_M/2\pi = 15 \text{ kHz}$ .

Mit dem AGILENT-Funktionsgenerator wird ein amplitudenmoduliertes Signal gem. Gl. (22) mit folgenden Parametern generiert:  $U_T = 2 \text{ V}$ ,  $\omega_T/2\pi = 1 \text{ kHz}$ ,  $U_{M0} = 1 \text{ V}$ ,  $\omega_M/2\pi = 200 \text{ Hz}$  (beachte Fußnote<sup>11</sup>!). Das Signal (Zeitsignal  $U(t)$ ) wird an einen der Eingänge AI 0 bzw. AI 1 des Messwerterfassungsgerätes gelegt und gleichzeitig mit dem Oszilloskop beobachtet. Mit Hilfe des Programms `Dateneingabe_FourierAnalyse` werden bei einer Abtastfrequenz von 10 kHz 10.000 Abtastwerte eingelesen und FOURIERanalysiert. Das Ergebnis (Zeitsignal und Amplitudenspektrum) wird ausgedruckt bzw. gespeichert. Der Verlauf des Amplitudenspektrums wird mit den Erwartungen nach Gl. (23) verglichen.

### 3.7 Spektrum eines Rechtecksignals, Gibbssches Phänomen

Das Rechtecksignal eines Funktionsgenerators (Zeitsignal  $U(t)$ ; Amplitude 4 V, Frequenz 50 Hz, kein DC-Anteil) wird an einen der Eingänge AI 0 bzw. AI 1 des Messwerterfassungsgerätes gelegt. Mit Hilfe des Programms `Dateneingabe_Rekonstruktion` werden bei einer Abtastfrequenz von 10 kHz 10.000 Abtastwerte eingelesen und FOURIERanalysiert. Das Ergebnis (Zeitsignal und Amplitudenspektrum) wird ausgedruckt bzw. gespeichert und der Verlauf des Amplitudenspektrums wird mit den theoretischen Erwartungen verglichen. Zu diesem Vergleich gehört auch eine tabellarische Gegenüberstellung der erwarteten und gemessenen Amplituden für die 10 Spektralkomponenten mit den größten Amplituden.

**Hinweis:**

Darstellungen der FOURIERanalysen eines Rechtecksignals, eines Sägezahnsignals und eines Dreiecksignals finden sich in nahezu jedem Physiklehrbuch oder z.B. im „*Taschenbuch der Mathematik*“ oder in den Online-Nachschlagwerken von WOLFRAM RESEARCH<sup>12</sup>. Im Anhang sind die entsprechenden Formeln zur Berechnung der theoretisch zu erwartenden Spannungsamplituden für die einzelnen Signale aufgeführt. Die für den Vergleich benötigten Messdaten werden im Command-Fenster von MATLAB ausgegeben und können von dort in eine eigene Anwendung kopiert werden.

Anschließend wird das Zeitsignal durch schrittweise Addition seiner FOURIERkomponenten rekonstruiert (FOURIERSynthese). Auf diese Weise kann anschaulich gezeigt werden, wie das ursprüngliche Rechtecksignal Stück für Stück aus seinen FOURIERkomponenten zusammengesetzt werden kann, wenn bei der Rekonstruktion immer mehr Oberschwingungen zur Grundschwingung hinzuaddiert werden. Das Ergebnis der Rekonstruktion wird ausgedruckt bzw. gespeichert.

Bei der Betrachtung des rekonstruierten Rechtecksignals wird auffallen, dass es zu Über- und Unterschwingern kommt. Dieser Effekt heißt GIBBSSches Phänomen<sup>13</sup>. Es tritt immer dann auf, wenn das eingelesene Signal eine Unstetigkeit aufweist, wie das Rechtecksignal an den Stellen des Übergangs vom unteren zum oberen bzw. vom oberen zum unteren Signalpegel (s. Abb. 6). Die Überschwinger selbst heißen GIBBSSche Höcker oder GIBBSSche Überschwinger. Je größer die Zahl  $N$  der Oberschwingungen ist, die zur Synthese des Rechtecksignals verwendet werden, desto enger rücken die Extrema der Über- und Unterschwinger zusammen, ihre Amplituden bleiben für große  $N$  jedoch gleich. Eine genaue, aber aufwändige Rechnung ergibt, dass der größte Überschwinger eine Höhe von ca. 9 % der Amplitude des Rechtecksignals hat, während die Höhe des größten Unterschwingers etwa 4,8 % der Amplitude beträgt.

<sup>11</sup> Diese Parameter wurden in dem Funktionsgenerator in seinem internen Speicher „1“ abgelegt. Sie können abgerufen werden durch Betätigung der Taste RECALL; im Display erscheint zunächst die Angabe RECALL 0 mit blinkender 0. Durch Betätigung der Taste ^ wird die 0 auf 1 erhöht und danach die ENTER-Taste betätigt. Der Funktionsgenerator gibt nun an der OUTPUT-Buchse das gewünschte Signal aus.

<sup>12</sup> siehe <http://www.uni-oldenburg.de/physik/lehre/praktika/literatur/>

<sup>13</sup> JOSIAH WILLARD GIBBS (1839 - 1903)

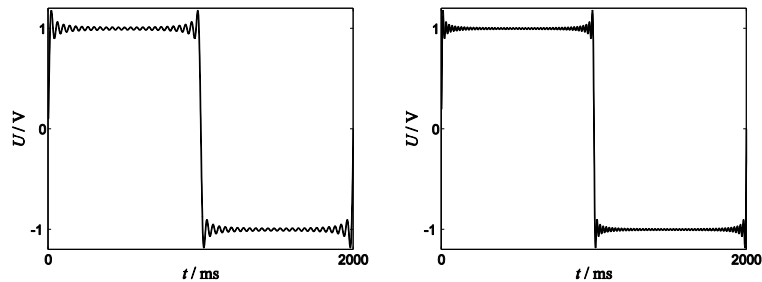


Abb. 6: GIBBSSches Phänomen bei der FOURIERSynthese eines Rechtecksignals mit einer Amplitude von 1 V und einer Periodendauer von 2 s. Links  $N = 50$ , rechts  $N = 100$ .

### 3.8 Spektrum eines Sägezahnsignals und eines Dreiecksignals

Der unter Kap. 3.7 beschriebene Versuch wird mit einem Sägezahnsignal und anschließend mit einem Dreiecksignal wiederholt (Amplitude der Signale jeweils 4 V, Frequenz 50 Hz, kein DC-Anteil; Abtastfrequenz 10 kHz, 10.000 Abtastwerte). Das Zeitsignal und das Amplitudenspektrum werden jeweils ausgedruckt bzw. gespeichert und der Verlauf der Amplitudenspektren mit den theoretischen Erwartungen verglichen. Darstellungen der Fourieranalyse beider Signale findet man ebenfalls im nachfolgenden Anhang.

Abschließend werden beide Signale aus ihren Spektren rekonstruiert, die Ergebnisse der Rekonstruktion werden ausgedruckt bzw. gespeichert.

#### Frage 7:

- Bei welchem der Signale macht sich das GIBBSSche Phänomen bemerkbar und warum?

## 4 Anhang

### Fourieranalyse des Signals einer Rechteckspannung:

$$(24) \quad f(t) = \frac{4U_R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)\omega t)$$

mit der Spannungsamplitude  $U_R$ .

$$(25) \quad U_n = \frac{4 U_R}{(2n-1)\pi}$$

### Fourieranalyse des Signals einer Sägezahnspannung:

$$(26) \quad f(t) = \frac{2U_R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\omega t)$$

$$(27) \quad U_n = \frac{2U_R}{n\pi}$$

### Fourieranalyse des Signals einer Dreiecksspannung:

$$(28) \quad f(t) = \frac{8U_R}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin((2n-1)\omega t)$$

$$(29) \quad U_n = \frac{8U_R}{(2n-1)^2\pi^2}$$