

## Kraft, Impuls und Kraftstoß

### Stichworte:

Kraft, Federkraft, HOOKEsches Gesetz, NEWTONsche Axiome, Impuls, Kraftstoß, harmonische Schwingung, Abstandsgesetz für Kräfte

### Messprogramm:

Kalibrierung eines Kraftsensors, Kraft und Auslenkung bei einer harmonischen Schwingung, Anziehungskraft zwischen zwei Magneten, Kraftstoß und Impulsänderung bei einem elastischen Stoß auf einer Luftkissenbahn.

### Literatur:

- /1/ DEMTRÖDER, W.: „Experimentalphysik 1 – Mechanik“, Springer-Verlag, Berlin u.a.
- /2/ MESCHEDE, D. [Hrsg.]: "Gerthsen Physik", Springer, Berlin

## 1 Einleitung

Dieser Versuch ist vor allem der quantitativen Messung von Kräften gewidmet. Im ersten Teil wird der Zusammenhang zwischen Kraft und Auslenkung bei einer mechanischen, harmonischen Schwingung untersucht. Der zweite Teil widmet sich dem Abstandsgesetz bei der Kraftwirkung zwischen zwei Magneten. Im dritten und letzten Teil geht es um den Zusammenhang zwischen Kraft und Impuls bzw. Kraftstoß.

## 2 Theorie

### 2.1 Harmonische Schwingung: Kraft und Auslenkung

Wir betrachten eine Anordnung gem. Abb. 1, wie wir sie in ähnlicher Form bereits im Versuch „Sensoren für Kraft...“ kennen gelernt haben. An einem Kraftsensor S hängt eine Feder FE. Am unteren Ende der Feder ist über eine Stange ST eine Kugel K befestigt. Zusätzlich ist an der Stange eine Reflektorscheibe R montiert.

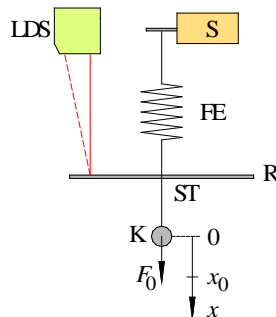


Abb. 1: Anordnung zur Messung der Kraft und der Auslenkung bei einer harmonischen Schwingung. Bezeichnungen siehe Text.

In der Ruhelage der Kugel sind die nach unten gerichtete Gewichtskraft von ST, K und R und die nach oben gerichtete Federkraft im Gleichgewicht. Der Mittelpunkt der Kugel befindet sich dann in der Ruhelage bei  $x = 0$ . Durch eine zusätzliche senkrecht nach unten gerichtete Kraft  $F_0$  wird die Kugel um die Strecke  $x_0$  nach unten ausgelenkt<sup>1</sup>. Zur Zeit  $t = 0$  wird die Kugel losgelassen und durch die Zugkraft  $F$  der Feder nach oben beschleunigt. Für  $F$  gilt nach dem HOOKEschen Gesetz mit der Federkonstanten  $D$ :

$$(1) \quad F = -D x_0$$

Anschließend führt die Kugel eine harmonische Schwingung in  $x$ -Richtung aus. Die Auslenkung aus der Ruhelage,  $x(t)$ , die mit einem Laser-Distanzsensor LDS gemessen werden kann, wird unter Vernachlässigung von Reibungseffekten durch folgende Gleichung beschrieben<sup>2</sup>:

$$(2) \quad x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

<sup>1</sup> Da  $F_0$  und alle weiteren betrachteten Kräfte nur in  $x$ -Richtung wirken, reicht eine Beschreibung mit skalaren Größen.

<sup>2</sup> Eine detaillierte mathematische Beschreibung der Schwingung erfolgt im späteren Versuch „Erzwungene mechanische Schwingungen“.

Darin ist  $\omega$  die Kreisfrequenz der Schwingung, die gegeben ist durch:

$$(3) \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$m$  ist die für die Schwingung maßgebliche Masse, für die gilt:

$$(4) \quad m = m_K + m_{ST} + m_R + \frac{1}{3} m_{FE}$$

$m_K$ ,  $m_{ST}$ ,  $m_R$  und  $m_{FE}$  sind die Massen der Kugel, der Stange, der Reflektorscheibe und der Feder<sup>3</sup>.

Die Geschwindigkeit  $v(t)$  der Kugel erhält man durch Differentiation von  $x(t)$  nach der Zeit:

$$(5) \quad v(t) = -x_0 \omega \sin(\omega t)$$

Die Beschleunigung  $a(t)$  erhält man durch Differentiation der Geschwindigkeit nach der Zeit:

$$(6) \quad a(t) = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t)$$

Damit folgt für die Kraft  $F(t)$ , die die Feder auf  $m$  ausübt:

$$(7) \quad F(t) = m a(t) = -m x_0 \omega^2 \cos(\omega t) = -F_0 \cos(\omega t)$$

mit

$$(8) \quad F_0 = m x_0 \omega^2$$

### Frage 1:

- Die Kraft  $F(t)$  hat je nach Lage  $x(t)$  der Kugel ein positives oder negatives Vorzeichen. In welchem Bereich wirkt die Feder als Zugfeder bzw. als Druckfeder?

In der Ruhelage der Kugel misst der Kraftsensor S die Gewichtskraft  $G$  von FE, ST, R und K. Wird die Kugel aus der Ruhelage mit der Kraft  $F_0$  nach unten gezogen, misst S nach dem 3. NEWTONschen Axiom<sup>4</sup> *actio = reactio* die Kraft

$$(9) \quad F_S = G + F_0 = G - F(t=0)$$

mit  $F(t)$  nach Gl. (7). Nach dem Loslassen der Kugel misst S die Kraft

$$(10) \quad F_S(t) = G - F(t)$$

Nach Abzug von  $G$  liefert S also  $F(t)$  nach Gl. (7) mit umgekehrtem Vorzeichen.

## 2.2 Abstandsgesetz für magnetische Kraft

Die Gravitationskraft  $\mathbf{F}_G$  zwischen zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  im Abstand  $r$  ist bekanntlich durch das NEWTONsche Gravitationsgesetz gegeben:

$$(11) \quad \mathbf{F}_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Dabei ist  $G$  die Gravitationskonstante und  $\hat{\mathbf{r}}$  der Einheitsvektor in Richtung der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Massen. Da die Kraft mit dem Quadrat des Abstandes  $r$  abnimmt, spricht man von einem  $1/r^2$ -Gesetz.

<sup>3</sup> Der Zusammenhang nach Gl. (4) wird im späteren Versuch „Erzwungene mechanische Schwingungen“ erläutert.

<sup>4</sup> ISAAC NEWTON (1643 – 1727)

Auch das COULOMB-Gesetz, das die Kraft  $\mathbf{F}_E$  zwischen zwei elektrischen Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  im Vakuum beschreibt, ist ein  $1/r^2$ -Gesetz. Es lautet:

$$(12) \quad \mathbf{F}_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

wobei  $\epsilon_0$  die elektrische Feldkonstante ist und  $r$  und  $\hat{\mathbf{r}}$  analog zum Gravitationsgesetz definiert sind. Für Ladungen mit ungleichen Vorzeichen ergibt sich eine anziehende Kraft, für Ladungen mit gleichen Vorzeichen eine abstoßende Kraft.

Auch für die Kraft zwischen zwei Magneten gilt unter bestimmten Bedingungen ein  $1/r^2$  Gesetz. Wir betrachten dazu gem. Abb. 2 zwei Stabmagneten, deren Längen groß gegenüber ihren Durchmessern sind. Die „Stärke“ solcher Magnete kann man unter dieser Voraussetzung durch *Polstärken*  $P$  beschreiben, die mit unterschiedlichen Vorzeichen am Nord- und Südpol des jeweiligen Magneten herrschen und als punktförmig angenommen werden können<sup>5</sup>. Die Kraft zwischen zwei Magneten wird dann durch folgendes Gesetz beschrieben, das auch als COULOMBgesetz für Magnete bezeichnet wird:

$$(13) \quad \mathbf{F}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{P_1 P_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$\mu_0$  ist die magnetische Feldkonstante und  $r$  und  $\hat{\mathbf{r}}$  sind wiederum analog zum Gravitationsgesetz definiert. Bei ungleichnamigen Polen ist die Kraft anziehend, bei gleichnamigen abstoßend.

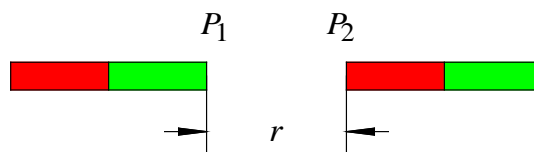


Abb. 2: Zum Abstandsgesetz für magnetische Kräfte.  $P_1$  und  $P_2$  sind die Polstärken der Magnete, deren Längen groß gegenüber ihren Durchmessern sind.  $r$  ist der Abstand beider Magnete, der zwischen den Polen gemessen wird.

### 2.3 Impuls und Kraftstoß

Der Bewegungszustand eines Körpers der Masse  $m$ , der sich geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, wird mit dem Impuls

$$(14) \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

beschrieben. Nach dem 1. NEWTONschen Axiom ist eine Änderung des Impulses nur möglich, wenn eine Kraft  $\mathbf{F}$  auf den Körper einwirkt. Die durch  $\mathbf{F}$  bewirkte zeitliche Änderung des Impulses ist nach dem 2. NEWTONschen Axiom gegeben durch

$$(15) \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

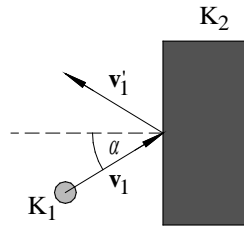
Gl. (15) kann man auch in der Form

$$(16) \quad d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt$$

schreiben. Sie besagt, dass eine Kraft  $\mathbf{F}$ , die während der Zeit  $dt$  auf einen Körper einwirkt, eine Impulsänderung  $d\mathbf{p}$  verursacht. Das Produkt  $\mathbf{F} dt$  wird auch als *Kraftstoß* bezeichnet. Es gilt also:

$$\text{Kraftstoß} = \text{Impulsänderung}$$

<sup>5</sup> Die magnetische Polstärke  $P$  wird in der Literatur unterschiedlich definiert. Hier ist die Größe mit der Einheit  $[P] = \text{A m}$  gemeint.

Abb. 3: Zum elastischen Stoß zweier Körper  $K_1$  und  $K_2$ .

Wir betrachten nun gem. Abb. 3 den elastischen Stoß eines Körpers  $K_1$  der Masse  $m_1$  mit einem ruhenden Körper  $K_2$ , dessen Masse  $m_2$  sehr viel größer als  $m_1$  ist.  $K_1$  möge sich anfänglich geradlinig mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1$  auf  $K_2$  zu bewegen ( $\mathbf{v}_2 = 0$ ) und unter dem Winkel  $\alpha$  auf  $K_2$  auftreffen. Nach dem Stoß bewegt sich  $K_1$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1'$  von  $K_2$  fort, wobei der Strich (') hier und i. F. Größen nach dem Stoß kennzeichnet. Im Fall  $m_2 \rightarrow \infty$ , der hier betrachtet werden soll, gilt  $\mathbf{v}_2' \rightarrow 0$ . Der Impuls von  $K_1$  vor und nach dem Stoß ist demnach:

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= m_1 \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{p}_1' &= m_1 \mathbf{v}_1' \end{aligned}$$

mit  $|\mathbf{v}_1| \approx |\mathbf{v}_1'|$ . Die kinetische Energie von  $K_1$  ist also vor und nach dem Stoß nahezu gleich:

$$(18) \quad \frac{1}{2} m_1 |\mathbf{v}_1|^2 \approx \frac{1}{2} m_1 |\mathbf{v}_1'|^2$$

Auf  $K_2$  wird unter den genannten Voraussetzungen praktisch keine kinetische Energie übertragen.

Die Impulsänderung, die  $K_1$  durch den Stoß erfährt, ist

$$(19) \quad \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1 = m_1 (\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1)$$

Sie muss gleich dem Impuls sein, den  $K_2$  aufnimmt:

$$(20) \quad \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_2' = m_2 \mathbf{v}_2'$$

Gl. (20) ist nicht im Widerspruch zur Tatsache, dass  $K_2$  bei dem Stoß wegen  $\mathbf{v}_2' \rightarrow 0$  praktisch keine kinetische Energie aufnimmt. Dies erkennt man gut aus dem Zusammenhang zwischen kinetischer Energie und Impuls:

$$(21) \quad E_{\text{kin},2} = \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2'^2 = \frac{\mathbf{p}_2'^2}{2 m_2}$$

Für  $m_2 \rightarrow \infty$  geht die kinetische Energie demnach auch bei endlichem Impuls  $\mathbf{p}_2'$  gegen Null.

Die Impulsänderung  $\Delta \mathbf{p}$  von  $K_1$  muss dem gesamten (integralen) Kraftstoß entsprechen, den  $K_2$  beim Stoßprozess auf  $K_1$  ausübt. Dieser Kraftstoß ist nach Gl. (16) gegeben durch:

$$(22) \quad \Delta \mathbf{p} = \int_0^{\tau} \mathbf{F}(t) dt$$

Hierbei ist  $\mathbf{F}(t)$  die während der Dauer  $\tau$  des Stoßes wirkende Kraft. Sie sorgt zunächst für die Abbremsung von  $K_1$  von der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1$  auf die Geschwindigkeit 0 und anschließend zu seiner Beschleunigung auf die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1'$ . Zum anschaulichen Verständnis des Stoßvorgangs kann man sich  $K_2$  als Feder vorstellen, die zunächst von  $K_1$  zusammengedrückt wird, bis seine Geschwindigkeit 0 ist, und die sich anschließend wieder entspannt und dabei  $K_1$  auf die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1'$  beschleunigt.

### 3 Versuchsdurchführung

#### Zubehör:

Kraftsensor auf DMS-Prinzip (Messbereich (0 – 5) N), Messverstärker für Kraftsensor, Gewichtssatz zur Kalibrierung des Kraftsensors, 2 Netzgeräte (PHYWE (0 - 15 / 0 - 30) V), Digital-Oszilloskop TEKTRONIX TDS 1012 / 1012B / 2012C / TBS 1102B, Feder mit Kugel, Stange und Reflektorscheibe, Laserdistanzsensor (BAUMER OADM 12U6460/S35), Stabmagnete in Al-Halterungen mit Haltestangen, PVC-Abstandsstück, Führung für Stabmagnet, Verschiebetisch, Luftkissenbahn, Schlitten für Luftkissenbahn mit Blende und Al-Würfeln, Gabellichtschranke (BETA-SENSORIK GLS-30BP/R), Haken für Kraftsensor, Stativ auf Grundplatte, Stativstangen, Stativsäule, Kreuzverbinder, Messschieber.

#### 3.1 Kalibrierung des Kraftsensors

Der in den folgenden Versuchen eingesetzte Kraftsensor arbeitet nach dem gleichen Prinzip wie der Sensor, der im Versuch „Sensoren für Kraft...“ eingesetzt wurde. Beide Sensoren unterscheiden sich lediglich in ihrem Messbereich (hier: 5 N, vormals 100 mN). Aus diesem Grund muss hier die Dämpfung ausgeschaltet sein. Die Kalibrierung des Sensors erfolgt mit mindestens fünf Massestücken im Bereich  $m \approx (50 - 500)$  g. Die Ausgangsspannung  $U$  des Kraftsensors<sup>6</sup> wird mit dem Oszilloskop<sup>7</sup> gemessen.  $U$  wird über  $G = mg$  aufgetragen, wobei für die Erdbeschleunigung  $g$  der Wert von  $g = 9,8133 \text{ m/s}^2$  verwendet wird, der als fehlerfrei angenommen werden kann. Durch die Daten wird eine Ausgleichsgerade gelegt, deren Parameter für die spätere Umrechnung von Spannung in Kraft verwendet werden.

#### 3.2 Kraft und Auslenkung bei einer harmonischen Schwingung

Mit einer Anordnung gem. Abb. 1 sollen die Kraft  $F(t)$  und die Auslenkung  $x(t)$  bei einer harmonischen Schwingung gemessen werden. Zunächst werden die Massen der Feder und des Systems Stange/Reflektorscheibe/Kugel durch Wiegen bestimmt. Anschließend werden alle Komponenten wie in Abb. 1 an den Kraftsensor S gehängt, der an ein Stativ montiert wird. Am selben Stativ ist auch der Laser-Distanzsensor LDS befestigt. Seine Höhe wird so justiert, dass die Reflektorscheibe bei der zu messenden Schwingung innerhalb seines Messbereiches bleibt. Anschließend wird die Kugel mit der Hand etwa 20 mm möglichst senkrecht nach unten ausgelenkt und losgelassen.

Die Ausgangsspannung des LDS,  $U_{\text{LDS}}(t)$ , und die Ausgangsspannung des Kraftsensors,  $U_{\text{S}}(t)$ , werden mit einem Speicheroszilloskop aufgezeichnet, das auf  $U_{\text{LDS}}$  getriggert wird. Die Zeitablenkung des Oszilloskops wird so eingestellt, dass 5 – 10 Perioden der Schwingung auf dem Bildschirm sichtbar sind. Nach dem Einschwingen wird im *single-sequence*-Modus ein typischer Schwingungsvorgang gespeichert und als Bildschirmfoto dem Protokoll beigefügt.

Mit Hilfe der Zeitcursor wird die Periodendauer der Schwingung bestimmt und daraus die Kreisfrequenz  $\omega$  berechnet. Die Amplituden (Index 0) von  $U_{\text{LDS}}(t)$  und  $U_{\text{S}}(t)$  einer ausgewählten Teilschwingung werden mit Hilfe der Spannungscursor gemessen:

$$(23) \quad U_{\text{LDS},0} = (U_{\text{LDS,max}} - U_{\text{LDS,min}}) / 2 \qquad U_{\text{S},0} = (U_{\text{S,max}} - U_{\text{S,min}}) / 2$$

Mit dem als fehlerfrei angenommenen Kalibrierfaktor  $k$  des LDS für Spannungsdifferenzen,

$$k = 0,0962 \text{ V/mm}$$

kann die Schwingungsamplitude  $x_0$ , und mit Hilfe von Gl. (8) daraus die Kraft  $F_0$ , bestimmt werden. Dabei ist die Masse  $m$  mit Hilfe von Gl. (4) zu berechnen und  $\omega$  wird mit Hilfe des Oszilloskops bestimmt. Analog dazu kann aus  $U_{\text{S},0}$  und den Daten der Kalibrierfunktion des Kraftsensors ebenfalls die Kraft  $F_0$  bestimmt werden. Beide Ergebnisse sollen miteinander verglichen werden .

#### Frage 2:

- Was können Gründe für eine mögliche Abweichung beider Größen sein?

<sup>6</sup> Der Einfachheit halber wird hier und i. F. der Begriff „Ausgangsspannung des Kraftsensors“ verwendet, wenn die Ausgangsspannung des mit dem eigentlichen Kraftsensor verbundenen Messverstärkers gemeint ist.

<sup>7</sup> Da bei den folgenden Messungen die Spannung  $U$  jeweils mit dem Oszilloskop gemessen wird, erfolgt auch hier die Messung von  $U$  mit dem Oszilloskop statt mit einem Multimeter, um Differenzen in den Messwerten durch unterschiedliche Kalibrierungen von Oszilloskop und Multimeter zu vermeiden.

### 3.3 Anziehungskraft zwischen zwei Magneten

Mit einer Anordnung gem. Abb. 4 soll die Gültigkeit des Abstandsgesetzes für die Anziehungskraft zwischen zwei Magneten nach Gl. (13) überprüft werden. Beide Magnete sind in Al-Hülsen gefasst, die auf Stangen geschraubt werden. Zunächst wird nur der obere Magnet mit der Polstärke  $P_1$  zusammen mit der Stange an einen Kraftsensor S gehängt. Eine reibungsarme Führung A beschränkt seine Bewegung auf die senkrechte Richtung. Die Ausgangsspannung  $U_{S,0}$  des Kraftsensors wird gemessen. Sie entspricht der Spannung für den Fall  $r \rightarrow \infty$ , wird also ausschließlich durch die Gewichtskraft  $G$  von Stange und Magnet verursacht. Aus  $U_{S,0}$  wird mit den Daten der Kalibrierfunktion  $G$  berechnet, die später von allen anderen gemessenen Kräften subtrahiert werden muss.

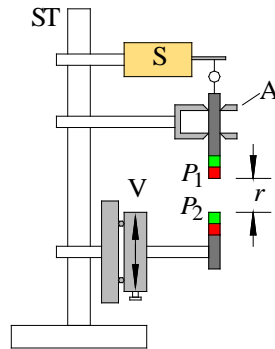


Abb. 4: Anordnung zur Messung der Anziehungskraft zwischen zwei Magneten mit den Polstärken  $P_1$  und  $P_2$ . Alle Komponenten sind an einem gemeinsamen Stativ ST befestigt, das eine exakt senkrechte Montage erlaubt. Übrige Bezeichnungen siehe Text.

Anschließend wird der untere Magnet mit der Polstärke  $P_2$  mit einer Stange auf einem Verschiebetisch V montiert, mit dem er in senkrechter Richtung bewegt werden kann. Zunächst wird er so justiert, dass die Längsachsen beider Magnete exakt übereinander liegen. Danach wird mit einem PVC-Abstandsstück (Länge  $l \approx 20$  mm, messen) ein definierter Abstand  $l$  zwischen beiden Magneten eingestellt. Die zugehörige Skalenposition des Verschiebetisches wird notiert und als  $s = l$  definiert. Anschließend wird der Verschiebetisch in die Skalenposition  $s = 10$  mm gebracht und  $U_S(s)$  bestimmt<sup>8</sup>. Danach wird  $s$  in Schritten von ca. 0,5 mm Länge bis auf etwa  $s = 2$  mm verringert und dabei jeweils wieder  $U_S(s)$  gemessen.

Die Werte von  $U_S(s)$  werden mit den Daten der Kalibrierfunktion in Kräfte  $F(s)$  umgerechnet. Nach Subtraktion von  $G$  erhält man daraus die Kräfte  $F_M(s)$ , die durch die magnetische Anziehung verursacht werden:

$$(24) \quad F_M(s) = F(s) - G$$

Jede Kraft  $\mathbf{F}$ , die auf den Biegebalken im Kraftsensor wirkt, führt gem. Abb. 5 am Angriffspunkt Q von  $\mathbf{F}$  zu einer kleinen Auslenkung  $d$  des Balkens in Richtung von  $\mathbf{F}$ .  $d(F)$  lässt sich in guter Näherung durch ein Polynom 2. Ordnung beschreiben:

$$(25) \quad d(F) = a_1 F + a_2 F^2$$

Die Parameter  $a_1$  und  $a_2$  sind den Unterlagen am Arbeitsplatz zu entnehmen. Unter Berücksichtigung der Auslenkung  $d$  gilt für den tatsächlichen Abstand  $r$  zwischen den beiden Magneten bei einer Position  $s$  am Verschiebetisch:

$$(26) \quad r = s - d$$

$F_M(s)$  wird doppelt-logarithmisch über  $r$  aufgetragen (Origin). In das Diagramm wird eine Ausgleichsgerade durch die Messdaten für  $r > 5$  mm mit der festen Steigung  $-2$  eingezeichnet (Daten für  $r < 5$  mm maskieren). Bei Gültigkeit des nach Gl. (13) erwarteten  $1/r^2$ -Gesetzes müssten alle Messwerte auf dieser Geraden liegen. Für kleine Abstände  $r$  wird sich jedoch eine deutliche Abweichung der Messwerte von der

<sup>8</sup> Beispiel: Es sei  $l = 20,1$  mm. Bei diesem Abstand zwischen  $P_1$  und  $P_2$  werde am Verschiebetisch V die Skalenposition 74,5 mm abgelesen. Dieser Wert wird als  $s = l = 20,1$  mm definiert. Anschließend soll V in die Position  $s = 10$  mm gebracht werden. An seiner Skala muss demnach ein Wert von  $(74,5 - 10,1)$  mm = 64,4 mm eingestellt werden.

Ausgleichsgeraden ergeben. Der Grund dafür ist, dass bei kleinen  $r$  die Annahme *punktförmiger* Polstärken  $P$  nicht mehr gerechtfertigt ist.

### Frage 3:

- Ab welchem Abstand  $r$  ist in guter Näherung eine  $1/r^2$ -Abhängigkeit gegeben?

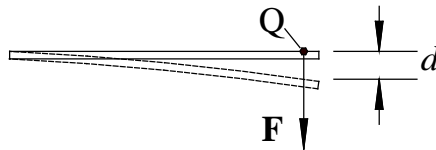


Abb. 5: Verformung des Biegebalkens im Kraftsensor bei Einwirkung einer Kraft  $F$ , die am Punkt  $Q$  angreift.  $Q$  wird durch  $F$  um die Strecke  $d$  ausgelenkt.

## 3.4 Elastischer Stoß auf einer Luftkissenbahn

Auf einer Luftkissenbahn LK (Abb. 6), auf der sich ein aufgesetzter Schlitten nahezu reibungsfrei bewegen kann, soll der Zusammenhang *Kraftstoß = Impulsänderung* bei einem elastischen Stoß quantitativ untersucht werden. Da alle Bewegungen längs der Achse der Luftkissenbahn ablaufen, ist gem. Abb. 3  $\alpha = 0^\circ$  und es reicht eine Betrachtung der skalaren Größen Geschwindigkeit ( $v$ ) und Impuls ( $p$ ).

Der Schlitten  $K_1$  mit der Masse  $m_1$  wird mit der Hand auf die Geschwindigkeit  $v_1$  beschleunigt. Er bewegt sich anschließend auf den Kraftsensor  $S$  zu, der über eine starre Halterung  $H$  mit dem massiven Stahlträger-Unterbau  $T$  von LK verbunden ist. Durch diesen Aufbau sind die in Kap. 2.3 definierten Bedingungen für den Stoßpartner  $K_2$  (bestehend aus  $S$ ,  $H$  und  $T$ ), nämlich  $m_2 \rightarrow \infty$  und damit  $v_2' \rightarrow 0$ , gewährleistet.

Die während des Stoßes zwischen  $K_1$  und  $K_2$  wirkende Kraft  $F(t)$  wird mit dem Kraftsensor  $S$  gemessen und mit Hilfe eines Speicheroszilloskops aufgezeichnet.

Auf dem Schlitten ist mittig eine Blende  $B$  der Breite  $d$  angebracht, die beim Durchlaufen einer Gabellichtschranke  $LS$  diese für die Dauer  $t_{LS}$  unterbricht. Durch Messung von  $d$  (Messschieber),  $t_{LS}$  (Speicheroszilloskop) und  $m_1$  (Laborwaage) lassen sich somit die Geschwindigkeiten und Impulse von  $K_1$  vor und nach dem Stoß bestimmen.

### Hinweise zur Durchführung:

- Um eine präzise Messung von  $F(t)$  zu ermöglichen, ist der Kraftsensor mit einer Spitze  $P$  versehen, die einen annähernd punktförmigen Kontakt mit einem am Schlitten montierten Aluminiumwürfel  $AW$  ermöglicht<sup>9</sup>. Vor Beginn der Messung muss der Sensor so ausgerichtet werden, dass der Würfel von der Spitze mittig getroffen wird.
- Um zu verhindern, dass der Schlitten nach dem Anstoßen auf der Bahn weiter beschleunigt oder gebremst wird, ist eine exakt waagerechte Ausrichtung der Bahn erforderlich. Diese lässt sich nicht über ihre gesamte Länge erreichen, wohl aber über eine Strecke von  $L \approx (10 - 15)$  cm Länge zwischen  $LS$  und  $S$ , die für die Durchführung der Messung ausreichend ist. Die Ausrichtung der Bahn erfolgt *ausschließlich* über das Verstellen des drehbaren Fußes  $A$  am Stahlträger. Bei eingeschalteter Luftzufuhr muss  $A$  so justiert werden, dass der aufgesetzte Schlitten im Bereich  $L$  nicht beschleunigt wird.
- Der Schlitten  $K_1$  darf nur so stark beschleunigt werden, dass  $F(t)$  immer kleiner als 5 N bleibt, da andernfalls der Messbereich des Kraftsensors verlassen wird. Die Geschwindigkeit  $v_1$  des Schlittens darf also nicht zu groß und damit  $t_{LS}$  nicht zu klein werden.  $t_{LS} > 120$  ms ist ein guter Orientierungswert.

Abb. 7 zeigt ein typisches Oszilloskopbild nach einem Stoßvorgang. An  $CH1$ , auf den getriggert wird, wurden die Signale  $U_{LS}$  der Gabellichtschranke beim Hin- und Rücklauf des Schlittens erfasst, an  $CH2$  das Signal  $U_S$  des Kraftsensors. Ein Bildschirmfoto des Oszilloskopbildes wird dem Protokoll beigelegt. Zur Auswertung der Signale werden sie zunächst auf einer Compact-Flash-Karte oder einem USB-Stick (je nach Gerätetyp) gespeichert und anschließend in das ASCII-Format konvertiert. Einzelheiten dazu siehe Anhang (Kap. 4). Anschließend können diese Dateien in `Origin` importiert und dort weiter ausgewertet werden.

<sup>9</sup> Der Schlitten muss beidseitig mit gleichen Al-Würfeln versehen werden, um eine symmetrische Massenverteilung zu gewährleisten.

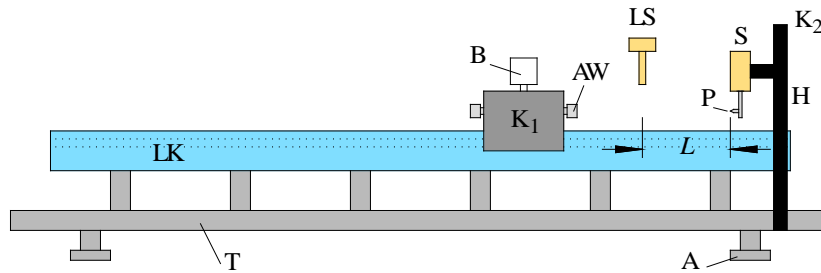


Abb. 6: Anordnung zur Messung von Impuls und Kraftstoß beim elastischen Stoß auf einer Luftkissenbahn LK.  $K_1$ : Schlitten mit Blende B und zwei Al-Würfeln AW. S: Kraftsensor mit Spitze P an Halterung H. T: Stahlträger-Unterbau für LK mit Stellfuß A. L: Länge des Messbereiches. LS: Gabellichtschranke.

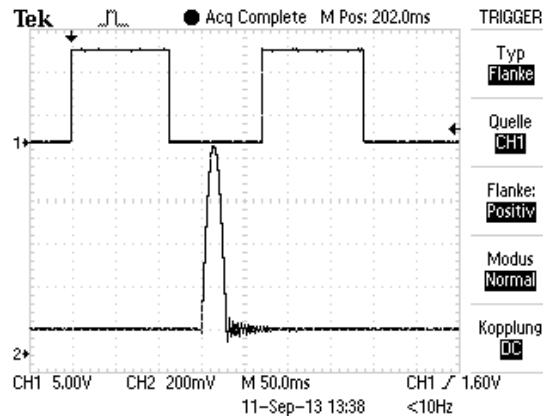


Abb. 7: Oszilloskopbild der Signale der Gabellichtschranke LS (CH1, oben) und des Kraftsensors S (CH2, unten).

Die Impulsbreiten  $t_{LS}$  der Signale der Gabellichtschranke für den hin- und rücklaufenden Schlitten werden entweder mit Hilfe der Zeitcursor am Oszilloskops bestimmt oder in Origin mit Hilfe des Tools Datenkoordinaten (Data Reader) ermittelt. Die gesamte Impulsänderung des Schlittens während des Experimentes kann dann gem. Gl. (19) berechnet werden:

$$(27) \quad |\Delta p| = |p_1| + |p_1'| = m_1 d \left( \frac{1}{t_{LS}} + \frac{1}{t_{LS}'} \right)$$

#### Frage 4:

- Zeigen Sie, wie man zu der Gleichung (27) kommt.

Für die Berechnung des Größtfehlers der Impulsänderung können  $m_1$  und  $d$  als fehlerfrei angenommen werden.

Zur Messung des Kraftstoßes wird das Integral in Gl. (22) durch eine Summe ersetzt:

$$(28) \quad \Delta p = \sum_i F(t_i) \Delta t$$

Dabei sind  $F(t_i)$  die diskreten Messwerte des Kraftsensors zu den Zeitpunkten  $t_i$  (Abtastpunkte des Oszilloskops), die sich mit Hilfe der Kalibrierfunktion aus den aufgezeichneten Spannungswerten  $U_S(t_i)$  berechnen lassen. Die Summe über die  $F(t_i)$  lässt sich mit dem Origin-Tool Spaltenstatistik einfach ermitteln<sup>10</sup>.  $\Delta t$  ist der konstante Zeitabstand zwischen zwei aufeinander folgenden Messwerten zu den Zeiten  $t_i$  und  $t_{i+1}$ , der sich aus der eingestellten Zeitablenkung am Oszilloskop ( $x$  SEC/DIV) und der Zahl der aufgezeichneten Messwerte (2.500) ergibt:

<sup>10</sup> Rechter Mausklick bei entsprechend markierter Spalte ausführen, dann Menü Spaltenstatistik wählen und dort unter Eigenschaften Haken bei Summe setzen.



$$(29) \quad \Delta t = 10 \text{ DIV} \times (x \text{ SEC/DIV}) / 2500$$

Es ist schwierig, Beginn und Ende des Kraftstoßes und damit seine Dauer  $\tau$  exakt zu bestimmen. Deshalb wird die Summe nach Gl. (28) nicht über  $\tau$ , sondern über das gesamte aufgezeichnete Zeitintervall gebildet, d. h. über alle mit dem Oszilloskop aufgezeichneten 2.500 Messwerte. Dabei ist folgendes beachten:

Außerhalb des Zeitintervalls  $\tau$  sollte  $F(t_i) = 0$  sein. Tatsächlich kann dort jedoch durch ein kleines Offset im Kraftsignal und durch elektronisches Rauschen  $F(t_i) \neq 0$  sein und somit bei Summation über viele  $t_i$  einen erheblichen Fehler verursachen. Deshalb wird zunächst der Mittelwert  $F_0$  des Kraftsignals über das Zeitintervall gebildet werden, das *sicher* vor Beginn des Stoßes liegt<sup>11</sup>. Anschließend wird dieser Wert  $F_0$  von allen Messwerten  $F(t_i)$  subtrahiert und erst danach die Summe nach Gl. (28) gebildet.

Um die Berechnung des Größtfehlers des Kraftstoßes nicht zu aufwändig zu machen, kann für jeden einzelnen Kraftwert  $F(t_i)$  ein Größtfehler von 5 mN angenommen und der Größtfehler von  $\Delta t$  vernachlässigt werden.

Abschließend wird überprüft, ob die Impulsänderung nach Gl. (27) dem Kraftstoß nach Gl. (28) entspricht. Die Ursachen möglicher Abweichungen beider Größen werden diskutiert.

## 4 Anhang

Zur Speicherung von Daten des Oszilloskops auf USB-Stick oder Compact-Flash-Karte und anschließende Konvertierung in ASCII-Daten sind folgende Schritte erforderlich:

Am Oszilloskop werden zu Beginn einmalig folgende Tasten gedrückt:

Grundeinstellungen:

SAVE/RECALL	→ Aktion	→ Alle speichern
Taste DRUCKEN	→ Speichert alles	
Verzeichnis wählen	→ GPRnn auswählen	→ Verzeichnis wechseln → Zurück

Speichern:

SAVE / PRINT

Nach Betätigung der SAVE / PRINT-Taste werden vier Dateien im Unterverzeichnis ALLnnnn gespeichert, wobei nnnn eine fortlaufende Nummer ist (beginnend bei 0000), die bei jeder Betätigung der Taste SAVE / PRINT um 1 erhöht wird. Die vier Dateien sind:

FnnnnTEK.SET	ASCII-Datei mit Betriebsparametern des Oszilloskops
FnnnnTEK.TIF	Bilddatei mit Bildschirmfoto
FnnnnCH1.CSV	Daten von CH1 (u.a. Spannung $U_1$ als Funktion der Zeit $t$ )
FnnnnCH2.CSV	Daten von CH2 (u.a. Spannung $U_2$ als Funktion der Zeit $t$ )

Für die quantitative Auswertung sind nur die beiden letzten Dateien von Bedeutung, die im CSV-Format vorliegen.<sup>12</sup> Mithilfe des zur Verfügung gestellten Matlab-Skriptes<sup>13</sup> GPRT00LS.m, dort Option Tektronix CSV to ASCII, werden aus diesen Dateien die Signalverläufe  $U_1(t)$  für CH1 und  $U_2(t)$  für CH2 extrahiert, in das ASCII-Format umgewandelt<sup>14</sup> und anschließend im Verzeichnis ALLnnnn unter folgenden Namen gespeichert:

FnnnnCH1_all.txt	Spalte 1: $t$ , Spalte 2: $U_1(t)$ für CH1
FnnnnCH2_all.txt	Spalte 1: $t$ , Spalte 2: $U_2(t)$ für CH2

Diese Daten können über Datei → Import → ... in Origin importiert werden.

<sup>11</sup> Zellen in der Spalte mit den Werten für  $F(t_i)$  markieren, für die  $t_i$  vor dem Beginn des Stoßes liegt. Dann → Spaltenstatistik wählen, und dort unter Eigenschaften Haken bei Mittelwert setzen.

<sup>12</sup> CSV ist die Abkürzung für *character separated values*. Dies bedeutet, dass einzelne Einträge in der Datei (Zahlenwerte, Zeichenketten,...) durch ein definiertes Zeichen (englisch: *character*) voneinander getrennt sind. Hier ist das Komma das Trennzeichen.

<sup>13</sup> Die entsprechenden Matlab-Skripte stehen nach dem Anmelden an einem PC im Grundpraktikum im Arbeitsverzeichnis (Q:) zur Verfügung.

<sup>14</sup> Neuere Origin Versionen können CSV-Formate auch direkt einlesen.